2009 개정 교육과정

인천광역시교육감 인정
중지-04-073-04-12

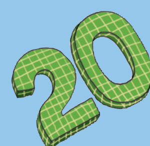
교사용 지도서

중학교

수학 3

신항균 · 황혜정 · 이광연 · 김화영 · 조준모 · 최화정 · 윤기원

(주)지학사



교사용 지도서

중 학 교

수학 ③

(주)지학사

머 리 말

현대 과학 문명은 미처 예상하지 못한 분야까지 급속도로 발전하고 있으며, 그 발전의 중심에는 언제나 수학이 자리해 왔습니다. 이러한 상황 가운데 수학 교육의 중요성은 더욱 부각되고 있습니다. 하지만 수학은 일반적으로 어려운 교과로 인식되기 때문에 하고자 하는 의욕이 있음에도 효율적인 학습이 이루어지지 않는 경향이 많습니다. 그 이유는 여러 가지가 있지만 다음과 같이 두 가지로 요약할 수 있습니다.

첫째, 방법론의 문제입니다. 수학은 어느 교과보다도 체계적이고 논리적이기 때문에 단계적인 학습을 통하여 단원 상호 간의 연계적 이해가 이루어져야 합니다. 또한 수학은 누적적인 학문입니다. 오늘날의 수학은 오래전부터 발견되고 발전해 온 수학을 기초로 이루어져 있으므로 이를 무시하면 수학 학습은 마치 사상누각이 되는 것입니다. 따라서 수학은 반드시 기초부터 시작해야 하고, 이를 바탕으로 체계적이고 논리적으로 확장해 나가야 합니다. 그러나 수학을 학습하는 데 이와 같은 수학의 특징을 중요하지 않게 여기는 경향이 있습니다.

둘째, 응용력의 문제입니다. 이미 언급했듯이 수학은 논리적인 전개를 바탕으로 합니다. 그러므로 체계적인 이해를 전제로 하지 않은 단순한 암기와 기계적인 응용은 심도 있는 수학 학습에 한계를 불러옵니다. 즉, 어떠한 문제가 주어졌을 때, 문제의 성격과 해결 과정에 대한 철저한 사고 없이 문제 유형과 공식을 대응하여 해결하려는 식의 요령은 오히려 다양한 문제에 적용하는 데 한계를 가져오고 수학 학습을 보다 어렵게 느끼게 합니다.

본 교사용 지도서는 위와 같은 점들을 고려하여 단원 간의 연계와 원리의 이해 및 적용에 중점을 두고 편찬하였습니다. 그리고 선생님께서 학생들에게 수학을 지도할 때, 학생들이 보다 흥미와 관심을 가지고 쉽게 이해할 수 있도록 교과서 체계에 맞추어 구성하였습니다. 아울러 교과서의 활용에 도움이 되는 사항들을 함께 수록하였으며, 구체적인 활용 방법은 따로 설명하였습니다.

교육 현장에 계신 선생님께서 본 교사용 지도서를 효율적으로 사용하여 보다 알찬 수학 교육의 결실을 거두기 바랍니다.

지은이 씀

구성과 특징

총론 교사들의 전문성 신장에 도움을 줄 수 있는 내용들을 엄선하여 수학 교육의 필요성 및 목적, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해, 수학 교과서의 개발 동향, 수학적 문제 해결, 수학과 평가의 특징 및 방법, 좋은 수업의 의미, 수학과 수업 평가 등을 설명하였습니다.

수학 교육의 필요성 수학 교육의 필요성과 목적을 제시함으로써 교사가 수학을 가르쳐야 하는 당위성에 대하여 인식하고 학생들을 지도할 수 있도록 하였습니다.

교과서와의 연계 본 교사용 지도서와 연계된 교과서의 편찬 방향과 구성, 특징을 제시함으로써 교과서의 흐름을 파악하고 수업에 활용할 수 있도록 하였습니다. 또 연간 지도 계획안을 표로 제시하여 학습 지도 계획 수립 시 도움이 되도록 하였습니다.

2009 개정 교육과정 2009 개정 교육과정의 기본 방향과 그에 따른 수학과 교육과정의 특징, 학년별 내용 변화, 내용 체계를 제시함으로써 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정을 이해하고 수업에 적용할 수 있도록 하였습니다.

수학 교육의 동향 최근 수학 교육의 큰 흐름인 구성주의 수학 교육관, 문제 해결의 조류, 수학과 평가의 동향을 설명하고 이에 따른 교과서의 개발 방향과 수업 운영 방안 등에 대하여 제시함으로써 실제 수업에 의미 있게 적용할 수 있도록 하였습니다.

각론 단원별 지도에 참고할 수 있는 수준별 교수 · 학습 과정안, 수준별 학습지, 교과서 내용의 해설과 문제 풀이 및 교과서 내용 지도 시 유용한 자료들을 제시하였습니다.

단원의 차시별 지도 계획 단원 전체를 지도하는 데 있어서의 총 시간 수, 지도 내용, 교육과정에 명시된 용어와 기호 등을 쉽게 알아볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.

단원의 이론적 배경 단원의 내용 중에서 특히 교사에게 필요한 이론적 배경과 이론이 발전되어 온 수학사적 배경을 설명하였습니다.

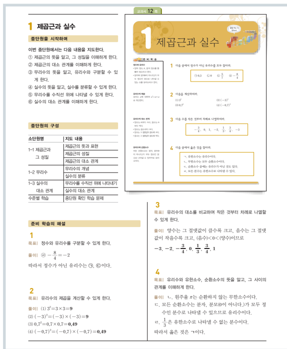
단원을 시작하기 전에 단원의 시작에 앞서 이 단원에서 학습하게 될 중심 내용을 간략하게 요약정리하였습니다. 그리고 학생들에게 단원의 중심 내용을 이해시킬 수 있도록 여러 가지 예를 제시하였습니다.

단원의 지도 목표 대단원의 지도 목표를 조목별로 중요 사항만 간단하게 설명하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점 대단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 설명하였습니다.

교수 · 학습의 계열 단원과 관련하여 선수 학습과 후속 학습의 연계성을 제시하였습니다.

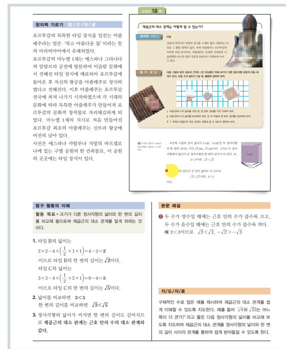
교수 · 학습 과정안(수준별)과 수준별 학습지 한 차시에 해당하는 수준별 교수 · 학습 과정안과 수준별 학습지를 예로 제시하여 학생들의 수준에 맞게 수준별 수업을 진행하는 데 도움이 될 수 있도록 하였습니다.



중단원을 시작하며 중단원에서 학생들에게 지도할 내용을 일목요연하게 정리하였습니다.

중단원의 구성 중단원의 소단원명과 각 소단원의 지도 내용을 제시하였습니다.

준비 학습의 해설 준비 학습 문제에 관한 지도 목표 및 문제의 풀이를 제시하였습니다.



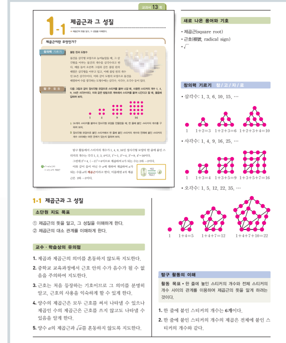
창의력 기르기 참고 자료 스토리텔링을 활용하여 학습 내용에 대한 학생들의 흥미를 유발할 수 있도록 관련 내용에 대한 충분한 설명을 제시하였습니다.

탐구 활동의 이해 탐구 활동의 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

소단원 지도 목표 소단원별로 세부적이고 구체적인 지도 목표를 자세히 제시하였습니다.

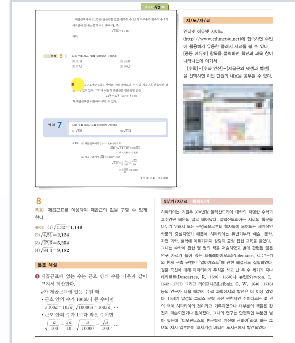
교수 · 학습상의 유의점 소단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 정리하여 제시하였습니다.

새로 나온 용어와 기호 소단원에서 새로 배우게 될 용어와 기호를 제시하였습니다.



본문 해설 교과서에 제시된 학습 내용을 해설하였습니다. 공식이나 중요한 내용은 강조하고, 보다 자세한 설명을 덧붙였습니다.

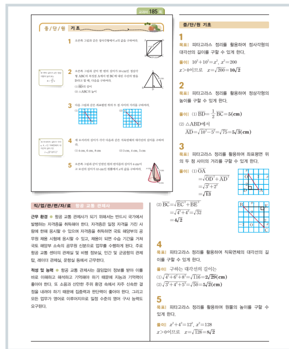
지도 자료 내용 지도 시 보충 설명이나 기호에 대한 설명이 필요할 때, 도움이 될 수 있도록 지도 자료를 제시하였습니다.



읽기 자료 교과서의 본문 내용과 관련된 수학자, 기호의 유래, 생활 속 수학 등 각종 읽기 자료를 제시하여 수업 시간에 학생들의 흥미를 유발하는 데 도움이 될 수 있도록 하였습니다.

문제의 해설 교과서 본문에 있는 모든 문제의 출제 의도 및 지도 목표, 자세한 풀이를 제시하였습니다.

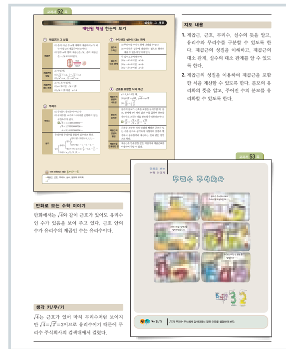
직업 관련 자료 교과서의 수학이 만난 세상 속 직업 이야기와 관련된 자료를 제시하여 학생들의 진로 지도에 도움이 될 수 있도록 하였습니다.



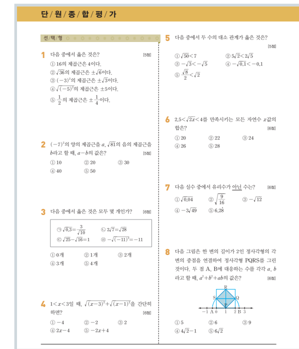
지도 내용 단원에서 지도한 내용을 간략히 정리하였습니다.

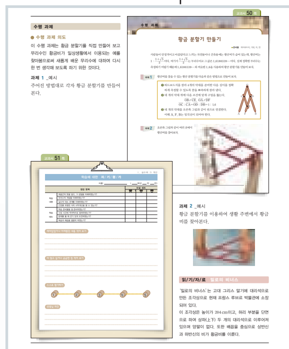
만화로 보는 수학 이야기 만화로 보는 수학 이야기의 내용과 단원의 관련성에 대하여 설명하였습니다.

생각 키우기 만화와 관련하여 열린 반응을 요구하는 문제인 생각 키우기의 예시 답안을 제시하였습니다.

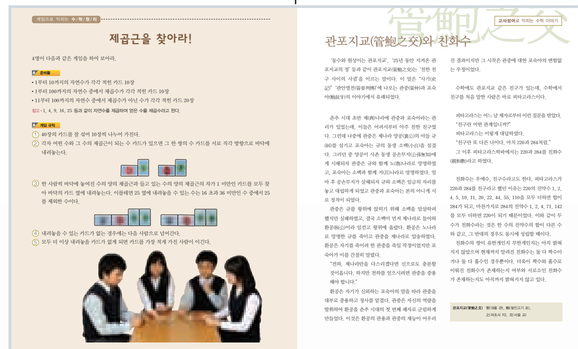


단원 종합 평가 단원의 이해도를 측정하기 위하여 단원 끝에 평가 문제를 추가로 제시하였습니다. 또 그 결과를 반영하여 학생들의 수준에 맞는 지도를 할 수 있도록 수준별 문제를 제시하였습니다.


단/원/종/합/평/가



수행 과제 수행 과제의 출제 의도와 예시 답안을 제시하였습니다.


제곱근을 찾아라!

관포지교(管鮑之交)와 친화수

게임으로 익히는 수학 원리 학생들이 학습한 내용을 활용하여 게임을 할 수 있도록 관련 자료를 제시하고, 재미있는 게임을 통하여 수학 내용을 폭넓게 이해할 수 있도록 하였습니다.

고사성어로 익히는 수학 이야기 단원과 관련된 수학 내용을 다시 한 번 상기시키기 위하여 흥미로운 고사성어와 함께 수학 이야기를 제시하였습니다.

차 례

총론

각론

교사용 지도 자료

총론

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

이 들어 있으며, 매우 간단한 수학적 원리를 활용하여 흥미진진한 게임을 하는 예에서도 그 심미적 가치를 쉽게 찾을 수 있다. 또한 수학의 아름다움이나 매력은 미적분의 기본 정리에서부터 신라 시대의 술병에 이르기까지 다양한 대상과 수준에서 발견될 수 있다. 이와 같은 풍부한 자료와 유연한 해석을 통하여 문화적 가치, 수학 고유의 심미성을 적절한 수준에서 확인하는 경험은 고등학교를 떠남과 동시에 수학과 멀어지는 대부분의 학생들에게 반드시 필요하다.

수학 교육에서 놓치지 말아야 하는 것은 모든 건전한 시민을 위한 공통적으로 기본적이면서도 필수적인 수학 내용이 무엇인가를 분명히 하는 것이다. 따라서 수학 교육은 모든 학생들에게 꼭 필요한 내용이 무엇인지 명확히 정할 필요가 있으며 그것이 다양한 상황과 측면에 적용되면서 철저히 그리고 깊이 있게 이해되도록 돕는 것이 필요할 것이다. 궁극적으로 교육의 목적은 학생의 잠재력을 계발하고, 건전한 사회인으로서의 역할을 수행하도록 돕는 데 있다. 다른 교과 교육이 그러하듯이 수학도 현대 사회와 미래 사회를 살아갈 건전한 시민으로서 그 사회를 지탱하는 문명적, 문화적 기저 중에서 수학을 기반으로 하는 것에 대하여 수학적으로 이해하는 눈을 기르기 위해 배우는 것이다.

결국 수학을 가르쳐야 하는 이유는 수학의 내용이 인간과 환경에 관한 각종 현상을 보는 안목과 수단을 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제 · 사회 · 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리 · 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적인 방법으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결하게 함으로써 문제 해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고도 할 수 있다. 즉, 조각상의 무게중심, 물건 구매, 유전자의 배열, 황금 비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 일상생활의 다양한 모습들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다(황혜정 외, 2012).

II. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일, 2009 개정 교육과정에 따른 '수학과 교육과정'이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되고 있으며, 이에 대한 개정 배경 및 방향, 창의성 강조를 위한 수학적 과정(mathematical process)의 반영, 교육과정 문서의 구성 및 체제, 학교급별 주요 내용 변화에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다.

01 개정의 기본 방향

새로운 수학과 교육과정에서는 우선적으로 2009 개정 교육과정 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는 데 주력하였다. 특히 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육 목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두었으며, 다음의 항목을 구현하고자 하는 것이 새로운 교육과정의 주요 개발 방향이다.

가. 수학 교과 내용의 양 20 % 경감

2009 개정 교육과정 총론의 '교육과정 편성 · 운영 지침'의 주요 변화 내용 중 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 대비 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 20 % 경감의 배경이 될 수 있는 근거는 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20 % 범위 내에서 시수를 증감하여 운영할 수 있는 데 있다(교육과학기술부, 2009). 2009 개정 교육과정 총론에서는 각 교과별로 교육과정의 성취 기준을 개발할 경우 학습량이 증가하여 교육 내용의 적정화를 저해할 우려가 있음을 염두에 두고, 교과별 교육과정 개발 시 현행 교육과정 대비 20 %의 내용이 경감되어야 함을 적극 주장하였다(박순경, 2010). 즉, 기준 수업 시수를 감안하되 교과 내용의 양은 현행 교육과정보다 20 % 정도 감축한다고 상정하고 최적한 학습 내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하도록 하였다.

나. 수학적 창의성 강조에 따른 수학적 과정

(1) 수학적 창의성의 의미

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다. 여기서 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

한편 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 본다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장시켜야 할 것이다.

(2) 수학적 과정의 의미 및 반영

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 말하는 '수학적 과정'은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서 '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성 요소로 가지는 개념으로 정의하였다.

여기서 '수학적 문제 해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 이미 알고 있는 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현 수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 구성 체제를 살펴보면, '목표', '내용', '교수 · 학습 방법', '평가' 등의 순으로 구성되어 있다. 학교에서 구체적으로 학습해야 할 수학 성취 기준은 '내용'에서 학년(군)별로 제시되어 있다. 한편 '수학적 과정'의 하위 구성 요소로 설정한 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 사항이다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다.

학교의 수학 교수 · 학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우, 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취 기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 '목표'와 '교수 · 학습 방법'에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점이 있다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 지니고 있다.

따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 보다 구체적인 성취 기준을 가지고 '내용'의 진술에 포함시킴으로써 교과용 도서 및 수업 상황에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명히 다루게 하고 있다. 한마디로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'을 '수학적 과정'으로 간주하고, 이를 학습 내용 성취 기준 및 교수 · 학습상의 유의점, 그리고 교수 · 학습 방법 등에 반영하였다.

수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 특징은 각각 다음과 같다.

〈표 Ⅱ-1〉 수학적 과정의 요소 및 특징

수학적 문제 해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제 해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제 해결 과정이나 완결 후 문제 제기를 통하여 문제 해결을 발전적으로 이끌 수 있다.
라. 문제 해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 이를 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적인 방법으로 검증할 수 있다.
다. 수학적 활동에서 다양하고 독창적인 아이디어가 지니는 가치를 인식할 수 있다.
수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 수학적 활동 중에 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

⑶ 학년군제 도입 및 적용

2009 개정 교육과정 총론의 초·중등학교 교육과정 구성의 방침에 의하면 "교육과정 편성·운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성·운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다."라고 규정하고 있다(교육과학기술부, 2009).

현재 2007 개정 교육과정 체제에서는 학년제를 따르고 있다. 즉, 각 학년에서 배워야 할 내용을 학년별로 제시하였다. 반면 학년군제는 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아니라 몇 개 학년을 묶어서 제시한다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 2학년 사이에 학습할 내용을 초등학교 1~2학년군으로 제시하는 것이다.

학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다. 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용을 혹은 더 깊은 내용을 학습할 수 있고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습할 수 있다. 학생들은 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택할 수 있으며, 이는 학생들의 진로 선택과 관련될 수 있다.

또 다른 변화는 학년군제에서는 다양한 교과서가 사용될 수 있다는 것이다. 교육과정에서 엄격한 학년의 구분이 없어지고 내용이 통합적으로 제시되기 때문에 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치할 수 있게 된다. 예를 들어 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 수와 연산 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성할 수 있다. 또는 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다. 즉, 수학 교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하게 된다.

그러나 학년군제에 따르는 단점들도 충분히 예상되기 때문에 학년군제를 실행하기 위해서는 다음과 같은 사항들에 대한 해결 방안이 모색되어야 한다.

첫째, 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다. 학년제 대신에 학년군제를 실시하는 취지 중의 하나는 학생들의 학습 수준 차를 인정하고 학생들의 수준에 맞는 학습을 통해서 사고 발달과 진로 선택에 긍정적인 효과를 주기 위함이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다.

둘째, 수준별 수업이 원활히 시행되기 위해서는 적절한 평가 기준이 마련되어야 한다. 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수하고 이에 대한 타당한 평가가 이루어져야 한다.

셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준이 필요하다.

넷째, 전학생들을 위한 보충 학습 과정 등 교수·학습 방안 및 정책이 마련되어야 한다.

02 수학과 교육과정의 특징

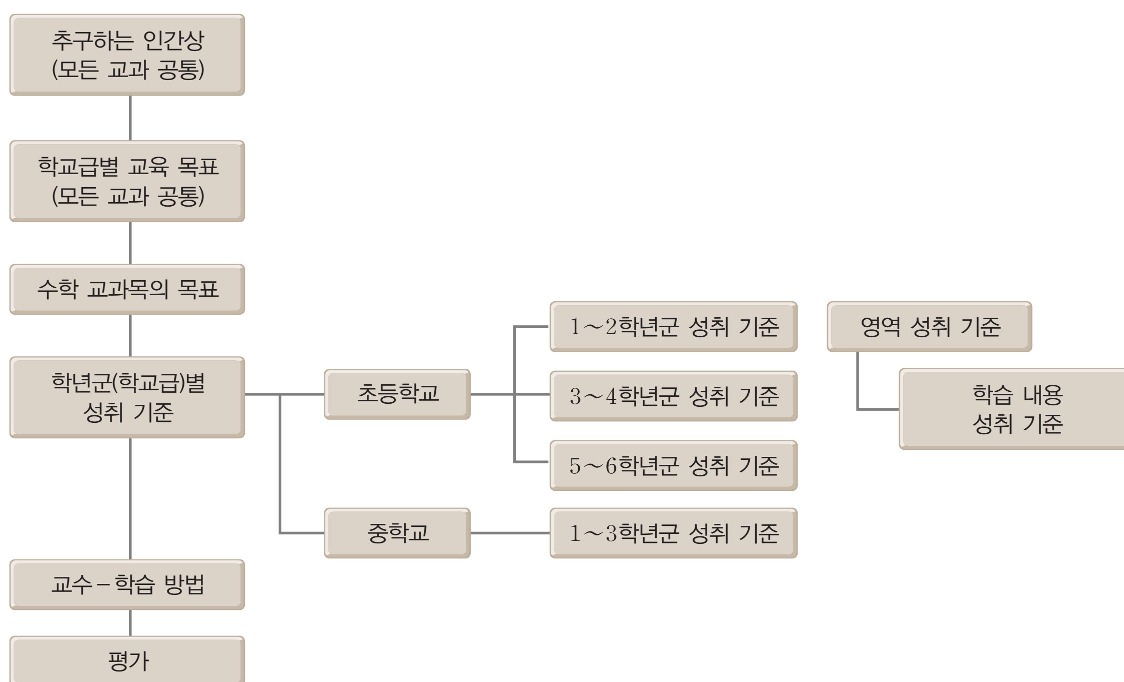
가. 교과목의 구성 및 문서 체제

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교과목은 공통 교육과정과 선택 교육과정으로 구성되어 있으며, 공통 교육과정에는 초등학교 1학년에서부터 중학교 3학년까지 다뤄지는「수학」교과목이 해당되며, 선택 교육과정에는 고등학교 1학년에서 3학년까지 다뤄지는 9개 교과목이 포함되어 있다. 선택 교육과정은 '기본 과목', '일반 과목', '심화 과목'으로 구성되어 있으며, 일반 과목은 모두 5단위의 6개 선택 과목으로「수학Ⅰ」,「수학Ⅱ」,「확률과 통계」,「미적분Ⅰ」,「미적분Ⅱ」,「기하와 벡터」로 구성되어 있다. 그 밖에 기본 과목에는「기초 수학」, 심화 과목에는「고급 수학Ⅰ」과「고급 수학Ⅱ」가 포함된다.

공통 교육과정		
1. 수학		
선택 교육과정		
〈기본 과목〉	〈일반 과목〉	〈심화 과목〉
1. 기초 수학	1. 수학 I 2. 수학 II 3. 확률과 통계 4. 미적분 I 5. 미적분 II 6. 기하와 벡터	1. 고급 수학 I 2. 고급 수학 II

[그림 Ⅱ-1] 수학과 교육과정의 교과목 구성

공통 교육과정 기간에 다뤄지는 수학 교과목의 문서 체제를 예로 들어 도식화하면 다음과 같으며, 선택 교육과정 기간의 9개 교과목의 문서 체제도 이와 동일한 방식으로 구성되어 있다. 여기서 각 교과목의 '3. 목표'는 2007 개정 교육과정의 '1. 성격'과 '2. 목표'의 두 부문의 진술을 통합하여 진술하고 있다. 특히「수학」교과목의 목표의 경우, 예전에 분리하여 제시되어 있던 초등학교와 중학교의 교육 목표가 통합, 진술되었다.



[그림 Ⅱ-2] 수학 교과목의 목표 및 성취 기준

나. 영역 구분의 변경

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 제7차 개정의 것과 마찬가지로, 학교급별 특성을 감안하여 초등학교와 중학교 각각의 내용 영역을 구분하였으며, 초등학교의 경우 '규칙성과 문제 해결' 영역을 '규칙성'으로 변경하였다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 모든 학교급 및 모든 수학 교과목에 걸쳐 수학적 과정의 요소로서 문제 해결 활동을 전 영역 및 세부 내용에 걸쳐 적극 반영하도록 강조하고 있기 때문이다.

2007 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중·고등학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	확률과 통계		확률과 통계
	규칙성과 문제 해결		기하

2009 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	규칙성		확률과 통계
	확률과 통계		기하

[그림 Ⅱ-3] 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 영역명

03 학년별 내용 변화

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 학교급별, 학년군별 내용의 변화는 기본적으로 학교 현장에서의 창의성 활동을 실제적이고 효율적으로 실행하기 위한 것으로, 학습 내용의 적정화 및 학년별 내용 분량이 조정되었다. 수학과 교육과정의 총 10개 교과목에 대한 주요 변화 내용을 학교급별로 살펴보면 다음과 같다.

가. 초등학교

(1) 수와 연산

초등학교의 수와 연산 영역에서 가장 큰 변화로는 자연수 및 분수의 지도 시기를 재조정하고, 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강화한 점을 들 수 있다. 또한 사칙연산의 계산 결과를 어림한 후 어림한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다.

(2) 도형

2007 개정 교육과정에서 평면도형의 각 구성 요소에 대한 학습 후 도형의 언어적이고 명시적인 정의를 통해서 도형 개념을 도입하는 방식을 대신하여, 2009 개정 교육과정에서는 도형의 모양 인식 및 분류 활동을 토대로 하여 도형 및 그 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 더불어 이름을 먼저 학습한 후 점차 분석적, 명시적으로 도형의 개념 및 성질을 학습할 기회를 제공하였다. 한편 2007 개정 교육과정에서 분산되어 지도되었던 각, 삼각형, 사각형 관련 단원의 내용들을 각각 통합적으로 취급함으로써 학생들의 개념 구조의 체계적 형성을 돕고자 하였다. 또 초등학생의 인지 수준에 적합하지 않은 내용으로 간주되는 사각형의 포함 관계나 수학 학습의 계열상 초등 수학에서 다루는 것이 적합하지 않은 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 및 회전체를 삭제하였다.

⑶ 측정

측정 영역은 실생활과 밀접하게 관련되어 있으므로, 실생활과 관련지어 측정의 필요성을 인식하게 하고 측정 및 어림 활동을 통하여 양감을 기르는 데 중점을 두었다. 측정 영역에서의 계산은 측정 결과 간의 단순 연산이나 단위 환산은 축소하고, 측정의 관점에 중점을 두도록 하였다. 길이, 무게, 들이, 넓이의 양감을 기르는 데 중점을 두고, 측정 영역에서 합과 차를 계산하거나 단순한 단위 환산 연습은 약화하였으며, 들이 및 무게의 덧셈과 뺄셈은 실생활 문제 상황을 통하여 다루도록 하였다. 또한 부피의 양감을 강조하고 부피의 단위 사이의 환산이나 부피와 들이의 단위 환산은 삭제하여 학습량을 감축하였다.

⑷ 규칙성

2007 개정 교육과정에서 '규칙성과 문제 해결' 영역은 주로 문제 해결 방법, 규칙 찾기, 비와 비율, 비례 등을 포괄하였다. 2009 개정 교육과정에서는 '문제 해결'이 다른 영역의 내용적 성격과 달리 과정적 성격을 띠고 있으며 수학 교과 전 영역에서 고루 지도되어야 한다는 취지에서 '문제 해결' 부분은 전 영역으로 재편하고, 영역명은 '규칙성'으로 설정하였다. 규칙성 영역의 주요 변화로는 각 학년에 분산되어 있던 규칙 찾기 활동을 통합하고 탐구 활동 및 놀이를 활용하고자 하였다. 비율 중 할, 푼, 리나 연비는 그 중요도 및 쓰임새를 재고하여 삭제하였으며, 방정식은 중학교의 학습 내용과 중복하여 다루어지고 있으므로 초등학교에서는 삭제하고 중학교의 '일차방정식'으로 이동 통합함으로써 학습량을 감축하였다.

⑸ 확률과 통계

확률과 통계 영역에서의 가장 큰 변화는 줄기와 잎 그림, 경우의 수와 확률을 중학교로 이동 통합하고, 초등학교에 가능성의 개념을 도입한 것이다. 줄기와 잎 그림은 학습량 감축 및 학문 내에서의 개념 간 관련성을 고려하여 중학교의 통계 영역과 의미 있게 연결되도록 상향 이동하였다. 또한 경우의 수와 확률은 초등학교와 중학교에서 내용 중복 및 학습량 감축의 취지에서 중학교로 이동 통합하였고, 확률 개념의 계열적 구성이라는 측면에서 가능성이라는 개념을 초등학교 5～6학년군에 도입하였다.

이상으로 초등학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 시간의 덧셈과 뺄셈 약화 (3～4학년군)
- 사각형의 포함 관계 삭제 (3～4학년군)
- 할, 푼, 리 삭제 (5～6학년군)
- 등식의 성질 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 방정식 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 연비의 삭제 (5～6학년군)
- 겉넓이와 부피 통합 및 부피와 들이 사이의 관계 삭제 (5～6학년군)
- 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 삭제 (5～6학년군)
- 회전체 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 가능성 도입 및 확률 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 줄기와 잎 그림 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동

나. 중학교

⑴ 수와 연산

수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념으로서 수의 개념과 연산에 대한 이해는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 따라서 수와 연산 영역은 수의 개념과 연산에 대한 이해를 높이고 이후의 학습과 연계될 수 있는 필수적인 요소만을 선정하였다. 또한 집합은 고등학교로 상향 이동하였고, 근삿값은 삭제하였다.

⑵ 문자와 식

문자는 생활 주변이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 간단하게 표현하고 의사소통을 원활히 할 수 있게 해준다. 문자와 식 영역에서는 학생들이 자연스럽게 문자를 사용할 수 있도록 문자와 식을 실생활 문제 해결의 맥

락에서 다루게 하고, 수학이 현실 세계의 상황과 밀접한 관련이 있다는 것을 학생들에게 인식시켜야 한다. 이를 위해 방정식, 부등식과 그의 활용은 독립적인 중영역이 아닌 하나의 영역에서 통합하여 학습하도록 구성하였다. 또한 방정식과 부등식의 학습에 있어서 용어 사용에 대한 학습자의 부담을 고려하여 필요 이상의 용어 정의를 제한하였다.

(3) 함수

2007 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육과학기술부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직하다. 이에 2009 개정 교육과정에서는 함수 개념의 도입 방법의 변화를 도모하고, 정의역, 공역, 치역 등의 용어를 삭제하였다.

(4) 확률과 통계

확률과 통계는 중학교 수학에서 실생활과 관련성이 매우 깊은 영역이다. 중학교에서는 자료의 정리와 표, 그래프의 해석, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계, 확률의 계산, 대푯값과 산포도의 내용이 다루어진다. 본 개정안에서는 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수 · 학습 방법의 변화를 도모하였다. 2007 개정 교육과정과 달라진 내용은 학습량 감축을 위해 '누적도수의 분포'를 삭제하고, 탐색적 자료 분석의 한 방법인 '줄기와 잎 그림'을 도수분포와 그래프 학습 내용에 추가한 것이다.

(5) 기하

수학 교육에서 증명은 전통적으로 학생들에게 꼭 가르쳐야 하는 주요 대상으로 인식되어 왔다(NCTM, 2000). 그러나 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는 데 어려움을 느끼기 때문이다.

2009 개정 교육과정에서 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서 학생 활동을 중시하고 증명 대신 추측 활동을 강조한다. 이를 위하여 다음 표에서와 같이 2009 개정 교육과정에서는 '증명할 수 있다' 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

〈표 Ⅱ-2〉 '추측과 정당화' 강조에 대한 내용 비교

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
5 삼각형과 사각형의 성질(2학년) ① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다. ② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.	5 삼각형과 사각형의 성질 ① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 제시한 '이해하고 설명할 수 있다'는 '정당화(justification)'를 의미하는데, 이는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 말한다. 이 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다. 인식론의 관점에서 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 대변할 수 있다(http://www.wikipedia.org). 이때 수학적 증명은 논리적 연역법을 의미한다. 기하 교육에서의 증명은 기하 지식을 증거로 삼으며 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다(신이섭 외, 2011).

정당화를 유도하는 교수 방법은 다양한 형태로 나타날 수 있다. 예를 들면 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제 해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육은 기본적으로 학생의 활동에 의존한다. 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다.

이와 같이 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

한마디로 중학교의 기하 영역에서는 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 '정당화' 수준의 교육을 지향하고자 하였다. 또한 2007 개정 교육과정의 단발성 주제와 상대적으로 의미가 적은 용어들을 삭제하고, '원과 직선', '원주각' 두 영역을 원의 성질로 묶어 하나의 영역으로 내용을 축소시켜 다루는 등, 전체적으로 학습량을 경감하였다.

이상으로 중학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 집합 삭제
- 근삿값 삭제
- 십진법과 이진법 삭제
- 수학 개념과 실생활 활용의 통합
- 방정식 관련 용어 약화
- 함수 개념 도입 방법의 변화
- 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
- 통계 교수 · 학습 방법의 변화
- 누적도수의 분포 삭제
- 줄기와 잎 그림 추가
- 정당화에 의한 기하 교육 강조
- 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소
- 원의 성질 내용 축소

다. 고등학교

(1) 일반 과목

고등학교의 일반 과목에 해당하는 6개 교과목의 주요 변화 내용을 개략적으로 살펴보면 다음과 같다.

■ 수학 Ⅰ
- 실수 삭제
- 복소수와 이차방정식의 연계 강화
- 다항식의 약수와 배수 약화
- 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

■ 수학 Ⅱ
- 집합 내용 통합
- 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
- 함수 영역의 내용 약화
- 수열의 약화 및 이동
- 지수와 로그 내용 약화 및 이동

■ 확률과 통계
- 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
- 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
- 공학적 도구의 활용 강조

■ 미적분 I

- 수열의 극한의 이동 통합
- 롤의 정리와 평균값 정리 이동
- 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제

■ 미적분 II

- 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
- 삼각함수 통합 및 약화
- 미분법 및 적분법의 내용 조정

■ 기하와 벡터

- 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
- 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

(2) 기초 및 심화 과목

고등학교의 경우에는 일반 과목에 해당하는 6개 교과목 이외에, 기본 과목인 「기초 수학」과 심화 과목인 「고급 수학 I」, 「고급 수학 II」가 새로 신설되었다.

「기초 수학」은 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다.

「기초 수학」의 내용은 '수와 식의 계산', '방정식과 함수', '피타고라스 정리와 삼각비'로 구성된다. '수와 식의 계산' 영역에서는 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산을, '방정식과 함수' 영역에서는 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수를, '피타고라스 정리와 삼각비' 영역에서는 피타고라스 정리, 삼각비를 다룬다.

「고급 수학 I」과 「고급 수학 II」는 심화 과목으로 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제 해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목이다. 「고급 수학 I」과 「고급 수학 II」는 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공한다.

「고급 수학 I」의 내용은 '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을, '그래프' 영역에서는 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용을 다룬다. 「고급 수학 II」의 내용은 '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성된다. '복소수와 극좌표' 영역에서는 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식을, '미적분의 활용' 영역에서는 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용을, '편미분' 영역에서는 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용을 다룬다.

04 내용 체계

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목(초등학교 1학년~중학교 3학년)의 내용 체계는 다음과 같다.

학교급 / 학년군 / 영역	초등학교		
	1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
수와 연산	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈 • 나눗셈 • 자연수의 혼합 계산 • 분수 • 소수 • 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 분수의 덧셈과 뺄셈 • 분수의 곱셈과 나눗셈 • 소수의 곱셈과 나눗셈 • 분수와 소수
도형	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 도형의 기초 • 평면도형의 이동 • 원의 구성 요소 • 여러 가지 삼각형 • 여러 가지 사각형 • 다각형	• 합동과 대칭 • 직육면체와 정육면체 • 각기둥과 각뿔 • 원기둥과 원뿔 • 입체도형의 공간감각
측정	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 시간 • 길이 • 들이 • 무게 • 각도 • 어림하기(반올림, 올림, 버림) • 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)	• 평면도형의 둘레와 넓이 • 무게와 넓이의 여러 가지 단위 • 원주율과 원의 넓이 • 겉넓이와 부피
규칙성	• 규칙 찾기	• 규칙 찾기 • 규칙과 대응	• 비와 비율 • 비례식과 비례배분 • 정비례와 반비례
확률과 통계	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기	• 자료의 정리 • 막대그래프와 꺾은선그래프	• 가능성과 평균 • 자료의 표현 • 비율그래프(띠그래프, 원그래프)

영역 \ 학교급 / 학년군	중학교		
	1~3학년군		
수와 연산	• 소인수분해 • 최대공약수, 최소공배수 • 정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산	• 순환소수 • 유리수와 순환소수의 관계	• 제곱근의 뜻과 성질 • 무리수 • 실수의 대소 관계 • 근호를 포함한 식의 사칙계산
문자와 식	• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 덧셈과 뺄셈 • 일차방정식	• 지수법칙 • 다항식의 덧셈과 뺄셈 • 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 • 다항식의 나눗셈 • 등식의 변형 • 연립일차방정식 • 부등식의 성질과 일차부등식 • 연립일차부등식	• 인수분해 • 이차방정식
함수	• 함수의 개념 • 순서쌍과 좌표 • 함수의 그래프	• 일차함수의 의미와 그래프 • 일차함수의 활용 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 이차함수의 의미 • 이차함수의 그래프의 성질
확률과 통계	• 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 • 도수분포표에서의 평균 • 상대도수의 분포	• 경우의 수 • 확률의 뜻과 기본 성질 • 확률의 계산	• 중앙값, 최빈값, 평균 • 분산, 표준편차
기하	• 점, 선, 면, 각 • 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계 • 평행선의 성질 • 삼각형의 작도 • 삼각형의 합동조건 • 다각형의 성질 • 부채꼴에서 중심각과 호의 관계 • 부채꼴에서 호의 길이와 넓이 • 다면체, 회전체의 성질 • 입체도형의 겉넓이와 부피	• 이등변삼각형의 성질 • 삼각형의 외심, 내심 • 사각형의 성질 • 닮은 도형의 성질 • 삼각형의 닮음조건 • 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 • 닮은 도형의 성질 활용	• 피타고라스 정리 • 삼각비 • 원의 현, 접선에 대한 성질 • 원주각의 성질

Ⅲ. 수학 교과서의 개발 동향

01 구성주의와 수학 교과서

구성주의의 수학 교육관은 '학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성'이라는 교육관에 기초한다고 볼 수 있다. 구성주의를 수학 교육의 실제에 적용하고자 하는 사람들은 수학적 지식이 외부의 강화에 의하여 학습자에게 전달될 수 있다는 견해에 동의하지 않는다. 즉, 구성주의자들은 지식이 학습자의 내면 세계에서 적절한 경험을 통해 자주적으로 구성된다고 생각하고 있으며, 이것은 곧 학생들이 수학 지식을 수동적으로 받아들임으로써 획득하는 것이 아니라 각자 능동적으로 재발명해 나감으로써 (수학 지식을) 구성하는 것을 뜻한다. 따라서 구성주의적 입장을 취하는 수학 교육 관계자들은 전통적인 방식의 수학 교육을 개선할 수 있는 하나의 대안으로서 구성주의적 수학 교육을 제안하고 있는 것이다. 특히 사회적 구성주의자들은 이제껏 전통주의자들의 주된 관심사였던 수학 지식의 실제에 대한 인식론적인 논의보다는 수학 지식에 대한 구성주의적 교수-학습의 가능성에 관심을 두었다.

'구성주의'는 그 말 자체가 광범위한 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라 '구성'이라는 용어도 모호하기 때문에 이를 해석하는 견해가 다양하다. 그러나 현재 우리나라 수학 교과서에는 교구 및 소프트웨어 등의 조작 활동의 필요성, 개인별 능력 차를 고려한 수준별 교재의 필요성, 의사소통을 고려한 교과서 개발의 필요성 등의 반영이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구 사항은 조작적 구성주의자로 불리는 피아제의 발생적 인식론의 중심 아이디어인 '조작', 급진적 구성주의자들이 지식의 진리 자체에 관한 논의를 거부하고 초미의 관심사로 여긴 '개인 중심적' 구성이나 '생장 원리', 사회적 구성주의자들이 객관성을 사회성으로 대치하면서 도입한 사회적 합의의 수단인 '의사소통'을 교재 구성에 반영하자는 생각과 크게 다르지 않다.

02 구성주의적 수학과 교수-학습 원리의 반영

수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습 원리는 다음과 같다.

가. 교과서에 학생 중심적 개별화의 원리 반영

구성주의의 기본적인 주장인 지식의 자주적 구성의 원리는 학생들로 하여금 갈등 국면에 대처하여 동화와 조절의 메커니즘에 따라 반영적 추상화의 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나가는 과정을 보여 주고 있다. 이것은 질문을 중심으로 하는 상호 작용적인 추측 및 논박에 의한 수학 교수-학습의 바탕(모델)이 된다. 구성주의는 지식의 자주적 구성을 그 근본 원리로 하고 있지만, 교수-학습의 차원에서 논의되는 지식은 '주관 독립적'인 의미에서의 객관적 지식이 아니라, 규약과 협정 등의 수단을 통하여 '공통 주관적'인 의미에서의 객관성을 가지게 된다.

따라서 수학 교육학적 구성주의에서 취하고자 하는 관점은 바로 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 것이며, 이러한 관점은 학생 자신에 의한 지식의 능동적인 재발명을 목표로 하는 오늘날의 수학 교육에서 요구되고 있는 관점과 일치한다고 볼 수 있다. 이를 위해서는 학생 중심적인 개별화 수업이 가능하도록 수학적 과제가 제시되어야 할 것이다. 학생이 스스로 생각하고 해결 전략을 궁리해 낼 수 있는 기회를 부여함으로써 학습자 자신이 다양한 사고를 할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

나. 교과서에 질문 중심적 상호 작용의 원리 반영

학교 밖의 사회나 교사들은 지금까지 대체적으로 수학 지식의 가치를 인정하고 수학 교육의 당위성을 이해해 왔을지 모르지만, 아마도 학생들은 그러한 당위성을 이해하지 못하였을 것이고, 결과적으로 수학을 의미 없는 것으로 받아들일 수밖에 없었을 것이다. 그렇다면 유효한 수학 교육이 이루어지기 위해서는 학생들이 배워야 할 수학, 즉 학교 수학이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 함은 물론 수학 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 학생들의 적극적 의지가 수반되어야 한다. 결국 이를 교과서에 반영하는 것은 질문 중심의 상호 학습이 일어날 수 있도록 과제를 제시하는 형태가 될 것이다. 구성주의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용을 매우 중요시한다. 즉, 교사가 적절한 질문으로 학생의 응답을 유도해 냄으로써 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다. 따라서 의미 지향적인 활동 수업이 이루어지도록 교과서가 구성되어야 할 것이다.

다. 교과서에 의미 지향적 활동의 원리 반영

위에서 살펴본 수학 지식의 자주적인 구성이 교수-학습에서의 학생의 의미 지향적 활동이나 교사의 적절한 질문만으로 가능한 것은 아니다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식 구성을 하는 학습자 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 불가능하다. 다시 말해 효율적인 수학 교수-학습을 위해서는 학습자의 내면화된 자주적 활동이 학생의 교수-학습 활동에의 참여 의지 및 교사의 적절한 질문과 더불어 반드시 필요하다.

이때 이 내면화된 자주적 활동의 메커니즘을 구성주의가 설명해 주고 있는바, 이것이 바로 반영적 추상화이다. 그렇다면 학습자가 반영적 추상화의 과정을 경험할 수 있도록 교재가 구성되어야 함은 물론이다. 부연 설명하면, 교과서는 여러 가지 활동을 통하여 익힌 의미 있는 경험을 반성하여 자기 자신의 지식을 구성할 수 있도록 구현되어야 한다는 것이다.

03 구성주의적 관점에서의 교과서 개발 방향

위에서 살펴본 구성주의적 관점에 기초한 바람직한 수학 교과서를 구현하기 위하여 고려되어야 할 사항은 다음과 같다.

가. 교과서 저자의 철학

교과서에는 교과서 저자 나름대로의 철학이 배어 있어야 한다. 지금까지의 교과서에 제시된 교육과정상의 내용들은 누구나 합의할 수 있는 객관적이고 보편적인 것만을 다루도록 하는 것이 불문율이었다. 그러나 이제는 절대적 진리처럼 내용이 전개되던 교과서의 역할과 권위보다 학생들의 주체적인 사고의 참여를 촉발시킬 수 있는 '저자'의 역할과 권위를 우위에 두어야 할 것이다. 이때 교과서 저자는 자신이 왜 그러한 주제에 관심을 가지는지, 그것이 왜 중요한 것인지를 드러내고 어떻게 그 주제를 전개해 나아가는지 등에 관한 자신의 철학과 견해를 피력하고, 또 다른 견해들과의 차이를 드러내어 맥락화시킬 수 있도록 한다.

나. 안내형 교과서

전통주의적 입장에서의 교과서 방식은 학습 목표에서 추출된 세부적 요소들을 논리 정연하게 제시하는 '제시형 교과서'라고 할 수 있으며, 구성주의적 관점에서 보는 교과서는 교과서에 제시된 내용들에 학습자와의 실질적인 상호 작용을 통해서 그 의미가 발현될 수 있도록 소재적 가치를 부여하는 '안내형 교과서'라고 할 수 있다. 즉, 안내형 교과서는 학습하기를 기대하는 내용들을 직접 제시하는 대신 학습자로 하여금 구조적 변화를 경험하도록 안내하는 역할을 하는 내용으로 교과서를 구성하는 방식

을 취한다고 할 수 있다. 안내형 교과서는 개인적인 관심, 해석, 활동 등 학습자의 주체적인 역할에 큰 비중을 두고 학습자의 적극적이고 당사자적인 관여를 요청하고 있다.

이홍우(1997)는 "교과를 가르치되 학생의 경험과 의미 있게 관련되도록 가르쳐야 한다."라고 주장하면서 학생들은 자신이 배우는 다른 내용들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 뿐만 아니라 학교에서 배운 것을 다른 상황에 쉽게 적용할 수 있어야 한다고 하였다. 그러기 위해서는 날로 팽창하는 지식을 모두 가르치려고 할 것이 아니라, 그중에서 기본 또는 핵심이 되는 것만을 골라 가르쳐야 하며, 이와 같이 기본이나 핵심이 되는 것을 '지식의 구조'라고 명명하였다. 즉, 지식의 구조를 알면 팽창하는 모든 지식을 하나씩 따로따로 배우지 않더라도 그 기본적인 것에 비추어서 나머지를 쉽게 이해할 수 있다고 본 것이다.

다. 관계적 이해를 도모하는 교과서

기존의 교과서는 지극히 제한된 지면에 방대한 내용을 소개해야 하기 때문에 가능한 한 핵심적이고 확실한 원리나 개념들을 중심으로 간결하고 함축적인 방식으로 제시하고 있다. 이와 같이 주요 주제나 개념들을 피상적으로 제시하는 방식은 교사와 학생들로 하여금 '관계적 이해'를 도모하기보다는 수학적 언어와 기호를 이용하여 외우고 재생해 내는 데 급급하게 하는 '도구적 지식'을 가지도록 한다.

도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 보다 적은 지식이 필요하기 때문에 학습 결과에 대한 보상이 즉각적이고 명백하다. 그러나 이 방식은 수학의 전체 영역에 서로 연결되는 기초적인 개념을 교수-학습하기보다는 서로 분리하여 각각의 주제를 교수-학습하는 것이기 때문에 기대하는 학습이 이루어진다고 보기 어려울 것이다.

반면 관계적 이해를 통한 학습은 마치 나무가 영양분을 찾아서 뿌리를 뻗어 나가거나 동물이 먹이를 찾아 새로운 지역을 탐험하는 것과 같이 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하는 것에 비유될 수 있다. 그러므로 관계적 이해를 촉구하기 위해서는, 즉 핵심적인 원리나 개념을 습득하게 하기 위해서는 그러한 내용을 얻을 수 있도록 해당 절차를 안내(유도)하는 방식으로 교과서를 구성하도록 한다.

라. 질문 중심의 개념 전개

기존의 교과서는 수학적 지식을 대부분 완성된 형태로 제시하는 하향식 전개 방식을 택하고 있다. 또한 단원의 마무리 단계는 기본 문제, 연습 문제, 종합 문제, 심화 문제 등으로 구성되어 있다. 따라서 계산이나 풀이 형식의 정착을 위해 학생들이 풀어야 할 문제들이 교과서에 산적해 있다. 이런 상황에서 학생들은 문제 풀이를 위한 반복 훈련을 하는 데 주력하게 되고, 교사 역시 이러한 기능을 정착시키기 위한 내용 전개로 수업을 이끌어 가는 경향이 있다.

이를 개선하기 위해서는 현재 교과서에 수록되어 있는 반복 연습형의 문제들을 줄이고 그 대신 수학적 개념과 문제 해결의 절차를 이해시키는 데 주력함으로써, 학생들에게 '수학을 한다.'는 것이 이미 배운 개념이나 공식, 절차를 바로 적용해서 연습 문제를 푸는 것이 전부가 아니라는 사실을 인식시켜야 할 것이다.

마. 수학적 유용성 강조

수학은 실제로 모든 학문의 기초로서 우리의 일상생활뿐만 아니라 공학, 의학, 경제, 사회, 문화 등 여타 분야에 지대한 영향을 미치고 있음에도 불구하고 이에 대한 인식이 부족하다. 지금까지의 교과서의 내용 및 그 전개 방식을 살펴보면 교사나 학습자로 하여금 여러 단원의 내용들이 서로 독립된 것이라고 오판하기 쉽게 되어 있다. 따라서 앞으로의 교수-학습 자료에는 단원 간의 내용 연계성을 강조함으로써 학생들 각자의 스키마를 구성하는 데 도움이 되도록 해야 할 것이다. 특히 교과서에

수학의 활용성에 대한 구체적인 내용을 단원별로 또는 전체적으로 기술하고, 과학이나 미술 등 다른 교과목과의 연결성을 찾는 내용도 포함시켜 학생들이 수학의 중요성을 알도록 해야 할 것이다.

바. 다양한 교구 및 도구 활용

수학 수업에서의 교구 사용은 추상적인 수학적 개념을 구체물로 모델링한다는 데 가장 큰 의의가 있으며 이를 통해서 학생들은 수학적 절차나 공식보다는 그 이면에 내재되어 있는 의미를 알 수 있게 된다. 또 교구는 학생들이 직접 만지면서 다루기 때문에 학생 중심적인 개별화 수업을 가능하게 할 뿐만 아니라 2~4명의 소집단 학습을 통하여 집단별 그리고 전체 토론이 이루어짐으로써 반영적 추상화를 경험할 수 있게 한다. 우리나라의 수학 교육과정은 컴퓨터와 계산기의 사용을 교사나 학교의 재량에 따라 사용하도록 권장하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서는 이들을 수업에 언제, 어떻게 활용해야 하는지를 잘 모르고 있는 실정이다. 그러므로 교수-학습 자료에 컴퓨터나 계산기 등의 활용 지침 및 방안에 대한 자세한 설명이 수록되어야 할 것이다.

04 수준별 수업의 운영

가. 수준별 수업의 운영 방식

수학과의 경우 수준별 수업은 1996년부터 현장에서 서서히 실시되기 시작하여 제7차 단계형 수준별 교육과정의 취지에 따라 더욱 활성화되었다. 수준별 수업과 예전의 단계형 수준별 교육과정의 운영은 그 접근 방법이 다르다고 할 수 있겠으나, 학생의 수준에 적합한 교육 내용을 다루고자 하는 점에서 기본 취지는 동일한 것으로 볼 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 기본 과정과 심화 과정의 학습 내용이 명료히 구분되어 제시되어 있지 않지만, 수준별로 개념 설명의 접근 방법을 차별화하고 해당 문제들의 난이도를 조정한다면 분단 수업이나 이동 수업을 진행하기가 용이할 것이다. 이렇듯 수준별 수업은 전통적으로 해 왔던 일제 수업의 폐단을 줄이고, 교사들의 다양한 교수–학습 자료 개발을 활성화시키며 학습자 주도의 학습의 중요성을 인식시키는 등 현장 교육을 긍정적으로 이끌 것이다.

이렇듯 수준별 수업은 학생의 성취 수준에 따라 수준별로 반을 편성하여 동일한 학습 진도 내에서 학습 심도를 달리하여 지도하는 '동진도–이심도' 방식을 취하는 것이 바람직하다. 이에 따라 수준별로 적합한 수업을 진행하기 위해서는 기본적으로 교육과정에 제시된 기본 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 각 수준별로 다루어야 할 학습 내용의 정도와 방법을 차별화하도록 한다. 〈표 Ⅲ-1〉 참조 이때 한 차시의 수업 내용을 기준으로 하거나 또는 교과서의 한 소단원을 기준으로 하여도 무방하다.

〈표 Ⅲ-1〉 수준별 수업 운영 방식

반 수준	수준별 수업 과정		
상	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	발전 과제 해결
중	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	단순 과제 해결
하	내용 수준	기본 내용	
	수업 방식	선수 학습 내용의 이해 → 개념 이해 → 단순 과제 해결	

나. 수준별 수업의 효율적 운영 방안

수준별 수업을 효율적으로 운영하기 위해서는 다음 사항에 유의해야 할 것이다.

(1) 학습자의 눈높이

개인차에 따른 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하여 적절히 운영하여야 한다. 즉, 수준별 수업 운영을 위한 노력으로 우선 각 수준에 따라 수업 내용, 수업 진도 등이 적절한지 검토하여야 한다. 이때 무엇보다도 중요한 것은 수준별 수업을 위한 수업 내용, 수업 진도 등이 교사 또는 수학 교육 관련 전문가의 눈높이가 아닌 '학습자'의 눈높이에 맞춰져야 한다는 점이다.

(2) 내용의 차별화

수준별 개념에 입각한 교수-학습의 차별화는 수준에 따른 '학습 내용의 차별화'를 의미하는 것으로, '학습 내용의 차별화'란 각 수준별로 다루는 학습 내용 그 자체의 차별화를 말하는 것이다. 그런데 2009 개정 교육과정에는 학생들의 수준에 상관없이 모든 학생들이 공통으로 다루어야 하는 내용이 명시되어 있다. 그러므로 '학습 내용의 차별화'란 현행 교육과정에 기초한 공통 필수 격의 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 수준별로 중점을 두어 다루어야 할 '주요 내용'을 차별화하는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 '문항의 난이도'뿐만 아니라 각 수준에 적합한 '내용의 차별화'에 기초를 둔 수준별 학습 자료가 개발되어야 할 것이다.

(3) 귀납적 학습법

수학 수업을 전개해 나가는 데 있어서 일반적으로는 개념 및 원리를 설명하고 이에 따른 예제를 푼 뒤 반복 연습 문제를 푸는 '연역적 방식'을 취하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 예 또는 예제들을 통하여 그에 부합되는 학습 내용들을 체계적으로 정리하는 '귀납적 방식'을 취함으로써 학습의 이해를 보다 높일 수도 있다. 특히 학습 결손이 명백히 드러난 학생들에게 지극히 한정된 몇몇 문제의 풀이로 학습 내용을 이해시키기는 어렵다. 그러므로 각 수준별로 구체적인 예 또는 예제를 통하여 그에 부합되는 학습 내용(개념, 원리, 법칙 등)을 정리해 나가는 귀납적 방식의 수업도 병행해야 할 것이다.

(4) 소집단별 수행 과제 활동

수준별 능력에 따른 과제(open-response tasks)를 제시하여 학생들이 과제를 수행하면서 어떤 수학적 지식을 사용하고 또 어떻게 접근해 나가야 하는지 등에 관하여 스스로 탐색해 볼 수 있도록 해야 한다. 그러므로 45분의 수업 시간에 모든 활동이 이루어져야 한다는 제한된 시각에서 벗어나 수업 이외의 시간을 활용하여 좀 더 발전 지향적인 장·단기 과제를 다루는 것이 바람직할 것이다. 특히 소집단별 수행 과제 활동은 본인이 속한 집단의 구성원들과 그 결과를 기록하여 발표할 수 있는 '의사소통' 능력의 발휘가 가능하므로, 이를 통하여 다양한 자료를 수집, 표현, 분석, 해석함으로써 과제를 성공적으로 수행할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 수학적 문제 해결

01 문제 해결의 의미

20세기 초에 이루어진 문제 해결에 대한 논의는 1960년대의 '새수학' 운동과 1970년대의 '기본으로 돌아가기' 운동과 같은 과정을 거치면서 크게 부각되지는 못하다가, 1980년대에 들어 기초 기능으로서의 문제 해결력에 대한 관심이 높아지기 시작하면서 부흥기를 맞게 된다. 미국의 수학교사협의회인 NCTM(1980)이 'An Agenda for Action'에서 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 함을 선언한 이래 1980년대는 문제 해결의 시대라고 할 만큼 이에 대한 다양하고 활발한 논의가 이루어졌다(황혜정 외, 2012, 재인용).

이 같은 문제 해결의 조류는 우리나라의 수학 교육과정에도 서서히 등장하였다. 제3차 교육과정에서 급격하게 도입되었던 수학 교육 현대화의 내용은 제4차 교육과정에서 경감되고 정선되면서 지나치게 어려운 내용보다는 수학의 기초적 기능을 배양하고 문제 해결력을 신장시키는 데 관심을 가지게 되었다. 이어 제5차 수학과 교육과정에서도 수학 내용을 정선하면서 문제 해결력의 신장을 강조하였으며, 제6차와 제7차 교육과정에서는 문제 해결력의 신장을 위한 지도 내용, 전략, 방법 등을 구체적으로 제시하여 문제 해결력의 지도가 보다 적극성을 띠게 되었다.

또한 2007 개정 교육과정에 이어, 2009 개정 교육과정 문서의 모든 교과목의 '교수–학습 방법' 부분에도 문제 해결에 관한 다음과 같은 내용이 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011).

수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수–학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 문제 해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
(2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
(3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
(4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

02 문제의 의미와 유형

가. 문제의 의미

문제 해결에서의 '문제'는 해결의 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 문제보다는, 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제 해결 과정에서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다. 예를 들어 문제 해결이라고 하면 이차방정식의 근의 공식을 배운 후에 근의 공식을 적용하여 주어진 이차방정식의 해를 구하는 것과 같이 배운 내용을 단순하게 적용하여 해를 구하는 연습 문제를 떠올릴지도 모른다. 그러나 최근 수학 교육에서 중요시되는 문제 해결은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준의 것이 아니다. 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않은 것이다. 문제의 해결에 이르는 알고리즘이나 풀이 방법이 이미 주어져 있거나 알려져 있다면 그 문제는 진정한 의미의 문제라고 보기 어렵다.

나. 문제의 유형

문제의 유형을 분류하는 데에는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 '정형 문제'와 '비정형 문제'로 구분하는 것이다.

■ 정형 문제(routine problems)

이미 제시된 알고리즘을 사용한다. 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제가 해당된다.

■ 비정형 문제(non-routine problems)

문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제 해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 고안하여 풀어야 하는 문제를 말한다.

03 문제 해결 과정

폴리아(Pólya, 1957)는 수학적 문제 해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하여 제시하고 있다.

다음 표는 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 적절한 질문과 권고의 예이다.

〈표 Ⅳ-1〉 문제 해결 단계별 질문의 예

문제 해결 과정		해당 질문
문제 이해	문제를 이해하는 단계로, 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하며 문제를 분석하는 단계이다.	• 미지인 것, 주어진 것은 무엇인가? • 자료는 무엇인가? • 조건은 무엇인가? • 그림을 그려 보고, 적절한 기호를 붙여라.
계획 작성	문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제 해결 전략을 이용하게 된다. 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 한다.	• 전에 그 문제를 본 적이 있는가? • 친숙한 문제 중에서 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. • 유사한 문제는? • 문제를 푸는 데 필요한 조건을 모두 사용했는가?
계획 실행	해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.	• 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라. • 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? • 각 단계가 옳다는 것을 설명할 수 있는가?
반성	문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지 알아본 뒤, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 비교해 본다.	• 결과를 점검할 수 있는가? • 풀이 과정을 점검할 수 있는가? • 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? • 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가?

한편 문제 해결 전략이란 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크룰릭과 루드닉(Krulick, Rudnick, 1984)은 문제 해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제 해결 전략을 구분하였다.

04 문제 해결의 예

다음에 주어진 문제를 폴리아(Pólya, 1957)의 문제 해결 4단계를 따라 풀어 보면 다음과 같다.

> ㉠ 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라고 하면, 가로의 길이는 얼마인가?

① 문제의 이해

문제에서 구하려는 것은 가로의 길이이며, 문제에서 주어진 것은 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라는 사실이다.

② 계획 세우기

직사각형의 세로의 길이를 x라고 하면, 가로의 길이는 $2.5x$가 된다. 직사각형의 둘레의 길이는 네 변의 길이의 합과 같으므로 $x+2.5x+x+2.5x=35$

③ 계획의 실행

방정식을 풀면 $7x=35$, 즉 $x=5$이므로 가로의 길이는 $2.5\times5=12.5$(cm)이다.

④ 풀이의 반성

풀이 과정을 검토하여 잘못된 곳은 없는지 확인한다. 또 다른 방법으로도 문제를 해결할 수 있는지 조사한다. 이 문제의 경우 다음과 같이 풀 수도 있다.

가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배이므로

$$(\text{가로의 길이}):(\text{세로의 길이})=2.5:1=5:2$$

이고, 둘레의 길이가 35 cm이므로

$$(\text{가로의 길이})+(\text{세로의 길이})=\frac{35}{2}=17.5$$

따라서 가로의 길이는 $17.5\times\frac{5}{7}=12.5$(cm)이다.

㉠와 유사한 문제를 다음과 같이 만들어 풀어 본다.

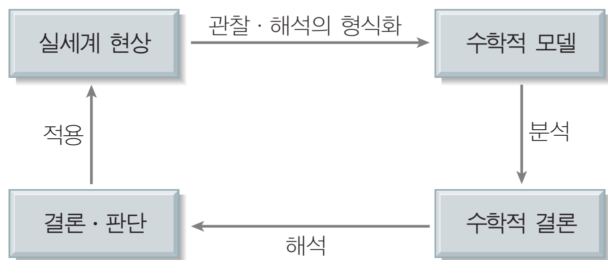
> 둘레의 길이가 35 cm인 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 3 cm 더 길 때, 가로의 길이를 구하여라.

05 문제 해결 과정과 수학적 모델링

가. 문제 해결 과정과 수학적 모델링

수학적 모델링은 문제 해결의 특징을 지니지만, 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 한다는 점에서 문제 해결과 차별화된다(NCTM, 1991). 즉, 수학적 모델링은 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 이루는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하는 수학화의 과정을 중시한다. 특히 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안하여 내면화하거나 해결해 가는 과정은 모델링 과정의 전이가 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 또한 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상생활과의 연결성을 강조한다. 이것은 수학 학습의 초점이 완결된 지식의 획득이 아니라 지속적인 모델의 구안과 수정을 통한 본 개념의 이해에 맞추어져야 함을 의미한다.

일상생활에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에서 제기된 문제를 해결할 수 있다. 수학적으로 의미 있는 모델을 구성하는 모델링 과정은 4단계의 순환 과정으로 구성되며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

NCTM(1991)의 '*Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 설명하고 있다.

① 현상을 관찰하여 그 현상에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고, 문제에 중요한 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
② 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
③ 적절한 수학적 분석을 구축한 모델에 적용한다.
④ 결과를 얻어 내고 그 결과를 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

요약하면 수학적 모델링은 실세계의 여러 현상을 수학적인 수단에 의해 정리하고 조직하는 활동으로, 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악, 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 활동 과정이다. 이러한 수학적 모델링을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 이미 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제 해결 과정에 강력한 수단이 된다. 따라서 수학적 모델링을 통하여 수학 교육에서 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다(Niss, 1989).

- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어지고 있는 것임을 이해한다.

나. 수학적 모델링의 예

연못에 있는 물고기의 수를 조사하는 다음 상황을 통해 수학적 모델링을 살펴보자.

(1) 문제 상황

이 게임의 목적은 연못에 있는 물고기의 수를 알아내는 것이다. 이러한 정보는 연못을 관리하고 물고기에 대해 파악하는 데 도움을 줄 것이다. 연못에 있는 물고기의 수를 어떻게 추측할 수 있겠는가?

(2) 필요한 수학 개념

비와 비율

(3) 모델

우리는 연못에 있는 물고기의 수를 알 수 없으므로, 물고기의 수를 n마리라고 하자.

우선 몇 마리의 물고기를 잡아 물고기가 다치지 않게 꼬리에 표를 달고, 다시 그 물고기들을 연못에 놓아준다고 가정하자. n마리 중에서 p마리를 잡아 표시를 하고, 며칠 후에 q마리의 물고기를 잡는다면 그중에는 꼬리표를 단 것도 있고 달지 않은 것도 있을 것이다. 이때 꼬리표를 단 물고기의 수를 x라고 하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{p}{n}=\frac{x}{q}$$

p, x, q 모두 측정값이므로, n의 값을 구할 수 있다.

다음은 앞과 같은 활동을 10번 시행한 예이다.

표본 채취 순서	꼬리표를 단 물고기의 수	표본 수
1	3	15
2	0	15
3	3	15
4	1	15
5	2	15
6	4	15
7	6	15
8	2	15
9	4	15
10	2	15

이때 좀 더 정확한 n의 값을 구하기 위해서는, x의 평균 $\overline{x}$를 구하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$n=\frac{pq}{\overline{x}}$$

예를 들어 처음에 표시한 물고기의 수(p)가 10마리이고 다섯 번 표본을 채취했다면, $\overline{x}=1.8$, $p=10$, $q=15$이므로 $n=83$이다.

위와 같이 연못에 있는 물고기의 수를 측정하는 이러한 과정을 'the capture/recapture' 방법이라고 하며, 이것은 게임으로도 사용되고 보존청에서도 활용되고 있다.

V. 수학과 평가의 특징 및 방법

01 수학과 평가의 동향

1990년대 초 미국 NCTM의 대안적 평가의 강조를 기점으로, 우리나라에서도 1995년 교육개혁위원회 주체의 '세계화 · 정보화 시대를 주도하는 신교육체제 수립을 위한 교육개혁방안' 수립, 1997년 서울시교육청의 초등학교 새물결 운동, 1997년 제7차 교육과정 개정 등의 영향으로 학교 현장에 수행 평가가 점차 반영되기 시작하였다. 결과적으로 우리나라에서도 전통적인 평가 방식의 변화 및 개선의 필요성이 인식되면서 새로운 평가 방법의 도입이 요청되고 이를 위한 대안으로 학교 현장에의 수행 평가 도입 및 활성화 방안이 추진되었으며, 이는 현재까지 지속적으로 강조되고 있다.

이에 대한 실례로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든 교과목에서의 평가 부분은 다음과 같이 진술되어 있다(교육과학기술부, 2011).

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수-학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력

(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력

(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

이상의 내용을 중심으로 우리나라 수학과의 평가 동향을 간략히 살펴보면, 우선 평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있으며, 최종 결과의 평가보다는 과정에 대한 평가를 강조하고 있다. 또한 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다. 특히 최근 들어 인지적 영역에 대한 평가뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 평가도 점차 강조되고 있다. 아울러 평가 상황에서도 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구 및 교구의 적절한 이용을 권장하고 있음을 알 수 있다.

02 수학과 평가의 원리

학교 수학에서의 평가는 주로 교수-학습 방법의 개선을 위하여 이루어져야 하는데, 그동안 평가는 수준 판정 및 선발의 목적을 달성하는 데 치중해 왔다. 이로 인해 평가는 학생들에게 도움을 주기보다 많은 심적인 부담을 안겨 주었으며, 그러한 평가 결과는 교사의 수업 방법을 반성하고 개선하는 데 그다지 활발히 활용되지 못하였다. 또 지식을 측정하는 지필 검사가 전적으로 활용되고, 창의력, 탐구력과 같은 고등 정신 능력과 흥미, 관심, 열의와 같은 정의적 능력을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 활용되지 못하였다. 이렇듯 잘못된 평가 방식은 교육 본연의 모습을 그르칠 수도 있지만, 반대로 올바른 평가 방식은 교육 본연의 모습을 찾는 데 절대적인 영향을 미친다. 이에 따라 수학 교과에서 점차 지향되고 있는 평가의 동향이나 특징에서 알 수 있는 바와 같이, 수학과 평가가 바르게 이루어지기 위해서는 다음과 같은 기본 원리가 지켜져야 한다(황혜정 외, 1997).

가. 발달적 교육관을 중시하는 평가

평가는 그 방향과 방법에 영향을 주는 기준하에서 선발적 교육관과 발달적 교육관으로 대별할 수 있는데, 발달적 교육관에서의 교육 평가는 학생의 선발이나 개인차를 내는 데 관심이 있는 것이 아니라, 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업 목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습 방법을 배치하기 위한 평가를 하게 된다. 또한 학생 간의 서열과 개인차를 내기 위한 평가 방법보다는 주어진 수업 목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업 목표 달성도의 평가에 그 관심이 집중된다.

발달적 교육관은 준거지향평가의 관점으로 귀결된다고 할 수 있다. 평가의 목적에 따라서 상대평가를 하여야 할 때가 있고, 준거지향평가를 하여야 할 때도 있다. 그러나 수학과 평가가 수학적 능력을 신장시킨다는 목적을 달성하기 위해서는 교사가 선발적 교육관보다는 발달적 교육관을 지녀야 한다. 그럼으로써 교사는 교육 목표의 달성도와 학생의 학습 과정에 더욱 관심을 기울이고 자신의 수업 방법과 평가 방법에 대해 보다 반성하며 학생 개개인에 적합한 교수-학습 방법을 적용할 수 있다.

나. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가

그동안 수학 교과에서 다양한 평가 방법이 사용되지 못한 주된 이유는 교사에게 주는 부담, 그리고 다양한 평가 방법을 활용할 수 있는 다양한 형태의 수업을 하는 데 교사가 익숙하지 못하기 때문이다. 또 수학에서는 지필 검사만으로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 평가할 수 있다는 잘못된 인식 때문일 수도 있다. 그러나 지필 검사만으로는 다양한 상황에서 다양하게 표현되는 수학적 능력을 종합적으로 바르게 평가할 수 없다. 수학이 타 교과목과는 다른 특성을 지니고 있다고 하더라도, 수학적 능력 역시 다양한 평가 방식을 통해서 바르게 평가될 수 있다. 이제까지의 일상적인 수업 방법을 탈피하여 학생들의 수학적 사고를 자극하는 새로운 수업 방법을 적용하여 보고, 또 이에 부합하는 새로운 방법으로 평가를 해야 할 것이다.

다. 문제 해결 과정을 중시하는 평가

현재의 수학과 평가에서는 정 · 오답 여부, 점수, 석차 등이 중요시되고 있으며, '학생이 어떠한 사고 과정을 거쳐서 이 문제를 해결하였는가?', '학생이 사고 과정에서 어떤 오류를 범해서 문제를 풀지 못하였는가?'는 중요시되지 않는다. 이는 다인수 학급에서의 평가의 효율성, 선발적 교육관, 상대적 평가관이 중요시되는 분위기 때문이다. 그러나 이러한 평가 방식이 계속 적용되면 학생은 사고 과정, 문제 해결 과정의 타당성보다 정 · 오답 여부에만 신경을 쓰기 때문에 학생의 수학적 사고 능력, 문제 해결력은 향상되지 못한다. 또 교사는 학생 개개인이 지닌 사고 과정의 결함을 알 수 없기 때문에 그러한 결함들이 발견되어도 치유되기 어렵다. 교사 역시 자신의 교육 방법을 반성해 가면서 학생을 지도할 기회를 가지기

어렵다. 그러므로 이러한 일을 가능하게 하려면 다양한 풀이 과정과 방법이 공유되는 해결(또는 수행) 과정을 중요시하는 평가가 이루어져야 할 것이다.

라. 정의적 영역의 능력을 중시하는 평가

정의적 영역의 평가는 수학적 지식 및 기능에 관한 인지적 영역의 평가 못지않게 중요하다. 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 가지고 공부를 하며, 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다. 최근 들어 우리나라에서도 정의적 영역에 대한 평가의 중요성이 점차 인식되고 있다. 이는 우리나라 학생들이 국제 학업성취도 비교 평가에서 수학 학업성취 수준은 세계 최상위권임에도 불구하고, 정의적 수준은 최하위권인 것으로 나타났기 때문이다. 많은 학생들이 수학은 재미없고 어려운 과목, 일상생활에 도움이 안 되는 과목, 대학 입시를 위한 과목 등 매우 부정적인 교과로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 우리 사회에 큰 우려감을 주고 있으며, 이에 대한 개선책이 요구되고 있다(박선화 외, 2010).

그럼에도 불구하고 우리의 현실에서 정의적 영역에서의 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 이유는 평가에서의 주관성과 교사의 주관적 판단을 중요하게 여기지 않고 신뢰하지 못하는 분위기, 평가상의 번거로움, 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 평가 도구나 자료의 부족 때문이다. 이에 따라 교사의 주관적 판단의 중요성을 인식하고 그것을 신뢰하며, 평가상의 번거로움을 최소화하고, 교사들이 손쉽게 이용할 수 있는 관찰 또는 면담지 등의 평가 도구가 개발되고 제공된다면, 정의적 영역에 대한 평가도 보다 활성화될 수 있을 것이다.

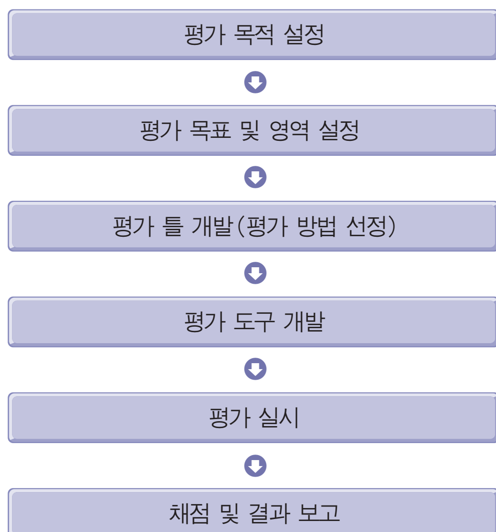
여기서 수학에 대한 정의적 특성의 의미와 구성 요소를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 한국교육과정평가원(박선화 외, 2010)에서는 수학에 대한 정의적 특성을 수학에 대한 경험으로 인하여 형성된 정서, 신념, 동기 등을 포함하는 심리적 특성으로 정의하여 제시하였다.

〈표 Ⅴ-1〉 수학에 대한 정의적 특성의 요소

범주	하위 요소	정의
정서: 비교적 강하게 단시간 동안 계속되는 감정. 희노애락, 애증, 공포, 쾌감 등	흥미	교과나 학습 주제 등에 대해 주관적으로 느끼는 선호도 및 학습 활동에 참여함으로써 발생하는 즉각적인 재미
	호기심	지속적이면서 일관되게 새로운 것을 추구하는 개인의 심리적 경향성
	수학 불안	수학 교과 자체 또는 수학과 관련된 일이나 문제 등에 대하여 긴장하고 두려워하거나 걱정하고 염려하는 심리 상태
신념: 어떤 아이디어, 사건, 행위 등과 같은 대상에 대해 여러 반응을 시도하고 다양한 시행착오의 과정을 반복하면서 형성된 가치 체계	수학관	문화적 가치와 사회적 기대를 경험과 학습을 통하여 내면화한 것으로 수학이 가지고 있는 교과로서의 특성과 그에 적절한 학습 방법에 관한 개인적인 관점
	가치 인식	사회적 맥락이나 학습자 자신의 삶의 맥락과의 관계 속에서 수학의 기능과 유용성에 대한 평가
	귀인	수학과 관련된 성공과 실패의 원인에 대한 개인적 지각으로 원인의 소재(내적 · 외적 요인), 안정성, 통제 가능성에 대한 추론
동기: 학습 활동을 유발하고 지속하게 하는 힘으로서 학습 활동을 의미 있고 가치 있는 것으로 보고 학습 활동으로부터 의도된 가치를 얻고자 하는 경향성	목표 지향성	성취 상황에서 개인이 과제를 수행하는 목표에 대한 개인의 지향성으로, 타인과 비교하거나 자신의 능력을 타인에게 증명하기 위한 목표인 수행 목표와 과제의 숙달이나 능력을 향상하기 위한 목표인 숙달 목표로 구분됨
	자기 효능감	목표 달성에 필요한 행동 과정을 조직하고 행하는 자신의 능력에 대한 믿음으로, 특정한 시간에 주어진 특정 과제를 잘 수행할 수 있는지에 대한 인식
	자기 조절력	개인적 목표 설정과 설정한 목표를 성취하기 위한 행동 조정으로, 장기적 목표 달성을 위해 바람직한 행동을 추구하고 그렇지 않은 행동은 억제하여 충동적이거나 즉각적이지 않고 스스로 문제를 신중하게 계획, 해결, 평가하려는 경향성

03 수학과 평가 절차

평가는 상황에 따라 다양한 형태로 시행되므로 모든 상황에 적용 가능한 평가 절차를 규명하기란 쉽지 않다. 하지만 교사가 평가 주체자가 되어 학생들의 수학적 능력이나 태도를 평가하는 경우에 초점을 두어, 평가 시행을 위한 기본 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅴ-1] 수학과 평가의 기본 절차

평가를 하고자 할 때 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다. 진단평가나 형성평가와 같이 교사가 자신의 수업에 대한 피드백을 얻기 위한 목적으로 평가를 실시한다면 수업을 진행하기 전이나 진행하는 도중에 평가를 실시하여 그 결과를 수업 개선에 활용하게 될 것이다. 반면 총괄평가와 같이 학생들의 성취 정도에 따라 등급을 결정하는 것이 목적이라면 보다 객관적인 평가 방법을 이용하며, 평가의 내용도 한 학기 또는 일 년 동안 학생들이 학습한 전체 내용을 포괄하는 것이 더 타당할 것이다. 이처럼 평가의 목적에 따라 평가 내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 할 것이다.

두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가 목적에 따라 평가하고자 하는 영역(이하 평가 영역)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육 목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육 목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가 영역의 교육 목표를 설정하는 것을 말한다.

세 번째 단계에서는 균형 있는 평가 도구 개발을 위하여 평가 틀을 개발하는 것이다. 평가 틀은 평가 영역의 교육 목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동 영역과 내용 영역, 평가 목표, 평가 문항 유형, 각 요소별 문항 출제 비율 등을 포괄적으로 포함한다.

또한 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육 목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정하여야 할 것이다. 예를 들어 총괄평가를 실시할 목적으로 특정 평가 영역을 선정하여 해당 교육 목표가 확인되었을 때, 인지적 영역 능력에 관한 평가를 실시하기 위해서는 이에 부합하는 평가 방법을, 정의적 영역 능력에 관한 평가를 실시하고자 할 경우에는 이에 따른 적절한 평가 방법을 사용해야 할 것이다.

네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가 틀에 부합하는 평가 도구를 개발하는 과정이다. 평가 도구 개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따라 모범 답안 및 채점 기준도 개발하여야 한다. 이때 '평가 도구 개발'이란 인지적 영역의 평가에서 지필 검사를 위한 평가 문항 개발, 채점 기준 및 예상 답안 작성과 정의적 영역에서의 평가를 위한 평가(주로 관찰 및 면담) 요목 개발, 기록 방법 작성 등을 총체적으로 일컫는 말이다.

다섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점 기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다.

마지막 단계로는 평가 목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

04 수학과 평가 틀 개발 시 유의 사항

학교 수학에서 수학 교육 목표를 내용과 행동 수준에 맞추어 평가하는 것은 바람직한 일이며, 이를 위해서는 수학과에 적합한 평가 틀을 마련하여야 한다. 평가 틀은 평가 도구 개발 및 평가의 전 과정에서 평가 방향과 평가 관련 항목을 선택하거나 결정할 때 판단의 준거가 된다. 평가 틀은 평가에 관한 보다 체계적이고 포괄적인 구조를 설명할 수 있다는 장점과 더불어 평가 문항과 내용 및 행동 영역의 적합성을 판정하고 설명하는 데 용이하다고 할 수 있다. 〈표 Ⅴ-2〉, 〈표 Ⅴ-3〉 참조

수학과 평가 틀을 개발하는 데 있어서 고려해야 할 제한 사항은 다음과 같다.

첫째, 일반적으로 평가의 목적은 우수 학생을 선발하려는 것이 아니고 학생들의 교육 성취 정도(수준)가 얼마나 되는지, 그리고 각각의 수준에 도달한 학생들이 얼마나 되는지 파악하는 데 있으므로 평가 틀이 학생들의 성취 수준을 골고루 측정해 낼 수 있도록 세워져야 한다. 그러므로 가장 기초가 되는 수준에서부터 우수한 학생까지의 성취 정도가 잘 드러날 수 있도록 다양한 수준의 문항으로 구성되어야 한다.

둘째, 가능하면 평가 요소를 적어도 내용 영역과 행동 영역으로 이원화하도록 한다. 특히 행동 영역을 설정하여 소홀하기 쉬운 '지식의 활용 또는 적용' 능력에 의미 있는 비중을 두도록 한다. 동시에 폭넓은 수준의 학업 성취의 정도를 파악할 수 있도록 행동 영역을 가장 기초적인 지식이나 단순 계산에서부터 보다 복합적인 사고를 요구하는 탐구나 문제 해결 능력까지 평가의 대상으로 삼아, 학생들이 어느 영역에 더 높은 성취를 보이는지 파악할 수 있도록 한다.

셋째, 평가 틀의 구성에 있어서 시대적 요구가 강한 행동 영역을 의도적으로 평가 틀에 포함시키도록 한다. 예를 들어 의사소통 능력과 같이 시대적으로 강력히 요구되고 있으면서도 실제 학교 현장에서는 소홀히 다루어지는 능력을 평가 틀에 과감히 도입함으로써 학교 교육과정 운영에 있어서 선도적 역할을 기대해 볼 만하다.

〈표 Ⅴ-2〉 수학과 평가 틀의 예

행동 영역 / 내용 영역	계산	이해	추론	문제 해결
수와 연산				
문자와 식				
함수				
확률과 통계				
기하				

〈표 V-3〉 수학과 평가 틀에서의 인지적 행동 영역의 정의

행동 영역	정의
계산	여러 가지 계산법, 나아가 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	• 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력에 관한 것 • 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제 해결	• 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 • 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합 교과적(수학 외적)인 소재의 응용 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것

05 서술형 및 수행 평가 문항의 채점 방법

서술형 또는 수행 평가 문항 등에서 학생들은 문제(질문 내용)조차 이해하지 못하는 경우, 문제는 이해했으나 풀이 과정이 틀린 경우, 또는 풀이 과정은 옳으나 계산 과정이 미흡하여 실제로 결과를 나타내는 부분이 틀린 경우 등 여러 가지 반응을 나타낸다. 실제로 학생들의 문제 풀이를 평가하는 데 있어서 가장 어려운 부분은 여러 가지 유형의 오류들을 드러내는 풀이를 어떻게 평가할 것인가를 결정하는 일이다. 이때 풀이 과정을 중시하여 채점하는 방법으로는 '분석적 점수화 방법'과 '총체적 점수화 방법'을 들 수 있다(Charles, et. al., 1987).

먼저 '분석적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법을 말한다. 이때 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 영향을 주어서는 안 되며, 각 문항마다 채점 요소를 지나치게 세분화하지 않도록 한다. 분석적 점수화 방법은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 하지만, 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화한 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있다는 것이 주요 장점이다. 한편 '총체적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하는 대신, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법을 말한다.

서술형 및 수행 평가 문항의 채점을 위한 채점 기준은 주로 분석적 점수화 방법을 토대로 문제 이해, 문제 해결 과정, 답 구하기 등의 과정이 반영되도록 작성한다. 이를 작성하는 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 적절히 부여하도록 한다. 다음은 서술형의 문항에 대한 채점 기준을 분석적 점수화 방법으로 제시한 예이다.

【문항】

작년에 A 중학교의 학생 수는 1050명이고, 금년에는 작년보다 남학생은 4 % 증가하고 여학생은 2 % 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

【모범 답안】

작년의 남학생의 수를 x, 여학생의 수를 y라고 하면

$$\begin{cases} x+y=1050 \\ \frac{4}{100}x-\frac{2}{100}y=9 \end{cases}$$

이므로 $x=500$, $y=550$이다.

따라서

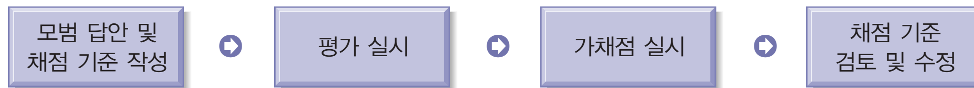
금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times500=520$(명)

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times550=539$(명)

【채점 기준】

영역 \ 요소	채점 요소	배점
문제 이해	작년의 남학생 수를 미지수로 정하기	1점
	작년의 여학생 수를 미지수로 정하기	1점
해결 과정	작년의 학생 수에 관한 식 세우기	1점
	작년보다 늘어난 금년의 학생 수에 관한 식 세우기	3점
답 구하기	금년의 남학생 수 구하기	2점
	금년의 여학생 수 구하기	2점
총점		10점

서술형 및 수행 평가 문항에 있어서 모범 답안은 채점 기준을 작성하는 데 있어서 구체적인 지침의 역할을 한다. 문항의 특징이나 성격에 따라 다르겠지만, 일반적으로 수학 교과의 특성상 피험자가 다양한 창의성을 발휘하여 평가자가 생각하지도 않았던 여러 가지 형태의 답을 제시할 가능성은 그리 높지 않다. 하지만 서술형 문항의 경우에는 답안을 작성하는 과정에서 실수나 오답의 가능성이 높으므로 이에 관한 채점 기준을 마련하여 채점 결과의 공정성을 유지해야 할 것이다. 이에 따라 모범 답안과 그에 따른 채점 기준을 구체적으로 마련하고 평가를 실시한 후 이미 작성된 채점 기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'하는 일은 매우 중요하다고 하겠다. 이는 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 미처 생각하지 못하였던 채점 요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고, 미비한 부분을 보완 · 수정하기 위함이다. 위와 같은 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

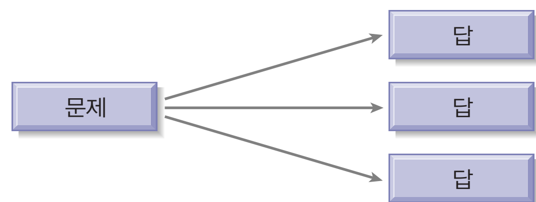


[그림 Ⅴ-2] 채점 절차

06 프로젝트

가. 프로젝트의 의미

프로젝트의 사전적 의미는 '실행 계획서'이지만, 수학 교육에서 프로젝트는 보다 넓은 의미로 무엇을 할 것인가뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다. 프로젝트는 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말하며, 이때 개방형 문제, 즉 열린 반응(open-ended, open-responded) 문제는 해답이 정해져 있지 않고 학생의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제를 말한다. 하지만 경우에 따라서 개방형 문제의 답은 모범 답안이 제한되지 않을 수 있다. 즉 결정되지 않을 수도 있다.



[그림 Ⅴ-3] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

【개방형 문제의 예】

숫자 4를 네 번 사용하고 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, 분수 등의 기호를 써서 0부터 9까지의 수를 만들어 보아라.

【풀이】

$0=4+4-4-4=44-44$

$1=\frac{4}{4}+4-4=\frac{44}{44}=\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\div\frac{4}{4}$

$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=4-\frac{4+4}{4}$

$3=\frac{4+4+4}{4}$

$4=(4-4)\times4+4=\sqrt{4+4+4+4}$

$5=\frac{4\times4+4}{4}$

$6=\frac{4+4}{4}+4=\frac{4+4+4}{\sqrt{4}}$

$7=\frac{44}{4}-4=\{4-(4\div4)\}+4$

$8=4+4+4-4=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$
$=4\times4\div4+4=4\times4-(4+4)$

$9=4+4+\frac{4}{4}$

학생들은 열린 반응의 과제들을 수행하기 위하여 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지를 결정해야 할 뿐만 아니라 때로는 어떻게 접근해 나아가야 할 것인가에 관한 수학적 방법까지도 결정해야 한다. 이에 따라 프로젝트는 학생들의 실제 생활과 직접 관련되어 그들의 고등 사고 능력을 발휘할 수 있는 문제 상황을 주제로 제시함으로써 과정 중심의 수행 경험을 하게 한다.

나. 프로젝트의 특징과 개발 시 유의점

프로젝트의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

둘째, 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 프로젝트는 소그룹의 협동 학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에 (말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

한편 다음은 프로젝트 개발 시 유의해야 할 사항이다.

첫째, 프로젝트는 학생들이 수학적인 안목에서 현상을 파악할 수 있는지, 또는 배운 수학적 지식을 사용하여 생활의 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 것으로, 판에 박힌 문제(정형 문제)를 지양하고 참신하고 새로운 성격의 주제(문제)를 개발하도록 한다.

둘째, 프로젝트의 채점을 위한 채점 기준은 총체적 점수화 방법과 분석적 점수화 방법을 적절히 고려하여 작성한다. 서술형 문항의 경우와 마찬가지로, 프로젝트의 채점 기준(표)의 작성 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 부여하도록 한다.

다. 프로젝트의 채점 방법

프로젝트의 수행 과정은 다음 〈표 Ⅴ-4〉와 같은 기록지를 사용한 자기 평가(self-assessment) 방법을 이용하여 학생 스스로 작성해 보게 하고, 이를 평가하거나 점검하는 것이 용이하며 바람직하다(황혜정 외, 1997).

〈표 Ⅴ-4〉 학생 자기 평가 기록지(예)

학생 자기 평가 기록지
단원명: ______________________ 날　짜: ______년 _____월 _____일 _____교시 이　름: ______________________　(_____학년 _____반 _____번)
주제(문제):
해설(풀이):
반성(소감):
자기 평가: 아주 못함(　　)　못한 편임(　　)　잘한 편임(　　)　아주 잘함(　　)
교사 논평:

점선을 따라 자르세요.

한편 프로젝트의 전반적인 활동 과정 및 결과에 대하여 평가하고자 할 때, 다음과 같이 관찰에 의한 평정척도지를 활용하면 편리하다(Krulick 외, 1998).

〈표 V-5〉 평정척도법을 이용한 과제 수행 능력 평가(예)

이름: ________________ 날짜: ________________

평정척도

1=불충분 2=만족 3=훌륭함

관찰(면담) 요목			0	1	2	3	논평
과제 수행 능력	주제 이해						
	해결 전략 선정						
	계획 수행						
	검토 및 반성						
	의사소통						
	태도						

07 관찰 및 면담

가. 관찰 및 면담의 특징

관찰 및 면담에서 평가자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰 내지 면담을 하면서 기록하게 된다. 이 방법은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있는 장점이 있다. 또한 관찰 및 면담은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다. 하지만 우리나라 교육 현실을 감안할 때, 독자적인 평가 기법으로서의 역할보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할의 의미가 크다.

특히 관찰의 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다. 또 관찰은 정규 수업 시간 중에 자연스럽게 이루어질 수 있고, 특정한 사고력에 중점을 두고 평가할 수 있으며, 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

관찰이나 지필 검사와 더불어 면담은 학생들과 직접 대화함으로써 문제 해결 상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의 '결과'를 도출해 내기까지의 사고 '과정'에 대한 통찰을 가능하게 하는 기법이다. 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

나. 관찰 및 면담의 유형

실제로 현장에서 사용할 수 있는 관찰법은 수업 시간에 교사가 학생들을 대상으로 실시하는 비참여 관찰로, 학생 전체 또는 소집단이나 개인별로 자연스럽게 행해질 수도 있다. 다만 교사가 수업을 진행하면서 관찰 결과를 기록할 수 있는 시간이 한정되어 있으므로, 학급 전체보다는 개별 또는 소집단을 대상으로 관찰을 실시하는 것이 효과적이다. 그런데 사실 비참여 관찰의 경우 객관적으로 관찰이 가능하나 관찰의 기회가 적고, 심리적으로 격리되어 있기 때문에 미세한 변화를 파악하기 힘들다.

한편 공식적 면담은 면담자가 미리 만들어진 일련의 질문을 가지고 응답자에게 질문하는 방법이다. 이때 각 면담에서는 똑같은 질문이 똑같은 방법으로 부과되므로, 공식적 면담은 질문지를 언어로 표현하는 방법이라고 볼 수 있다. 이에 반해 비공식적 면담은 면담 계획을 세우되 면담 목적만을 명백히 하여 융통성 있는 접근을 시도하는 방법이다. 따라서 연구자(교사)가 한 현상에 관한 적절한 질문들을 충분히 가지고 있지 않을 때 유용하다. 이러한 면담은 예정된 '질문군'이 없고 본질적으로 탐색전부터 시작한다고 볼 수 있다.

결국 면담이 공식적으로 진행되든 비공식적으로 진행되든, 교사는 주로 정규 수업 외의 상황에서 학생들과의 면담을 통해 그들과 직접 대화함으로써 그들이 수학 수업 상황에 어떻게 수용하고 대처하는지에 대해 보다 깊은 이해를 구할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 (비공식적) 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

특히 공식적 면담은 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별하는 데 유용하며, 비공식적 면담은 그들을 진단, 선별하는 것뿐만 아니라 그들의 능력에 따른 처치도 가능하다. 면담은 주로 개별적으로 진행하는 것이 상례이지만, 비공식적 면담의 경우에는 소그룹별로 면담을 진행하여 면담 대상자들끼리 보다 자연스러운 분위기에서 진행됨으로써 보다 정확한 정보를 얻을 수 있는 이점도 있다.

다. 관찰 및 면담 시 유의 사항

일반적으로 관찰을 통해 정기적으로 기록하여 평가하기 위해서는 관찰자인 교사의 많은 시간과 노력이 절대적으로 필요하며, 관찰 목적에 알맞은 현상을 포착하기 어려울 때도 있다. 또한 학생들의 반응을 관찰할 때 편견

을 가지게 되어 관찰 결과에 주관성이 개입될 여지가 있으며, 관찰의 대상이 되는 학생들 역시 관찰자인 교사를 의식하면서 행동이 달라질 수 있다. 사실 교사가 관찰만을 통하여 학생들의 다양한 행동이나 사고 과정 등을 정확히 파악하기는 어렵다.

관찰 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 뚜렷한 관찰 목적 또는 문제 의식을 가지고 관찰에 임하도록 한다.
- 관찰 계획을 치밀하게 세워야 한다.
- 부분과 전체의 관련을 지으며 관찰함으로써 피상적인 관찰이 되지 않도록 해야 한다.
- 객관적인 태도로 관찰해야 한다.
- 관찰 기간은 짧게 하고 누적시키는 방법을 쓰도록 한다.

공식적 면담의 경우에는 면담 도중 학생의 반응에 개입하는 일이 없으므로, 사전에 질문 내용들을 신중히 계획하여 작성하면 별 문제가 없으나, 비공식적 면담에서는 교사가 학생의 반응에 따라 수시로 질문하게 되므로 더욱 주의를 해야 한다.

면담 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 면담 시 교사의 반응이나 질문으로 인해 대화의 방향이 바뀌어서는 안 되므로 교사의 태도(반응)는 중립적 입장을 취해야 한다.
- 질문의 내용과 시기가 적절해야 한다.
- 학생이 편안하고 안정감을 가지도록 면접 환경과 조건을 구성해야 한다.
- 교사가 면담 시 기본적으로 갖추어야 할 태도는 중립적인 태도, 공정한 태도, 자연스러운 태도, 담화적인 태도, 친절한 태도이다.

라. 관찰 및 면담의 기록 방법

관찰 및 면담의 목적이 결정되면 대상, 장소, 시간, 기록 유형 등의 세부 계획이 진행되어야 하며, 이때 활용될 수 있는 기록 방법에는 체크리스트와 평정척도법 등이 있다.

체크리스트나 평정척도법은 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구되지만, 그 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다. 그러나 체크리스트나 평정척도법은 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못하는 행동이 발생하는 경우에는 적절한 기록을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.

관찰 및 면담의 자료(정보)를 수집하면, 그다음 단계로 그 정보들을 요약하고 행동의 패턴을 결정하는 작업이 필요하다. 물론 기록 형태에 따라 정보를 요약하는 방법이 다양하게 개발될 수 있다. 일반적으로는 관찰에 의해 기록된 자료들을 그래프 및 빈도, 시간, 가중치의 평균 등의 기술 통계 수치로 분석한다. 그러나 학교 현장에서는 기록된 자료를 진술문 형태로 요약하여 교사의 전문적 판단에 따라 필요한 조언을 하는 것이 보다 수월하고 바람직하며, 이는 학교생활기록부에서 각 교과에 대한 학생의 발달 상황을 작성하는 기초 자료가 될 수 있다.

관찰 및 면담은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제 집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역을 평가하는 데 용이하다. 다음 〈표 Ⅴ-6〉은 여러 정의적 영역에 대한 평가를 위하여 체크리스트를 사용하여 관찰 또는 면담이 가능한 구체적인 요목들을 제시한 예이다(박선화 외, 2010).

〈표 Ⅴ-6〉 정의적 영역 평가를 위한 체크리스트지(예)

체크리스트					
정의역 영역	관찰(면담) 요목	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
수학에 대한 흥미와 호기심	• 수학을 하는 것을 즐거워한다.				
	• 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다.				
	• 수학 수업 시간을 기다린다.				
	• 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.				
	• 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.				
수학에 대한 자신감	• 수학 공부에 자신감을 가지고 있다.				
	• 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다.				
	• 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다.				
	• 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.				
수학에 대한 불안	• 수학 수업이 어려울까 봐 걱정한다.				
	• 수학 성적이 나빠질까 봐 걱정한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 긴장한다.				
수학의 유용성 인식	• 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다.				
	• 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.				
과제 집착력과 의지	• 수학 공부를 열심히 한다.				
	• 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다.				
	• 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다.				
	• 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.				
창의적 사고	• 다른 사람의 방법을 그대로 따라 하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.				
수학 수업에의 참여	• 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다.				
	• 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다.				
	• 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.				

VI. 좋은 수업의 의미

01 좋은 수업에 대한 관점의 변화

어떤 수업이 좋은 수업인가에 대한 견해는 구성주의 이론의 도래와 함께 바뀌기 시작하였다고 볼 수 있다. 구성주의 인식론에서는 지식을 개인이나 집단이 적극적으로 만들어 낸 경험적 구성물로 본다. 즉, 학생들은 모든 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 학생 스스로 능동적 구성 활동에 의해 이를 형성한다는 것을 그 주된 요지로 삼고 있다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 개념을 탐구하고 개념 사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록, 다시 말해 구성 활동이 잘 일어날 수 있도록 총체적인 환경을 조성해 주는 것이다.

학습 기회의 제고라는 측면에서 좋은 수업을 진단할 때, 학습 기회란 수업을 통해 가르쳐진 것과 평가되어지는 것 사이의 중복 정도를 의미한다. 이는 수업 중에 다루어지는 교육과정의 내용과 평가의 내용이 수업의 주요 목표를 반영해야 함을 뜻한다. 그러므로 1980년대 이래로 교육과정의 개정은 교사가 아닌 학생 중심의 교육을 강조하고, 실생활과 학교 교육 내용을 연결시키며, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두어 왔다.

따라서 진정한 학습은 일상의 학습 상황에서 다양한 정보와 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 학생들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제를 해결하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다는 것이다 (von Glasersfeld, 1993).

다시 말하면 구성주의에 입각한 수학 수업의 방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아닌 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다. 학습은 사회 활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간, 혹은 교사와 학생 사이에 생각이나 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다(남승인, 1998). 이때 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다. 아울러 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며, 따라서 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영하여야 한다는 것이다. 이렇게 볼 때 중앙집권식 교육과정의 편성 · 운영을 탈피하고 현장 중심으로 전환함으로써 학습자들을 보다 창의적인 교육과정에 의해 가르칠 수 있게 된다고 본다(최승현 외, 2002).

〈표 Ⅵ-1〉 좋은 수업을 위한 교수-학습 관점의 변화

교수-학습 관점의 변화		
강의식 전체 수업, 교사의 지시 중심 수업	➡	경험적, 귀납적, 실제적인 학습
수업 시간 중 학습자의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보를 듣고 암기하기	➡	수업 시간 중 학습자의 능동성: 모든 학생들이 학습에 직접 참여하기
학습지, 시험지, 연습지 등의 활동	➡	고등 사고력을 강조한 중심 개념과 원리 배우기
모든 교과 영역의 많은 학습량을 교사가 직접적으로, 간단히 다루기	➡	학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임하에 학습자 자신이 직접 연구 과제를 결정하기
어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	➡	학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 가지기

성적이나 학업 경쟁을 강조하기	➡	교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동
능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	➡	다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
특별 프로그램을 대용하기	➡	교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도
표준화 검사를 사용하기	➡	교사들의 관찰로 얻어진 질적 형태의 기술적 평가 사용하기

02 수학과 좋은 수업의 조건

수학과 교과 특성을 반영한 '좋은 수업'이란 '좋은 수업'에 대한 범교과적 정의와 그 궤도를 함께하면서, 수학 수업과 관련하여 현장의 교사들이 제기하는 문제점들을 효과적, 현실적으로 해결해 나가고 있는 수업들이라는 가정하에, 현장의 수학과 수업 지도와 관련하여 제기되어 온 문제점을 감안한 수학과 좋은 수업 선정 기준은 다음과 같다(최승현 외, 2002).

가. 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

현장의 수학 교사는 수학과 목표와 본질에 부합되면서 학생들의 요구, 능력 및 흥미에 알맞게 교육과정을 재구성할 필요가 있다. 실제로 좋은 수업을 진행하는 교사는 장기적인 기대, 학습 목표, 계획, 학습 활동, 자료 및 평가의 모든 측면을 포함하여 교실 수준에서 실행된 교육과정을 계획, 실천 및 평가하여야 한다(NCTM, 1993). 그뿐만 아니라 수업 목표와 목표 달성을 위하여 모든 교육과정의 요소들을 결합한 일관성 있는 체제를 유지해야 한다.

교육과정과 학습 내용 사이의 일관성을 유지하는 것은 학생들로 하여금 유의미한 지식을 구성할 수 있도록 한다. 즉, 학생들이 학교 밖 생활에서도 쉽게 접근하여 활용할 수 있는 지식을 구성할 수 있도록 하여야 한다. 이때 교사는 (1) 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습 내용의 폭을 줄이고, (2) 학습 내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하며, (3) 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하고, (4) 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습 활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 할 것이다.

나. 수학 수업에서는 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치 있는 것임을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 해야 한다.

현장의 수학 수업에서의 문제점은 현실과 유리된 많은 양의 수학적 지식을 교과서나 틀에 박힌 수업 양식에 의존하여 가르친다는 것이다. 좋은 수학 수업을 위해서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 문제 해결의 과정에 관련된 다양한 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학생들이 설계한 문제 해결 활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 학교에서 배운 수학이 학교 밖의 다른 실제 상황들에서 활용될 수 없다면, 수학을 학습할 필요성이 줄게 된다. 즉, 학교에서 배운 수학 지식은 실생활에 적용될 때 보다 유의미해진다. 따라서 좋은 수학 수업이란 학생들이 수업 시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제 해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에도 적용할 수 있도록 가르치는 수업이다. 장래에 수학이나 과학과 관련된 직업에 종사하게 될 학생들뿐만 아니라 교양을 갖춘 시민이

되기 위하여 학교 수학 교육은 우리가 살아가고 있는 현실 세계에 대한 이해와 흥미를 길러 줄 수 있어야 한다(OECD, 2001).

학교에서는 도형의 넓이나 부피에 대하여 배우지만 실생활에서 어떻게 활용되는지, 어떤 경우에 필요한지를 파악하지 못한다면 이러한 내용들을 학습하는 의미가 반감된다. 그러므로 수학 교사들은 학교 수학을 대학 입시를 위한 과목으로만 중요하게 취급할 것이 아니라, 현실 세계를 살아갈 수 있는 수학적 소양을 갖춘 시민을 양성한다는 취지를 잊지 말고 가르쳐야 할 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 중요한 역할은 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다(NCTM, 1989, 1991). 그러므로 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생의 능력 양성을 위해 교사는 다음과 같은 측면을 강조하여 수업하여야 한다.

- 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.
- 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 학습한 내용과 관련된 교과 내 다른 영역과 타 교과 영역에 적용하도록 한다.
- 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백할 수 있도록 돕는다.
- 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

다. 수학 수업은 현대의 수학 지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다.

수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 수학적 입장도 변화되고 있다. 예를 들어 학교 수학에서는 규칙이나 공식으로 설명될 수 있는 필연적인 사건을 주로 다루는 반면, 실생활의 현상에서는 임의의 모델인 경우가 대부분이다. 이러한 변화의 원동력은 컴퓨터의 보급이다. 컴퓨터의 도입으로 지금까지는 생각지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 수학의 내용과 방법도 많이 달라졌다. 예를 들어 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 반올림한 값으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로 변화되었다.

컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다. 예컨대 저학년의 학생들도 계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배울 수 있다. 고학년의 학생들은 그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며, 그 결과 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있을 것이다(신동선 외, 1998). 이와 같이 공학적 기술 도구의 사용은 학습 환경을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 학습의 질을 향상시킨다. 즉, 학생들은 이러한 기술이 없었다면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험(simulation) 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 보다 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 가지게 한다.

라. 학생들의 선행 지식(기존 지식)을 고려한 수학 수업이어야 한다.

좋은 수학 수업은 새로운 지식을 선행 지식에 관련시킬 수 있는 수업이어야 한다. 그러나 학생들이 선행 지식을 지니고 있는 것만으로 바람직한 학습 결과를 가져오지는 않으며, 학생들이 선행 지식을 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행 지식에 관심을 기울이고, 이러한 선행 지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 비로소 학습이 촉진될 수 있다. 그러므로 수학과 좋은 수업을 위해서는 교사가 학생들이 이미 지니고 있는 선행 지식을 이끌어 내고, 직접적인 체험 활동이나 사고 활동을 통하여 새로운 개념을 도입하며, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다(Driver 외, 1995).

이와 같이 학생들이 선행 지식을 활성화하여 수학과 학습에 활용할 수 있도록 수업을 할 때, 교사는 다음과 같은 측면을 고려해야 한다.

- 교사는 학생들이 가지고 있는 선행 지식이 무엇인가 정확히 파악하여야 한다.
- 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 활성화하도록 수업 시작 시 수업의 내용에 대하여 논의한다.
- 때때로 학생들의 선행 지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로, 교사는 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사할 필요가 있다.
- 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어 수업 진행에 차질이 없도록 해야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 학습 내용을 연관지을 수 있도록 적절한 질문을 제공하여야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고, 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.
- 교사는 교수-학습에 관한 인지심리학의 이론에 초점을 맞추어 수업해야 한다.

마. 학습자 스스로 문제 해결 활동을 수행할 수 있도록 이끄는 수업이어야 한다.

좋은 수업이란 학생들로 하여금 주어진 수학 문제를 이해하고 그 풀이 과정을 추론하며 이를 이용하여 문제를 해결할 뿐만 아니라 교사나 다른 학생들에게 자신의 방법을 설명할 수 있도록 하는 일련의 학습 전략을 가르치는 수업이다. 보스니아도(Vosniadou, 2001)는 교사가 학생들에게 학습 전략들을 가르치기 위한 체계적인 노력을 할 때, 학생들이 실질적인 성과를 얻을 수 있다고 주장하였다. 이러한 학습 전략들은 학습 과정을 촉진하고 학습을 제고할 뿐더러 학생들이 주어진 상황에 적절한 방법으로 문제를 이해하며 이를 해결할 수 있도록 돕는다는 측면에서 중요하다. 그러므로 문제 해결에 있어서 보다 적용 범위가 넓을수록 성공적인 학습 전략이 된다.

여기서 중요한 것은, 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학을 하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 메타인지 학습 전략을 가르쳐야 한다는 것이다. 구체적인 학습 기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습 과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식한다는 것은 보다 고차원의 학습을 위해 중요하다. 즉, 학생들은 주어진 학습 목표 달성을 위해 자신의 학습 진행 과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고할 필요가 있다.

학습에서의 자기 조절(self-regulation)이란 학습자 자신이 스스로의 학습 과정을 평가하고 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발하는 것을 포함한다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써 학생들이 자기 조절적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

- 문제를 해결함에 있어서 학생 자신이 문제 해결 전략이나 방법을 계획하도록 한다.
- 사용 가능한 가장 효과적인 학습 전략들은 무엇이며, 이들을 어떻게 사용할 것인지를 알도록 가르친다.
- 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.
- 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

바. 학생들의 동기 유발이 가능한 수학 수업이어야 한다.

일반적으로 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 이는 수학 학습에 있어서도 마찬가지이다. 그러므로 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 수학 교사들은 동기 유발된 학습자를 원한다. 교사의 말과 행동은 학생들의 목표 달성 의지에 영향을 미치게 되며, 내적 동기가 유발된 학습자는 학습 성취를 위해 더 노력하게 된다. 교사가 학생들의 내적 동기 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

- 새롭고 흥미 있는 학습 과제를 제공함으로써 학생들이 호기심을 갖고 고차원의 사고 기술을 사용하도록 장려한다.
- 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 격려한다.
- 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.
- 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가한다.
- 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어를 사용하여 피드백할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

사. 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학 수업이어야 한다.

실제 상황에 기초한 평가 방법 중 하나인 수행 평가는 그 목적과 수행 과정, 그리고 평가 결과가 모두 일치하고 있다. 바람직한 평가는 수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, 평가가 수업과 일관될 뿐만 아니라 의도한 학습 목표와 일치하며, 나아가 수업의 방식과도 일관성을 유지하는 평가이다. 예를 들어 고차원의 분석과 추론 기술을 활용한 수업에서 학습한 것을 선다형 객관식 문항으로 평가하는 것은 수업의 방법과 평가 사이에 일관성이 결여된 경우이다. 교육 개혁의 중요한 한 부분을 차지하고 있는 수행 평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행 능력을 측정하고 반영하는 것이다.

좋은 수학 수업에는 수업에서 기대되는 학습의 본질, 사용된 학습 자료, 일관성을 유지한 다양한 평가 전략들이 포함된다. 수학과 좋은 수업에서의 평가는 학생들에게 기대되는 것과 결과에 대한 명확한 의사 전달이 요구된다. 이때 평가는 수업과 일관성 있게 통합되어 서로에게서 유용한 정보를 얻을 수 있도록 한다. 수업과 평가를 통합하기 위하여 교사들은 다음 사항들을 주목하여야 한다.

- 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습 표준을 개발한다.
- 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 상호 양립 가능한 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.
- 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.
- 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가 결과들을 교수-학습의 개선을 위해 활용한다.

학교 현장에는 학생들의 수준을 고려한 학생 개인 수준에 맞는 학생 중심 교육과정이 구현되어 있는데, 교사뿐만 아니라 교장, 교감 차원에서도 이에 적합한 평가 방법을 생각해 보아야 한다. 모든 실제 상황에 기초한 평가의 시행 및 운영을 교사에게만 맡긴다는 것은 교사에게 지나친 부담이 될 수도 있다.

VII. 수학과 수업 평가

01 수학과 수업 전문성의 의미

학교 교육에서 교사의 역할이 중요해지고 교사의 책무성에 대한 기대가 높아지면서, 세계 여러 나라에서는 우수한 교사를 확보함과 동시에 현직 교사의 전문성 발달을 촉진하고자 각별한 노력을 기울이고 있다. 이러한 상황에서 학생들의 학습을 평가하기 위한 활동과 평가 방법을 고안하고 그 효과를 경험한 교사들은 이러한 수업 전문성 기준의 유용성을 알고 있으며, 교사의 수업 전문성 평가에도 학생 평가와 같은 원리가 적용된다. 수업 전문성 기준에 비추어 교사의 수업 전문성을 평가(즉, 수업 평가)를 하기 위한 방법들이 제시되고 있으며, 이러한 평가의 시도 자체가 교사들의 좋은 수업 실행을 위한 하나의 기준이 될 수 있다.

구체적인 수학과 수업 전문성 기준 개발의 방향은 다음과 같다(임찬빈 외, 2006).

첫째, 수학 교사의 수업 활동을 총망라하는 포괄적인 기준을 제시한다. 다시 말하면 수학과 수업 전문성 기준은 교사의 수학 수업 전-중-후 활동인 수업을 준비하기 위한 과정-실제 수업 실행-수업 후 반성과 평가 · 향후 개선 노력 등을 종합적으로 다룬다.

둘째, 수학과의 모든 내용 영역에 공통적으로 적용할 수 있는 종합적인 기준을 제시한다. 즉, 특정 영역이나 단원에 국한하는 기준보다는 각 영역에 고루 적용할 수 있는 대표적인 기준을 중심으로 제시한다.

셋째, 각 기준 간의 상호 연계를 고려하여 제시한다. 즉, 수업의 흐름을 고려하여 각각의 기준을 독립적인 영역과 요소로 제시하되, 이들 간의 관계가 상호 의존적으로 연계됨을 보여 준다. 수업이란 복합적이고 다면적일 뿐만 아니라 수업의 제 양상은 상호 의존적이다. 이러한 다층적 위계 속에서 수업 평가 기준의 대영역을 설정하고 다시 중영역과 하위 요소로 세분하여 제시한다.

넷째, 목적과 상황에 따라 유연하게 선택할 수 있는 종합적인 기준 목록을 제시한다. 즉, 수학과 수업 평가 기준은 모든 수업에 획일적이고 고정적으로 적용하는 것이 아니라, 목적과 상황에 따라 기준들을 선정, 조합하고 수학과 각 영역의 특성에 따라 그것들을 변용하여 달리 적용할 수 있음을 고려한다.

다섯째, 수업 전문성 기준은 하나의 개별 기준도 다양한 방식으로 접근하여 판단할 수 있음을 전제하여 제시한다. 교사의 전문성과 수업의 양상은 한 가지 측면에서 살피기보다는 다양한 각도에서 접근하고 판단할 필요가 있다. 예전에는 주로 수업 활동에 초점을 맞추어 수업 평가가 이루어졌기에 교실 수업 관찰이 가장 강력한 평가 도구였지만, 수업 전문성은 수업 전-후의 활동을 모두 포함하므로 교실 수업 관찰만으로 기준의 달성 정도를 가늠하기 어렵다. 따라서 특정 기준이 달성된 정도를 판단할 때에는 전문성 기준 영역과 요소별로 다양하게 제시하고, 나아가 각각의 기준도 다양한 방법으로 적용할 수 있음을 전제한다.

여섯째, 수업 전문성 기준은 수업을 위한 장 · 단기적인 계획이나 단원 단위로도 활용할 수 있도록 충분히 고려하여 제시한다. 수업 전문성 기준의 적용은 하나하나의 수업에 국한하지 않으며, 수업 전-중-후를 포괄하여 설정하여야 한다.

요약하면, 수업 전문성 기준은 좋은 수업 활동의 실제를 특징짓는 요소들이라고 규정지을 수 있다. 그러므로 수업 전문성 기준은 (1) 초보 교사를 위한 지침, (2) 숙련된 전문가 교사를 위한 지침, (3) 개선 노력을 집중할 부분을 파악하는 구조, (4) 교사 집단 이외의 다른 공동체들과의 의사소통의 수단으로 사용될 수 있다.

교사의 수업 활동에 대한 전문성 기준이 마련되었을 때, 관계 당사자들은 공유된 개념과 가치 속에서 개선을 위한 노력을 어디에 집중할 것인지에 대한 논의를 할 수 있게 된다. 아울러 수업 전문성 기준에 교직의 임무와 역량, 우수한 교수 활동의 수준을 명확하게 규정해 놓음으로써 타 분야의 사람들로부터 신뢰받을 수 있고, 교직의 위상을 높일 수 있게 된다. 교사들은 교수 활동을 기술하는 공통된 용어의 가치를 익히 알고 있다. 또한 수업 전문성 기준은 교사들에게 '우수성'에 대한 합의된 기준을 제공함으로써 모범적인 교수 활동에 대한 교사들의 대화를 조직하는 역할을 한다. 이러한 대화를 통하여 경력자뿐만 아니라 초보자의 수행 수준을 향상시킬 수 있을 것이다.

한편 수업 전문성 향상을 위한 평가, 즉 수업 평가 기준에서 규정하는 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 주요 내용 학습에 참여할 수 있도록 지원하는 것이다. 수학과 수업 평가 기준의 구성 요소들은 이러한 목적하에 조직되며, 중요한 내용을 학습할 때 교사는 학생들과 함께 학습자 공동체를 조성해 나아가야 할 것이다.

대니얼슨(Danielson, 1996)은 초임 교사와 경력 교사들이 함께 활용할 수 있도록 보완한 수업 평가 기준을 제시하면서 복합적인 교수 활동을 4개 영역(계획과 준비, 교실 환경, 수업, 전문적 책임)으로 구분하였다(임찬빈 외, 2004, 재인용). 이 수업 평가 기준은 교사의 전문성 발달 단계를 파악하여 각 영역에 알맞은 해당 요소들을 제시함으로써 교사로 하여금 전문성을 계발하고 자기 반성에 활용할 수 있도록 하였다.

수업 평가 기준을 개발·실행하는 과정에서 교사는 공동의 연구를 해야 할 뿐만 아니라 평가 기준 개발을 뒷받침하는 원리와 목적에 대한 이론적 근거도 확보하여야 한다. 무엇보다도 수업 평가 기준을 개발하고 설계함에 있어서 주요 이해 당사자들인 교사, 전문가 집단, 정부 기관 등의 참여와 논의가 요구되며, 그에 대한 활용을 전제로 개발하여야 한다. 이때 주의해야 할 것은 교사 자신이 수업 평가 기준을 지원하는 결정적인 역할을 하여야 활용이 가능하게 된다는 점이다.

또한 수업 평가 기준은 자기 평가나 동료 평가, 상호 평가 등으로 활용될 수 있도록 보다 상세하게 개발되어야 하며, 교사의 가르치는 활동에는 일정한 기준이 있다는 점도 제시하여야 한다. 대부분의 교사들은 전문적인 교수 활동의 필수 요소들을 이해하고 있음에도 불구하고, 지극히 관념적인 수준에서 표현하는 경우가 흔히 있는데, 이 점을 특히 주의해야 한다. 동료 교사들뿐만 아니라, 학생, 학부모 및 사회의 다른 구성원들이 교사에게 요구하는 지식과 역량을 명시하는 수업 평가 기준은 좋은 교수 활동을 파악하고 알리며 보상할 수 있는 수단이 되기도 한다.

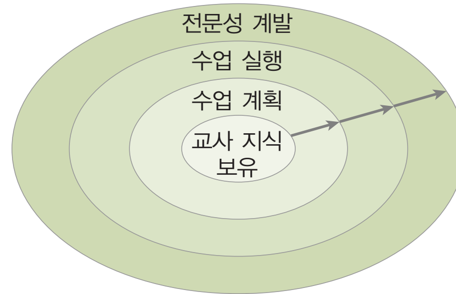
02 수학과 수업 영역 및 요소

가. 수업 평가 영역

수업 평가는 수업 전, 수업 중, 수업 후의 단계별로 진행할 수 있으며, 이러한 수업 단계는 '지식 보유', '수업 계획', '수업 실행', '수업 반성' 부문으로 구성되는데, 이는 교사가 좋은 수업을 하기 위해서는 다음과 같은 요건을 갖추어야 하기 때문이다.

- 교사가 알아야 할 것 ⇨ 지식 보유
- 교사가 준비해야 할 것 ⇨ 수업 계획
- 교사가 행해야 할 것 ⇨ 수업 실행
- 교사가 전문성 발달을 위해 해야 할 것 ⇨ 수업 반성

아는 것이 바로 수업의 실행으로 옮겨지는 것만은 아니지만, 일반적으로 교사가 계획을 세우고 준비하는 것은 수업에 영향을 주고, 이러한 모든 것은 실시한 수업에 대한 교사의 반성적 실천의 영향을 받게 된다. 이렇듯 [지식 보유] ⇨ [수업 계획] ⇨ [수업 실행] ⇨ [수업 반성]의 연계성이 있음을 나타내고 있다. [그림 Ⅶ-1] 참조



[그림 Ⅶ-1] 교사의 수업 단계

위의 [그림 Ⅶ-1]에서 알 수 있는 바와 같이, 교사의 '지식 보유'는 교사가 갖추고 있는 지식에 관한 이해 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 계획'은 본인이 준비한 수업 계획 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 실행'은 본인이 계획한 대로 수업을 충실히 실행하였다고 생각하는가, 그리고 '수업 반성'은 본인의 수업 실행 결과에 만족하는가 등을 반영하기 위한 것이다.

수업 평가를 위한 세부 영역 및 이에 관한 설명은 다음 〈표 Ⅶ-1〉과 같다.

〈표 Ⅶ-1〉 수업 평가 영역

수업 평가 영역		수업 평가 영역에 관한 설명	비고(수업 평가 요소)
교과 내용	• 교육과정 이해 및 재구성	교육과정 목표 및 내용에 관하여 정확히 이해하고, 이를 적절히 재구성하여 수업에 반영하는 것	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기
	• 수학 내용	소양이 되는 학교 수학 및 학문 수학에 관하여 충분히 이해하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기
	• 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 충분히 이해하고, 이를 효과적으로 수업에 반영하는 것	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기
	• 수학적 가치	수학적 가치와 중요성을 충분히 인식하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기
학습자 이해	• 학습자 수준	학습자의 인지 수준, 선행 지식, 학업 성취 수준 등을 파악하고 이를 적절히 수업 시간에 반영하는 것	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기
	• 학습자 오개념	학습자의 오개념을 인지하고 이에 대처하는 것	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기
	• 학습 동기	학습자의 관심 및 흥미도를 파악하고 이를 고취시키는 것	학습자 수준이 반영된 적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기
	• 수학적 태도	학습자의 자신감, 신념 등을 파악하고, 이를 증진시키는 것	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기
	• 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 파악하고, 이를 수업에 반영하는 것	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기
교수 학습 방법 및 평가	• 수업 목표 및 내용 반영	교육 목표 및 내용을 파악하고 이에 적합한 교수 학습 방법을 수행하는 것	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결과 관련된 전반적인 활동을 인지하고 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기
	• 학습자 수준 및 태도 반영	학습자의 인지 수준 및 정의적 특성을 인지하고, 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통에 관해 인지하고, 이를 적절히 활용하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 평가 방법 및 절차 마련	수업 목표, 학습자 수준, 평가 목적 등에 따른 평가 방법 및 절차를 계획하고 마련하는 것	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기
	• 평가 도구 개발	학습 목표에 따른 평가 목표, 문항, 기준 선정 및 실행에 관하여 인지하고 이를 수행하는 것	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기
	• 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치를 위한 피드백 계획 및 실행을 교사가 인지하고 수행하는 것	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기
수업 상황	• 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료 등을 파악하고, 이를 준비하여 수업에 활용하는 것	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기
	• 교실 환경 및 수업 집단 조성	여러 도구 및 교구, 자료의 효율적인 활용성을 이해하고, 이에 맞춰 수업 환경 및 집단을 구성하는 것	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기
	• 학습 태도 및 수업 분위기 조성	교사가 해당 수업 내용에 관한 학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기를 인지하고, 이를 유도하는 것	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기
	• 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 또는 질문 등을 인지하고, 이를 효율적으로 대처하는 것	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기

나. 수업 평가 요소

수업 평가 영역에 따른 수업 평가 요소는 다음 〈표 Ⅶ-2〉와 같이 평정척도법을 이용하여 평정척도를 3단계 정도로 두는 것이 적당하며, 경우에 따라서는 5단계로 좀 더 세분화하여 사용하도록 한다.

수업 평가 요소를 수업 전(지식 보유 및 수업 계획), 수업 중(수업 실행), 수업 후(수업 반성)의 상황으로 세분화하여 제시하면 다음과 같다.

〈표 Ⅶ-2〉 수학 수업 평가 요소

수업 평가 영역		수업 평가 요소		평정척도		
				그렇다	보통이다	그렇지 못하다
교과 내용	1. 교육과정 이해 및 재구성	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 수학 내용	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 가치	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
학습자 이해	1. 학습자 수준	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 학습자 오개념	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 동기	적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 태도	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

교수 학습 방법 및 평가	1. 수업 목표 및 내용 반영	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습자 수준 및 태도 반영	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 평가 방법 및 절차 마련	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	6. 평가 도구 개발	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	7. 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
수업 상황	1. 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 교실 환경 및 수업 집단 조성	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 태도 및 수업 분위기 조성	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

따라서 이 수업 평가 틀은 교사가 자신의 수업 계획 및 진행, 그리고 반성을 통해 수업 개선은 물론, 더 나아가 교사 지식의 확장을 이끌 수 있도록 하는 데 도움을 줄 것이다. 이때 가급적 수업 후 즉각적으로 평가를 실시함으로써 자신의 수업 반성을 통하여 보다 수월하게 수업 개선이 이뤄질 수 있도록 한다. 또 학교 환경 및 수업 상황에 따라 동료 교사들과의 협력, 연구, 논의 등을 통하여 지속적으로 수업 개선을 도모하는 의지와 노력을 갖추도록 한다.

결론적으로 수업 평가 요소는 기본적으로 교사들이 어떤 지식을 보유하고, 그 지식을 토대로 수업을 계획하고 그 계획에 따라 수업을 실행하며, 더 나아가 반성 및 개선 여부에 활용되어야 한다. 만약 한 교사가 교과 내용, 학습자 이해, 교수 학습 방법 및 평가, 수업 상황 등에 관한 지식을 보유한다면, 수업 계획이나 수업 실행에서 교사의 보유된 지식이 고루 반영되어 드러나야 하며, 수업 반성의 측면도 마찬가지이다. 하지만 어떤 교사에 대해 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 부문을 동시에 판단하기는 무리이다. 일반적으로 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성의 네 부문 중에서 가장 진단하기에 용이하고 필요한 부문은 수업 실행 부문일 것이며, 또한 간편한 수업 평가를 위해서는 수업 실행 부문에 초점을 두어 교사 스스로 자기 평가를 수행하는 것이 좋다.

한마디로 교사가 자신이 수학 및 수학 교육 관련 지식을 어느 정도 보유하고 있는가에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 이 부문만을 스스로 점검하도록 한다. 마찬가지로 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 측면에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 해당 부문만을 선택하여 점검하도록 한다. 여기서 수업 계획과 수업 반성 측면의 평가 요소는 교사 자신의 교사 지식 및 전문성 향상을 위한 ‘자기 평가’ 용으로 활용 가능하다. 한편 수업 실행 측면의 평가 요소는 교사 자신은 물론 동료 교사의 판단에 따라 진단 및 평가가 가능하다. 이때 평가 요소의 활용 단위(즉, 얼마만큼 수업을 진행한 후 평가를 할 것인가)는 교사의 수업 여건이나 상황에 따라 결정하도록 한다.

Ⅷ. 교과서의 구성

01 편찬 방향

이 교과서는 새로 개정된 교육과정에 따라 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.

둘째, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 하여 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해하도록 하였다.

셋째, 자신의 생각을 표현하고 토론하며, 다양한 방법으로 수학적 내용을 다른 사람에게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 기를 수 있도록 하였다.

넷째, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

02 구성과 특징

■ 단원 소개

단원과 관련된 사진을 제시하고, 사회 현상이나 자연 현상에서 이 단원의 수학 내용이 이용되는 사례를 재미있게 소개함으로써 단원 학습의 의미와 흥미를 불어넣어 주도록 하였다.

■ 대단원 학습 목표

교육과정에서 제시하고 있는 내용 중 이 단원에서 학습해야 할 목표를 제시함으로써 학습의 방향을 이해하고 자기 주도적인 학습을 해 나갈 수 있도록 하였다.

■ 단원의 연계성

이 단원과 관련하여 이전에 학습했던 내용과 현재 단원에서 공부해야 할 내용, 이후에 학습할 내용을 제시하였다.

■ 준비 학습

각 중단원을 공부하는 데 꼭 필요한 선수 학습 요소와 이에 대한 문제를 제시함으로써 학습에 필요한 선행 지식을 상기하고 학습의 위계를 알 수 있도록 하였다.

■ 창의력 기르기

새로운 내용의 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 소개하여 학생들에게 학습에 대한 흥미를 불러일으키고 내용 전개의 실마리를 제공하였다. 또한 이를 통하여 수학의 가치와 유용성도 느끼고 창의적인 생각을 키울 수 있도록 스토리텔링 형식을 빌렸다.

■ 탐구 활동

창의력 기르기와 관련된 물음이나 수학적 사고를 유발할 수 있는 물음과 활동을 통하여 새로 도입할 수학의 원리나 개념을 탐구할 수 있도록 하였다.

■ 예제

학습 내용과 관련된 대표적인 문제와 그 풀이 과정을 함께 제시함으로써 학생들의 개념 이해를 더욱 탄탄히 하고 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

■ 문제, 발전 문제, 실생활 문제

학습한 내용을 확인하는 기본 문제를 제시함으로써 학생들이 공부한 내용을 바르게 이해하였는지 스스로 점검할 수 있도록 하였다.

■ 함께 만들어요(문제)

교과서에 주어진 문제를 해결하는 데에서 그치지 않고, 수학적 과정을 반영하여 학생들 스스로 문제를 만들어 보게 함으로써 학생들이 학습한 내용에 대한 문제 해결 방법과 과정을 보다 잘 이해할 수 있도록 하였다.

■ 창의 UP

생활 주변에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 원리와 법칙을 탐구하고, 수학의 개념을 깊이 생각해 보고 표현할 수 있게 하여 창의적인 생각을 기를 수 있도록 하였다.

■ 수학적 능력 관련(문제 해결, 추론, 의사소통)

여러 가지 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 기르기 위해 생활 주변의 문제 상황을 탐색하고 해결하는 문제를 제시하였다. 또 수학적 사실을 분석하고 정당화하는 문제를 통하여 수학적으로 사고하고 추론하는 능력을 향상시킬 수 있도록 하였다. 더불어 수학적 개념을 말로 표현하고 토론해 보게 함으로써 다른 사람과 효율적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 중단원 기초, 기본, 실력

중단원에서 학습한 내용에 대한 문제를 세 가지 수준으로 나누어 제시하였다. 기초에서는 중단원 학습 내용 중 최소 필수 내용을 확인하는 문제를 제공, 기본에서는 중단원 학습 내용 중 기본 개념을 확인하는 문제를 제공, 실력에서는 중단원 학습 내용을 완벽히 이해한 학생들의 수월성 교육에 이용하여 수준별 학습에 도움이 될 수 있도록 하였다.

■ 수행 과제

대단원에서 학습한 내용 중 탐구 소재를 선정하여 실험 또는 분석을 하거나 조사나 관찰을 하여 그 결과를 조직하고 표현함으로써 종합적인 문제 해결 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 학습에 대한 자기 평가

대단원 학습을 마친 후 자신의 학습을 되돌아보고, 이 단원에서 가장 자신 있게 이해한 개념을 확인하는 한편 미진한 부분은 선생님께 질문하는 형식으로 전달할 수 있도록 하였다. 또한 자신이 이 단원의 수업에 얼마나 열심히 참여했는지를 반성하게 하여 보다 나은 학습 태도를 유도함으로써 스스로 올바르게 학습할 수 있도록 하였다.

■ 대단원 핵심 한눈에 보기

대단원 학습을 마친 후 이 단원에서 배운 내용을 요약·정리하고, 새로 배운 용어와 기호를 제시함으로써 학습 내용을 스스로 점검하고 보완할 수 있도록 하였다.

■ 만화로 보는 수학 이야기

이 단원에서 학습한 내용 중 중요한 내용만을 엄선하여 만화로 보여 줌으로써 학습한 내용을 정리하고 주요 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 하였다.

■ 생각 키우기

만화와 더불어 학생들의 사고를 확산시키기 위하여 다양한 아이디어를 산출할 수 있는 열린 반응을 요구하는 수학적 과제를 제시하였다.

■ 대단원 평가 문제

대단원 학습을 종합적으로 평가하기 위하여 다양한 유형의 평가 문항들을 제시하였다. 또 마지막 두 문제는 서술형으로 제시하여 수학적 표현 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 공학적 도구(컴퓨터, 계산기)의 활용

단원의 내용 중에서 공학적 도구를 의미 있게 활용할 수 있는 학습 주제를 선정하여 인터넷, 컴퓨터, 계산기 등을 활용하는 방법을 제시함으로써 학습자의 흥미를 높이고, 효과적인 수업이 될 수 있도록 하였다.

■ 수학 산책

단원의 끝에 이 단원과 연관이 있는 다양한 이야기를 소개하여 수학에 흥미를 불러일으킬 수 있도록 하였다. 여기에 소개된 이야기는 실생활에서 수학이 활용되는 예나 그 내용이 출현하게 된 계기 등을 소재로 하여 학생들이 이해하기 쉽게 전개하였다.

IX. 연간 지도 계획안

단원	중단원	차시	교과서 쪽수	지도 내용
Ⅰ. 실수와 그 계산	1. 제곱근과 실수	1～8	10～29	1-1 제곱근과 그 성질 1-2 무리수 1-3 실수의 대소 관계 수준별 학습
	2. 근호를 포함한 식의 계산	9～17	30～49	2-1 제곱근의 곱셈과 나눗셈 2-2 제곱근의 덧셈과 뺄셈 수준별 학습
	단원 마무리	18～19	50～57	
Ⅱ. 이차방정식	1. 다항식의 인수분해	20～25	58～73	1-1 인수분해 1-2 인수분해 공식 수준별 학습
	2. 이차방정식	26～33	74～91	2-1 이차방정식과 그 해 2-2 이차방정식의 풀이 2-3 이차방정식의 활용 수준별 학습
	단원 마무리	34～35	92～99	
Ⅲ. 이차함수	1. 이차함수와 그래프	36～47	100～125	1-1 이차함수의 뜻 1-2 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 1-3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프 1-4 이차함수의 그래프의 성질 수준별 학습
	단원 마무리	48～49	126～135	
Ⅳ. 통계	1. 대푯값과 산포도	50～58	136～153	1-1 대푯값 1-2 산포도 수준별 학습
	단원 마무리	59～60	154～163	
Ⅴ. 피타고라스 정리	1. 피타고라스 정리	61～65	164～175	1-1 피타고라스 정리 수준별 학습
	2. 피타고라스 정리의 활용	66～70	176～187	2-1 평면도형에의 활용 2-2 입체도형에의 활용 수준별 학습
	단원 마무리	71～72	188～195	
Ⅵ. 삼각비	1. 삼각비	73～78	196～211	1-1 삼각비의 뜻 1-2 삼각비의 값 수준별 학습
	2. 삼각비의 활용	79～83	212～221	2-1 거리 구하기 2-2 넓이 구하기 수준별 학습
	단원 마무리	84～85	222～229	

Ⅶ. 원의 성질	1. 원과 직선	86～91	230～243	1-1 원과 현 1-2 원의 접선 수준별 학습
	2. 원주각	92～100	244～263	2-1 원주각 2-2 원주각의 활용 수준별 학습
	단원 마무리	101～102	264～273	

※ 위 계획안은 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도 등에 따라 적절히 조정하여 운영할 수 있다.

X. 참고 문헌

- 강완, 백석윤(1998). 초등수학 교육론. 동명사.
- 교육과학기술부(2007). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2007-79호 별책 8).
- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정 총론. 교육과학기술부 고시 제 2009-41호.
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8).
- 신이섭 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.
- 이홍우(1999). 지식의 구조와 교과. 서울: 교육과학사.
- 임찬빈, 이화진, 곽영순, 강대현, 박영석(2004). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅰ): 일반 기준 및 교과(사회, 과학, 영어) 기준 개발. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2004-5.
- 임찬빈, 이화진, 최승현, 오은순, 이경언, 이수정, 노은희, 권순달(2006). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅲ): 일반 기준 및 교과(국어, 수학, 기술·가정, 음악, 초등) 기준 상세화. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2006-3.
- 조지민, 김명화, 최인봉, 송미영, 김수진(2007). 2006년 국가수준 학업성취도 평가 연구: 수학. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRE 2007-3-4.
- 박선화, 김명화, 주미경(2010). 수학에 대한 정의적 특성 향상 방안 연구. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRI 2010-9.
- 박순경(2010). 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정의 개선 방향 탐색. 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향 23-72. 국가교육과학기술자문위원회 교육과정위원회.
- 최승현(2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구-좋은 수업 사례에 대한 질적 접근-. 한국교육과정평가원.
- 최승현, 황혜정(2007). 수학 수업 평가 기준 개발에 관한 기초 연구, 학교 수학, 9(3), pp.327~352.
- 황혜정, 김홍원, 박경미, 김수환, 김신영, 채선희(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구. 한국교육개발원 연구 보고 CR 97-10-1.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 증보판). 문음사.
- 황혜정(2012). 수학 수업에서 요구되는 교사 지식에 대한 평가 기준 재탐색. 한국학교수학교육학회 시리즈 E 수학교육논문집, 26(1), pp.29~55.
- Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P.(1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Danielson Charlotte(1997). *A collection of Performance Tasks and Rubrics*: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye O Education, Inc..
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J. Mortimer, E. & Scott, P.(1994). *Constructing scientific knowledge in the classroom*. Educational Researcher, 23, (7), 5-12.
- Greeno, J. G.(1978). *Nature of Problem Solving Abilities*, In W. K. Estes(Ed.). *Handbook of learning and cognitive process*: *Human Information Processing*(pp.239~270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulick, S. & Rudnick, J. A.(1984). *A Sourcebook for Teaching Problem Solving*. Boston: Allyn and Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematics Assessment*, In J. K. Stenmark(Ed.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*, In Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M.(1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, In W. Blum et. al.(Eds.), *Application and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*(pp. 22~31). West Sussex: Ells Horwood Limited.
- Pólya, G.(1957), *How to Solve it*. 2nd ed., New York: Doubleday & Company, Inc..
- Vosniadou, S.(2001). *How children learn*. *Educational Practices series*. Monograph No. 7. International Bureau of Education(IBE).

교사용 지도 자료

각론

I 실수와 그 계산

이 단원의 | 학 | 습 | 목 | 표 |

1. 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
2. 무리수의 개념을 이해한다.
3. 실수의 대소 관계를 이해한다.
4. 근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있다.

1. 제곱근과 실수

2. 근호를 포함한 식의 계산

아주 옛날부터 사람들은 자연 속에 내재된 아름다움을 칭송하면서 그 아름다움을 객관적으로 밝혀내기 위해 노력하였다. 이와 같은 노력으로 가장 아름답고 안정적인 비율을 발견하였는데, 고대 그리스의 에우독소스(Eudoxos: ?B.C. 400～?B.C. 350)는 이 비를 황금비(黃金比)라고 칭하였다.

8～9월경에 피는 해바라기의 꽃 머리 한가운데에 있는 씨들이 그리는 나선의 하나는 시계 방향으로 돌고, 다른 하나는 시계 반대 방향으로 돈다. 일반적으로 해바라기 꽃 머리에 있는 시계 방향의 나선 수와 시계 반대 방향의 나선 수의 비율은 황금비이다. 오늘날 명함, 교통카드, 텔레비전 화면 등에도 활용되고 있는 황금비 1 : 1.61803398874⋯의 1.61803398874⋯는 순환하지 않는 무한소수임이 알려져 있다.

단원을 시작하기 전에

우리는 일상생활에서 물건의 개수, 넓이, 무게 등을 측정하여 표현할 때, 자연수, 소수, 분수와 같은 유리수를 사용한다. 그런데 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이와 같이 유리수로 나타낼 수 없는 경우가 있다. 이 단원에서는 유리수가 아닌 수, 즉 무리수에 대하여 알게 하고, 유리수와 무리수를 통틀어 일컫는 실수의 체계와 그 계산 방법을 지도한다.

단원의 지도 목표

1. 제곱근과 실수

① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
② 제곱근의 대소 관계를 이해하게 한다.
③ 무리수의 뜻을 알고, 유리수와 구분할 수 있게 한다.
④ 실수의 뜻을 알고, 실수를 분류할 수 있게 한다.
⑤ 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있게 한다.
⑥ 실수의 대소 관계를 이해하게 한다.

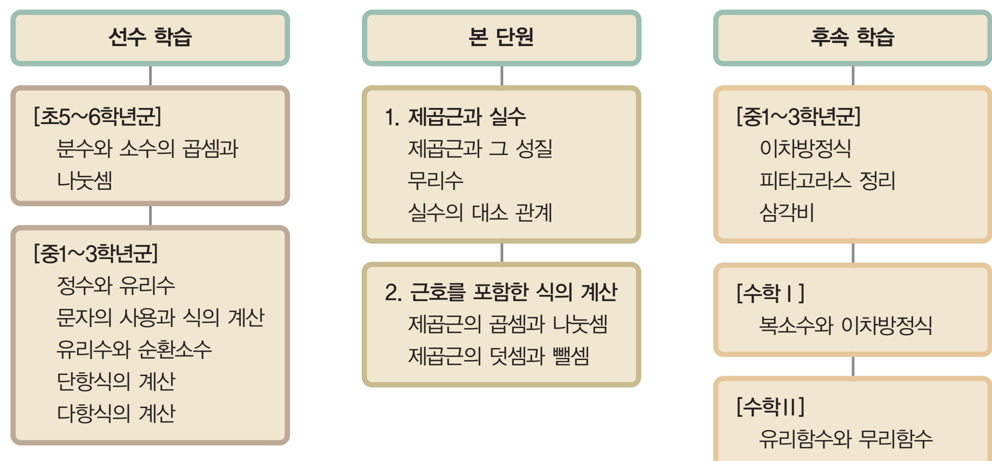
2. 근호를 포함한 식의 계산

① 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.
② 분모가 근호를 포함한 무리수인 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.
③ 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.
④ 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.
⑤ 제곱근의 반올림한 값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 근호 안의 수가 음수인 것은 다루지 않는다.
② 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 한다.
③ 다양한 상황을 이용하여 무리수의 필요성을 인식하게 한다.
④ 수직선은 실수에 대응하는 점들로 완전히 메워져 있다는 것을 직관적으로 알게 한다.
⑤ 실수의 계산에서 자신의 풀이 방법을 설명하게 한다.
⑥ 곱셈 공식을 활용한 분모의 유리화를 다룰 때에는 분모와 분자의 항의 개수가 각각 2개 이하인 경우만 다룬다.
⑦ 제곱근을 반올림한 값이 필요할 때에는 제곱근표나 계산기를 사용하고, 제곱근 풀이법은 다루지 않는다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관			10~11	• 단원의 개관	
1. 제곱근과 실수	준비 학습		12	• 정수와 유리수 • 유리수의 제곱 • 유리수의 대소 관계 • 유리수와 순환소수	
	1-1 제곱근과 그 성질	1~4	13~19	• 제곱근의 뜻과 표현 • 제곱근의 성질 • 제곱근의 대소 관계	제곱근, 근호, $\sqrt{}$
	1-2 무리수	5	20~22	• 무리수의 개념 • 실수의 분류	무리수, 실수
	1-3 실수의 대소 관계	6~7	23~26	• 무리수를 수직선 위에 나타내기 • 실수의 대소 관계	
	수준별 학습	8	27~29	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 근호를 포함한 식의 계산	준비 학습		30	• 소수의 계산 • 유리수의 계산 • 다항식의 계산 • 곱셈 공식	
	2-1 제곱근의 곱셈과 나눗셈	9~12	31~38	• 제곱근의 곱셈 • 제곱근의 나눗셈 • 분모의 유리화	분모의 유리화
	2-2 제곱근의 덧셈과 뺄셈	13~16	39~46	• 제곱근의 덧셈과 뺄셈 • 근호를 포함한 식의 혼합 계산 • 제곱근표나 계산기를 이용하여 제곱근의 반올림한 값 구하기 • 컴퓨터의 활용	
	수준별 학습	17	47~49	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		18~19	50~57	• 수행 과제 • 학습에 대한 자기 평가 • 대단원 핵심 한눈에 보기 • 만화로 보는 수학 이야기 • 대단원 평가 문제 • 수학 산책	

학습 지도 계획 수립 시 차시별 지도 계획을 바탕으로 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도에 따라 적절히 조정할 수 있다.

단원의 이론적 배경

1. 무리수의 역사적 배경

무리수의 존재가 밝혀지기 이전의 사람들도 제곱근을 구하는 과정에서 가끔 무리수를 접했던 것으로 여겨진다. 지금부터 약 4000년 전에 만들어진 것으로 추정되는 바빌로니아의 점토판에서는

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\,(=1.41421\dot{2}9\dot{6})$$

과 같이 $\sqrt{2}(=1.41421356237\cdots)$를 계산한 흔적을 찾아볼 수 있다.

이와 같이 바빌로니아 인들은 $\sqrt{2}$를 나타내는 값을 사용하고 있었지만, 그들이 무리수 자체를 인식하고 있었다고 보기는 어렵다. 단지 모든 제곱근을 그들이 사용하던 60진법으로 표현하는 것이 가능하다고 믿었던 것으로 여겨진다.

무리수에 대하여 논리적으로 관심을 가지기 시작한 때는 그리스 시대이고, 무리수의 실질적인 발견은 피타고라스학파에 의해서이다. 피타고라스학파는 직각이등변삼각형의 빗변과 한 등변의 길이의 비, 정사각형의 대각선과 한 변의 길이의 비와 같이 정수의 비로 표현할 수 없는 비가 있다는 것을 알았다. 또 그것이 정수의 비와는 전혀 다르다는 것을 인식하였다. 그리하여 그들은 $\sqrt{2}$와 1의 비가 정수의 비로 나타내어지지 않는다는 것, 즉 $\sqrt{2}$가 무리수라는 것을 증명하였다. 그러나 무리수를 수로 받아들이지는 못하였다.

무리수에 대한 이론은 테아이테토스(Theaetetos: ?B.C. 417~?B.C. 369)와 에우독소스(Eudoxos: ?B.C. 400~?B.C. 350) 등에 의해 엄밀한 체계를 갖추게 되었다. 이 이론은 유클리드(Euclid: ?B.C. 325~?B.C. 265)의 "원론(Elements)"에 자세히 실려 있다. 그러나 이때까지만 해도 무리수는 기하학적인 사고에서 비롯된 것이었고, 기하학적으로 작도될 수 있었다. 유클리드의 "원론"에서도 이러한 취급이 계속되었다. 그리스 수학은 이처럼 기하학적으로만 무리수를 취급했기 때문에 수론을 더는 발전시키지 못하였다. 그 결과 유리수와 무리수 사이의 이론적 골짜기를 건너뛰는 데 실패하였다.

그리스 수학의 이러한 전통과는 달리 인도 수학은 무리수를 유리수와 같이 수로 취급하였다. 인도인들은 무리수의 계산에 관심을 가지고 있었기 때문에

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

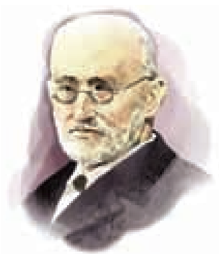
과 같이 계산할 수는 있었지만, 유리수와 무리수 사이의 논리적인 차이점을 깨닫지는 못하였다. 인도인들과 마찬가지로 아라비아 인들도 무리수를 자유롭게 취급하였고, 인도인들과 같은 방식으로 무리수를 계산하였다.

스테빈

그리하여 대략 1500년까지는 유럽에서도 무리수가 자유롭게 사용되었다. 그 후에는 스테빈(Stevin, S.: 1548~1620), 월리스(Wallis, J.: 1616~1703), 데카르트(Descartes, R.: 1596 ~1650) 등에 의해 무리수가 연속량을 나타낼 수 있는 추상적인 수로 인정되기에 이르렀다. 그러나 유리수와 무리수 사이의 관계를 정리한 것은 훨씬 후인 19세기 말에 데데킨트(Dedekind, J. W. R.: 1831~1916)와 칸토어(Cantor, G.: 1845~1918)에 의해서였다. 데데킨트는 절단의 개념을 이용하여, 칸토어는 폐구간에서 수렴하는 수열을 이용하여 실수를 유리수로부터 구성할 수 있다는 사실을 밝혔다.

자연수로부터 정수를 구성하고, 정수로부터 다시 유리수를 구성하는 과정까지는 대수적인 방법으로도 가능하다. 그러나 유리수로부터 실수를 구성하는 과정은 그렇지 않다. 여기에는 순서적인 방법과 코시 수열에 의한 위상적인 방법이 있는데, 전자는 데데킨트의 방법이고 후자는 칸토어의 방법이다.

2. 데데킨트의 절단


데데킨트

$\sqrt{2}$에 수렴하는 유리수의 항으로 이루어진 수열이

$a_1=1.4,\ a_2=1.41,\ a_3=1.414,\ \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$$

와 같이 존재할 때, 유리수는 극한값에 대하여 닫혀 있지 않으므로 그 안에서 극한 과정을 자유롭게 할 수 없다. 이 결함을 해결하기 위하여 유리수로부터의 확장이 필요한데, 그 수가 유리수 전체의 집합에서 데데킨트의 절단(cut)으로 만들어 낸 실수이다. 데데킨트의 절단은 다음과 같다.

유리수체 Q의 부분집합 A_1, A_2의 쌍 $(A_1,\ A_2)$가 다음 조건을 만족할 때, 이 쌍을 Q의 절단이라고 한다.

(i) $A_1\neq\varnothing,\ A_2\neq\varnothing$

(ii) $Q=A_1\cup A_2$

(iii) $a_1\in A_1,\ a_2\in A_2$이면 $a_1<a_2$

이때 A_1을 절단의 아래짝, A_2를 절단의 위짝이라고 한다.

따라서 어떠한 유리수도 반드시 A_1 아니면 A_2에 속하게 되며, A_1에 속하는 수는 모두 A_2에 속하는 수보다 작게 된다.

절단을 이용한 유리수와 무리수의 정의는 다음과 같다.

어떤 절단 $(A_1,\ A_2)$에서 A_1에 최대수가 없고 A_2에 최소수가 없을 때 이것을 무리수라고 하며, A_1에 최대수가 있거나 A_2에 최소수가 있을 때 이것을 유리수라고 부른다.

3. 칸토어의 코시 수열에 의한 방법

코시 수열은 다음과 같이 정의된다.

칸토어

수열 $\{a_n\}$에서 임의의 양수 ε(매우 작은 수)에 대하여 양의 정수 N이 존재하여

$n,\ m\geq N \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$

을 만족할 때, 수열 $\{a_n\}$을 코시 수열이라고 한다.

유리수로 이루어진 코시 수열을 다 모아서 이 집합을 S로 표시하고, S의 두 원소 $f=\{a_n\}$과 $g=\{b_n\}$ 사이의 관계 '$\sim$'를 다음과 같이 정의하자.

$$f\sim g \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

그러면 식 ①은 동치관계를 만족하고 따라서 동치류의 집합 $S/\sim=\{[f]\,|\,f\in S\}$가 우리가 사용해 온 실수 전체의 집합 R이다. 즉, 실수 전체의 집합 R는 유리수 전체의 집합 Q와 식 ①에서 본 것과 같이 유리수 전체의 집합 Q 위에 정의된 절댓값 $|\ \ |$에 대해서 유리수로 만들어진 코시 수열의 극한값의 모임이다.

교수 · 학습 과정안 (기초)

대단원	I. 실수와 그 계산	쪽수	교과서 13~15쪽
소단원	1. 제곱근과 실수　1-1 제곱근과 그 성질	차시	1/19
학습 목표	제곱근의 뜻을 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 양수를 제곱한 수, 음수를 제곱한 수에 대하여 질문한다. ◎ 학습 목표를 제시한다. • 제곱근의 뜻을 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **제곱근의 뜻** $a\geq0$일 때, 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다. 예 25의 제곱근: 제곱하여 25가 되는 수 ⇨ $5,\ -5$ $\frac{1}{49}$의 제곱근: 제곱하여 $\frac{1}{49}$이 되는 수 ⇨ $\frac{1}{7},\ -\frac{1}{7}$ **제곱근의 개수** a의 제곱근 $\begin{cases} a>0\text{이면 } 2\text{개} \\ a=0\text{이면 } 1\text{개} \\ a<0\text{이면 생각하지 않는다.} \end{cases}$ **제곱근의 표현** (1) $a>0$일 때, a의 제곱근 ⇨ $\sqrt{a}$ (양의 제곱근), $-\sqrt{a}$ (음의 제곱근) 예 3의 제곱근: $\sqrt{3},\ -\sqrt{3}$ (2) 근호를 사용하지 않고 제곱근을 나타낼 수 있는 수도 있다. 예 9의 제곱근: ±3 ◎ 문제 1, 2, 3을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	제곱근을 처음 구할 때, 그 수를 반으로 나누면 된다고 생각하는 경우가 있다. 제곱근의 뜻에 입각하여 제곱근을 구하도록 지도한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음 수의 제곱근을 구하여라. (1) 1　(2) $\frac{9}{4}$　(3) 25　(4) 0 답 (1) $1,\ -1$　(2) $\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}$　(3) $5,\ -5$　(4) 0 ◎ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본)를 과제로 선택하도록 한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 제곱근의 성질을 이해한다.	

수준별 학습지 (기초)

대단원	I. 실수와 그 계산	쪽수	교과서 13~15쪽
소단원	1. 제곱근과 실수 1-1 제곱근과 그 성질	차시	1/19
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

> $a\geq 0$일 때, 제곱하여 a가 되는 수를 a의 □이라 하고, $a>0$일 때, a의 양의 제곱근은 □, 음의 제곱근은 □로 나타낸다.

답 제곱근, $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

2 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 900　　(2) 0.16

(3) $\frac{25}{81}$　　(4) 7^2

답 (1) ± 30 (2) ± 0.4 (3) $\pm\frac{5}{9}$ (4) ± 7

3 다음 수의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) 6　　(2) 15

(3) 0.4　　(4) $\frac{1}{7}$

답 (1) $\pm\sqrt{6}$ (2) $\pm\sqrt{15}$ (3) $\pm\sqrt{0.4}$ (4) $\pm\sqrt{\frac{1}{7}}$

4 다음 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

> ㄱ. 8의 제곱근은 ± 4이다.
> ㄴ. 양수의 제곱근은 모두 2개이다.
> ㄷ. 제곱근 9는 3이다.
> ㄹ. -0.5는 0.25의 음의 제곱근이다.
> ㅁ. $\frac{1}{100}$은 $\frac{1}{10}$의 양의 제곱근이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

교수 · 학습 과정안 (기본)

대단원	I. 실수와 그 계산	쪽수	교과서 13~15쪽
소단원	1. 제곱근과 실수 1-1 제곱근과 그 성질	차시	1/19
학습 목표	제곱근의 뜻을 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 양수를 제곱한 수, 음수를 제곱한 수에 대하여 질문한다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 제곱근의 뜻을 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **제곱근의 뜻** $a\geq 0$일 때, 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다. 예 • 25의 제곱근 ⇨ $5,\ -5$ • $\frac{1}{49}$의 제곱근 ⇨ $\frac{1}{7},\ -\frac{1}{7}$ **제곱근의 개수** a의 제곱근 { $a>0$이면 2개 / $a=0$이면 1개 / $a<0$이면 생각하지 않는다. **제곱근의 표현** (1) $a>0$일 때, a의 제곱근 ⇨ $\sqrt{a}$ (양의 제곱근), $-\sqrt{a}$ (음의 제곱근) 예 3의 제곱근: $\sqrt{3},\ -\sqrt{3}$ (2) 근호를 사용하지 않고 제곱근을 나타낼 수 있는 수도 있다. 예 9의 제곱근: ± 3 ◐ 문제 1, 2, 3을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	제곱근을 처음 구할 때, 그 수를 반으로 나누면 된다고 생각하는 경우가 있다. 제곱근의 뜻에 입각하여 제곱근을 구하도록 지도한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음 수의 제곱근을 구하여라. (1) 49 (2) 0.04 답 (1) $7,\ -7$ (2) $0.2,\ -0.2$ ● 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어라. (1) $\sqrt{36}$ (2) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ 답 (1) 6 (2) $\frac{3}{4}$ ◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 제곱근의 성질을 이해한다.	

수준별 학습지 (기본)

대단원	I. 실수와 그 계산	쪽수	교과서 13~15쪽
소단원	1. 제곱근과 실수　1-1 제곱근과 그 성질	차시	1/19

(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:

1 다음 식을 만족하는 x의 값을 모두 구하여라.

(1) $x^2=81$　　(2) $x^2=225$　　(3) $x^2=0.49$

답 (1) $9,\ -9$　(2) $15,\ -15$　(3) $0.7,\ -0.7$

2 다음 수의 제곱근을 모두 구하여라.

(1) $\sqrt{4}$　　(2) $\sqrt{16}$

(3) $(-1)^2$　　(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

답 (1) $\pm\sqrt{2}$　(2) ±2　(3) ±1　(4) $\pm\frac{1}{2}$

3 다음을 구하여라.

(1) 6의 제곱근　　(2) 제곱근 11

답 (1) $\pm\sqrt{6}$　(2) $\sqrt{11}$

4 다음 수를 근호 $\sqrt{\ }$를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $\sqrt{9}$　　(2) $-\sqrt{16}$

(3) $-\sqrt{\frac{49}{100}}$　　(4) $\sqrt{1.21}$

답 (1) 3　(2) -4　(3) $-\frac{7}{10}$　(4) 1.1

교수 · 학습 과정안 (실력)

대단원	Ⅰ. 실수와 그 계산	쪽수	교과서 13~15쪽
소단원	1. 제곱근과 실수　1-1 제곱근과 그 성질	차시	1/19
학습 목표	제곱근의 뜻을 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 양수를 제곱한 수, 음수를 제곱한 수에 대하여 질문한다. ◎ 학습 목표를 제시한다. • 제곱근의 뜻을 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **제곱근의 뜻** $a\geq0$일 때, 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다. 예) • 25의 제곱근 ⇨ 5, -5　• $\frac{1}{49}$의 제곱근 ⇨ $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{7}$ **제곱근의 개수** a의 제곱근 $\begin{cases} a>0\text{이면 } 2\text{개} \\ a=0\text{이면 } 1\text{개} \\ a<0\text{이면 생각하지 않는다.} \end{cases}$ **제곱근의 표현** (1) $a>0$일 때, a의 제곱근 ⇨ $\sqrt{a}$ (양의 제곱근), $-\sqrt{a}$ (음의 제곱근) 예) 3의 제곱근: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ (2) 근호를 사용하지 않고 제곱근을 나타낼 수 있는 수도 있다. 예) 9의 제곱근: ±3 ◎ 문제 1, 2, 3을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	제곱근을 처음 구할 때, 그 수를 반으로 나누면 된다고 생각하는 경우가 있다. 제곱근의 뜻에 입각하여 제곱근을 구하도록 지도한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음을 구하여라. (1) 9^2의 제곱근　(2) 제곱근 1.5 (3) $\frac{2}{7}$의 양의 제곱근　(4) 1.4의 음의 제곱근 답 (1) 9, -9　(2) $\sqrt{1.5}$　(3) $\sqrt{\frac{2}{7}}$　(4) $-\sqrt{1.4}$ ◎ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 제곱근의 성질을 이해한다.	

수준별 학습지 (실력)

대단원	I. 실수와 그 계산	쪽수	교과서 13~15쪽
소단원	1. 제곱근과 실수 1-1 제곱근과 그 성질	차시	1/19
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 $1.\dot{7}$의 제곱근을 구하여라.

답 $\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}$

2 다음 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 0의 제곱근은 없다.
ㄴ. -5는 25의 제곱근이다.
ㄷ. 0.4의 제곱근은 0.2, -0.2이다.
ㄹ. 121의 두 제곱근을 x, y라고 하면 $x+y=0$이다.

답 ㄴ, ㄹ

3 다음 표의 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.

a	6	16
a의 양의 제곱근		
a의 음의 제곱근		
a의 제곱근		
제곱근 a		

답

a	6	16
a의 양의 제곱근	$\sqrt{6}$	4
a의 음의 제곱근	$-\sqrt{6}$	-4
a의 제곱근	$\pm\sqrt{6}$	±4
제곱근 a	$\sqrt{6}$	4

4 다음 수 중에서 그 제곱근을 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 것은 모두 몇 개인지 말하여라.

12, 0.49, $\frac{25}{100}$, 0.9, 10, $\frac{1}{4}$

답 3개

1 제곱근과 실수

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
② 제곱근의 대소 관계를 이해하게 한다.
③ 무리수의 뜻을 알고, 유리수와 구분할 수 있게 한다.
④ 실수의 뜻을 알고, 실수를 분류할 수 있게 한다.
⑤ 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있게 한다.
⑥ 실수의 대소 관계를 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
1-1 제곱근과 그 성질	제곱근의 뜻과 표현
	제곱근의 성질
	제곱근의 대소 관계
1-2 무리수	무리수의 개념
	실수의 분류
1-3 실수의 대소 관계	무리수를 수직선 위에 나타내기
	실수의 대소 관계
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 12 쪽

1 제곱근과 실수

끝을 보는 건 무리야!

$\sqrt{2}=1.41421356...$

준비학습

정수와 유리수
- 양의 정수, 0, 음의 정수를 통틀어 정수라고 한다.
- 분자와 분모(0이 아니다.)가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다.

유리수의 제곱
유리수 a에 대하여 $a^2=a\times a$로 계산한다.

유리수의 대소 관계
- 양수는 0보다 크고, 음수는 0보다 작다.
- 양수는 음수보다 크다.
- 양수는 그 절댓값이 클수록 크다.
- 음수는 그 절댓값이 클수록 작다.

유리수와 순환소수
모든 순환소수는 분자, 분모(0이 아니다.)가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

1 다음 중에서 정수가 아닌 유리수를 모두 찾아라.

㉠ 0.3　㉡ 0　㉢ $\frac{5}{7}$　㉣ $-\frac{8}{4}$

2 다음을 계산하여라.

(1) 3^2　(2) $(-3)^2$
(3) 0.7^2　(4) $(-0.7)^2$

3 다음 수를 작은 것부터 차례로 나열하여라.

$-\frac{3}{4}$, 0, 1, -2, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, -3

4 다음 중에서 옳은 것을 찾아라.

ㄱ. 유한소수는 유리수이다.
ㄴ. 무한소수는 모두 순환소수이다.
ㄷ. 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.
ㄹ. 모든 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

준비 학습의 해설

1

목표| 정수와 유리수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| ㉣ $-\frac{8}{4}=-2$

따라서 정수가 아닌 유리수는 ㉠, ㉢이다.

2

목표| 유리수의 제곱을 계산할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3^2=3\times3=\mathbf{9}$

(2) $(-3)^2=(-3)\times(-3)=\mathbf{9}$

(3) $0.7^2=0.7\times0.7=\mathbf{0.49}$

(4) $(-0.7)^2=(-0.7)\times(-0.7)=\mathbf{0.49}$

3

목표| 유리수의 대소를 비교하여 작은 것부터 차례로 나열할 수 있게 한다.

풀이| 양수는 그 절댓값이 클수록 크고, 음수는 그 절댓값이 작을수록 크고, (음수)$<0<$(양수)이므로

$\mathbf{-3,\ -2,\ -\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ 1}$

4

목표| 유리수와 유한소수, 순환소수의 뜻을 알고, 그 사이의 관계를 이해하게 한다.

풀이| ㄴ. 원주율 π는 순환하지 않는 무한소수이다.

ㄷ. 모든 순환소수는 분자, 분모(0이 아니다.)가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

ㄹ. $\frac{1}{3}$은 유한소수로 나타낼 수 없는 분수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

교과서 13 쪽

1-1 제곱근과 그 성질

● 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

제곱근이란 무엇인가?

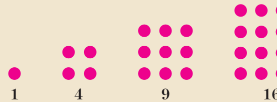
창의력 기르기

볼링 핀과 도형수

물건을 삼각형 모양으로 늘어놓았을 때, 그 삼각형을 이루는 물건의 개수를 삼각수라고 한다. 예를 들어 오른쪽 그림과 같은 볼링 핀의 배열은 삼각형을 이루고 있고, 이때 볼링 핀의 개수인 10은 삼각수이다. 이와 같이 도형의 모양으로 물건을 배열하여 수를 생각하는 도형수에는 삼각수, 사각수, 오각수 등이 있다.

탐구 활동

다음 그림과 같이 정사각형 모양으로 스티커를 붙여 나갈 때, 사용된 스티커의 개수 1, 4, 9, 16은 사각수이다. 이와 같은 방법으로 계속해서 스티커를 붙여 나간다고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1 36개의 스티커를 붙여서 정사각형 모양을 만들었을 때, 한 줄에 붙인 스티커의 개수를 구하여 보자.

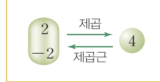
2 정사각형 모양으로 붙인 스티커에서 한 줄에 붙인 스티커의 개수와 전체에 붙인 스티커의 개수 사이에는 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.

탐구 활동에서 스티커의 개수가 1, 4, 9, 16인 정사각형 모양의 한 줄에 붙인 스티커의 개수는 각각 1, 2, 3, 4이고, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$이다.

그런데 $2^2=4$, $(-2)^2=4$이므로 제곱하여 4가 되는 수는 2와 -2이다.

이와 같이 음이 아닌 수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 **제곱근**이라고 한다. 이를테면 4의 제곱근은 2와 -2이다.

$x^2=a(a\geq0)$
⇨ x는 a의 제곱근



1-1 제곱근과 그 성질

소단원 지도 목표

① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
② 제곱근의 대소 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 제곱과 제곱근의 의미를 혼동하지 않도록 지도한다.

2. 중학교 교육과정에서 근호 안의 수가 음수가 될 수 없음을 주의하여 지도한다.

3. 근호는 처음 등장하는 기호이므로 그 의미를 분명히 알고, 근호의 사용을 익숙하게 할 수 있게 한다.

4. 양수의 제곱근은 모두 근호를 써서 나타낼 수 있으나 제곱인 수의 제곱근은 근호를 쓰지 않고도 나타낼 수 있음을 알게 한다.

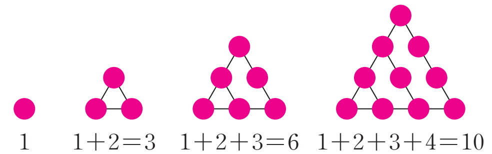
5. 양수 a의 제곱근과 $\sqrt{a}$를 혼동하지 않도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

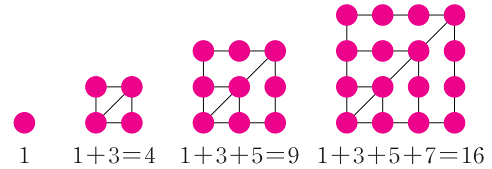
• 제곱근(square root)
• 근호(根號, radical sign)
• $\sqrt{\ }$

창의력 기르기 참/고/자/료

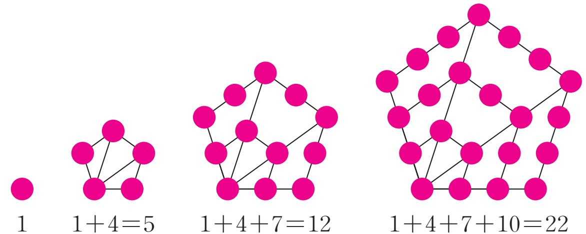
• 삼각수: 1, 3, 6, 10, 15, …



• 사각수: 1, 4, 9, 16, 25, …



• 오각수: 1, 5, 12, 22, 35, …



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 한 줄에 놓인 스티커의 개수와 전체 스티커의 개수 사이의 관계를 이용하여 제곱근의 뜻을 알게 하려는 것이다.

1. 한 줄에 붙인 스티커의 개수는 **6개**이다.

2. 한 줄에 붙인 스티커의 개수의 제곱은 전체에 붙인 스티커의 개수와 같다.

본문 해설

❶ 제곱하여 음수가 되는 유리수는 없으므로 음수의 제곱근은 생각하지 않는다. 따라서 $\sqrt{\ }$ 안에는 음수가 들어갈 수 없다.

1

목표| 제곱근의 뜻을 알고, 제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $8^2=64$, $(-8)^2=64$이므로 64의 제곱근은 $\mathbf{8}$, $\mathbf{-8}$이다.

(2) $10^2=100$, $(-10)^2=100$이므로 100의 제곱근은 $\mathbf{10}$, $\mathbf{-10}$이다.

(3) $0.3^2=0.09$, $(-0.3)^2=0.09$이므로 0.09의 제곱근은 $\mathbf{0.3}$, $\mathbf{-0.3}$이다.

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$, $\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$이므로 $\frac{1}{16}$의 제곱근은 $\mathbf{\frac{1}{4}}$, $\mathbf{-\frac{1}{4}}$이다.

참고| 양수의 두 제곱근은 절댓값이 같고, 부호는 다르다.

교과서 14 쪽

한편 제곱하여 0이 되는 수는 0이므로 0의 제곱근은 오직 0뿐이다. ❶ 와 음수를 제곱하면 항상 양수가 되므로 음수의 제곱근은 생각하지 않는다.

예 제 1 25의 제곱근을 구하여라.

● 풀이 $5^2=25$, $(-5)^2=25$이므로 25의 제곱근, 즉 제곱하여 25가 되는 수는 5와 -5이다.

답 ● 5, -5

문 제 1 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 64 (2) 100 (3) 0.09 (4) $\frac{1}{16}$

● $\sqrt{\ }$ 는 뿌리를 뜻하는 radix의 첫 글자 r의 모양을 따서 만든 것이고, 근호라는 말은 한자의 뿌리 근(根)자를 사용하여 정한 것이다.

❷ 제곱근은 항상 두 개가 있으며, 그중에서 양수인 것을 양의 제곱근이라 하 수인 것을 음의 제곱근이라고 한다.

이때 양수 a의 제곱근은 기호 $\sqrt{\ }$ 를 사용하여

양의 제곱근을 $\sqrt{a}$

음의 제곱근을 $-\sqrt{a}$

로 나타낸다.

> 양수 a의 제곱근
> ➔ $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

기서 기호 $\sqrt{\ }$ 를 **근호**라고 하며, $\sqrt{a}$를 '제곱근 a' 또는 '루트 a'라고 읽는다.

❸ $-\sqrt{a}$를 한꺼번에 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

7의 제곱근은 $\sqrt{7}$과 $-\sqrt{7}$이고, 이것을 $\pm\sqrt{7}$로 나타내기도 한다.

문 제 2 다음 수의 제곱근을 근호 $\sqrt{\ }$ 를 사용하여 나타내어라.

(1) 2 (2) 5 (3) 1.4 (4) $\frac{1}{3}$

본문 해설

❷ 절댓값이 같은 양수와 음수는 제곱하면 같은 값이 되므로 양수 a의 제곱근은 항상 2개이다.

❸ 양수 a의 제곱근인 $\pm\sqrt{a}$는 '$\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$'를 뜻하는 것으로 이 두 수를 한꺼번에 나타낸 것이다.

2

목표| 제곱근을 근호를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) 2의 제곱근은 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$, 즉 $\mathbf{\pm\sqrt{2}}$이다.

(2) 5의 제곱근은 $\sqrt{5}$와 $-\sqrt{5}$, 즉 $\mathbf{\pm\sqrt{5}}$이다.

(3) 1.4의 제곱근은 $\sqrt{1.4}$와 $-\sqrt{1.4}$, 즉 $\mathbf{\pm\sqrt{1.4}}$이다.

(4) $\frac{1}{3}$의 제곱근은 $\sqrt{\frac{1}{3}}$과 $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, 즉 $\mathbf{\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}$이다.

지/도/자/료 음수의 제곱근

중학교 교육과정에서는 양수와 0의 제곱근만을 다룬다. 고등학교 교육과정에서 다루는 내용을 간단하게 살펴보면 제곱하여 -1이 되는 수를 기호 i(허수단위)라 하고, $i^2=-1$에서 $i=\sqrt{-1}$, $-i=-\sqrt{-1}$과 같이 음수의 제곱근으로 확장하여 제곱근에 대한 성질을 음수 범위까지 다룬다. 이때 제곱근에 대한 성질은 다음과 같다.

두 실수 a, b에 대하여

(1) $a\le0$, $b\le0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(2) $a\ge0$, $b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

(3) $a\ge0$ 또는 $b\ge0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(4) $a\le0$ 또는 $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

교과서 15 쪽

❶ 호 $\sqrt{\ }$를 사용하지 않고 제곱근을 나타낼 수도 있다.
면 $3^2=9$, $(-3)^2=9$이므로 9의 제곱근은 3과 -3이다. 즉,

9의 양의 제곱근은 $\sqrt{9}=3$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{9}=-3$

이다.

예 제 2 다음 수를 근호 $\sqrt{\ }$를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $\sqrt{64}$ (2) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$

● 풀이 (1) $8^2=64$, $(-8)^2=64$이므로 64의 제곱근은 ±8이다. 그런데 $\sqrt{64}$는 64의 양의 제곱근이므로 $\sqrt{64}=8$이다.

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{4}$의 제곱근은 $\pm\frac{1}{2}$이다. 그런데 $-\sqrt{\frac{1}{4}}$은 $\frac{1}{4}$의 음의 제곱근이므로 $-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$이다.

답 ● (1) 8 (2) $-\frac{1}{2}$

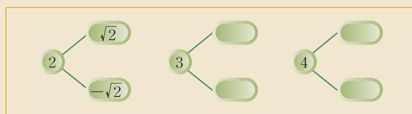
문제 3 다음 수를 근호 $\sqrt{\ }$를 사용하지 않고 나타내어라.

(1) $\sqrt{16}$ (2) $-\sqrt{81}$ (3) $\sqrt{\frac{25}{64}}$ (4) $-\sqrt{0.49}$

제곱근에는 어떤 성질이 있는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1 빈칸에 주어진 수의 제곱근을 써넣어 보자.

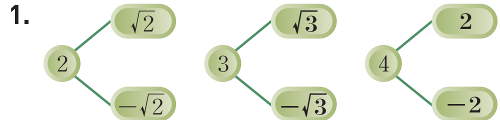


2 1에서 구한 제곱근을 각각 제곱하면 어떤 수가 되는지 말하여 보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 제곱근을 구하고, 다시 제곱한 수를 비교해 봄으로써 제곱근의 성질을 이해하게 하려는 것이다.

1.



2. 1에서 구한 제곱근을 각각 제곱하면 주어진 수가 된다.

⇨ $(\sqrt{3})^2=(-\sqrt{3})^2=\mathbf{3}$

$2^2=(-2)^2=\mathbf{4}$

본문 해설

❶ 모든 양수의 제곱근은 근호를 사용하여 나타낼 수 있지만, 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있으면 보통 근호를 사용하지 않고 간단히 나타낸다. 즉, 25의 제곱근을 $\pm\sqrt{25}$로 나타낼 수도 있지만 보통 ±5로 나타낸다.

3

목표 | 근호가 있는 수를 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\sqrt{16}$은 16의 양의 제곱근이므로 $\sqrt{16}=\mathbf{4}$

(2) $-\sqrt{81}$은 81의 음의 제곱근이므로 $-\sqrt{81}=\mathbf{-9}$

(3) $\sqrt{\frac{25}{64}}$는 $\frac{25}{64}$의 양의 제곱근이므로 $\sqrt{\frac{25}{64}}=\mathbf{\frac{5}{8}}$

(4) $-\sqrt{0.49}$는 0.49의 음의 제곱근이므로

$-\sqrt{0.49}=\mathbf{-0.7}$

읽/기/자/료 제곱근 기호

수학의 여러 기호가 그렇듯이 처음부터 $\sqrt{\ }$가 지금처럼 널리 통일되어 사용된 것은 아니었다. 옛 인도 사람들은 인도말로 무리수의 '무리'라는 말이 'carani'였으므로 그 첫 글자 c로 $\sqrt{\ }$를 표시하였으며, 아라비아 사람들은 제곱근의 근을 나타내는 'jidr'의 첫 글자를 사용하고 $\overset{>}{48}$($\sqrt{48}$)로 썼다. 또한 제곱근(square root)의 root와 관계가 있는 라틴어의 radix라고 쓰기도 하였다. 16~17세기에는 제곱근의 기호를 정사각형의 한 변이라는 뜻으로 정사각형 latus의 첫 글자 l을, 16세기 중엽에는 r^l과 같이 쓰기도 하였다. 오늘날처럼 제곱근을 $\sqrt{\ }$로 쓴 사람은 프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R.: 1596~1650)이다.

본문 해설

❶ a의 제곱근이란 제곱하여 a가 되는 수이므로 a의 제곱근인 $\pm\sqrt{a}$를 제곱하면 다시 a가 된다. 즉, $(\pm\sqrt{a})^2=a$이다.

❷ $\sqrt{a^2}$과 $\sqrt{(-a)^2}$은 각각 a^2과 $(-a)^2=a^2$의 양의 제곱근이고, $a>0$이므로 $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=a$이다.

4

목표 | 제곱근의 성질을 이해하게 한다.

풀이 | (1) $(\sqrt{7})^2=\mathbf{7}$

(2) $(-\sqrt{8})^2=\mathbf{8}$

(3) $\sqrt{10^2}=\mathbf{10}$

(4) $\sqrt{(-11)^2}=\mathbf{11}$

5

목표 | 제곱근의 성질을 이해하게 한다.

풀이 | (1) $-\sqrt{(-1.5)^2}=\mathbf{-1.5}$

(2) $-\sqrt{\left(\frac{6}{13}\right)^2}=\mathbf{-\frac{6}{13}}$

참고 | 제곱근의 성질은 정수뿐만 아니라

$(\sqrt{1.3})^2$, $(-\sqrt{1.3})^2$, $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$, $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}$

등과 같이 정수가 아닌 유리수에 대해서도 성립한다.

창의 UP

|출제 의도| 제곱근의 성질 $\sqrt{a^2}=a$가 성립하는 조건을 알고, $a<0$일 때에는 $\sqrt{a^2}=-a$임을 알게 하기 위한 문제이다.

풀이 | $a<0$일 때, $a=-b\ (b>0)$라고 하면

$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-b)^2}=b=-a$

따라서 $\sqrt{a^2}\neq a$이다.

교과서 16 쪽

$\sqrt{3}$과 $-\sqrt{3}$은 3의 제곱근이므로

$(\sqrt{3})^2=3,\ (-\sqrt{3})^2=3$

이다. ❶ 같은 방법으로 a가 양수일 때,

$(\sqrt{a})^2=a,\ (-\sqrt{a})^2=a$

이다.

한편 $2^2=4$, $(-2)^2=4$이므로

$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2,\ \sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

이다. ❷ 같은 방법으로 a가 양수일 때,

$\sqrt{a^2}=a,\ \sqrt{(-a)^2}=a$

이다.

$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ ⇄ a (제곱 / 제곱근)

이상을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 성질

$a>0$일 때,
(1) $(\sqrt{a})^2=a,\ (-\sqrt{a})^2=a$ (2) $\sqrt{a^2}=a,\ \sqrt{(-a)^2}=a$

(2) $\sqrt{(-a)^2}$을 $-a$로 생각하지 않도록 주의한다.

문제 4 다음 값을 구하여라.

(1) $(\sqrt{7})^2$ (2) $(-\sqrt{8})^2$
(3) $\sqrt{10^2}$ (4) $\sqrt{(-11)^2}$

발전 문제 5 다음 값을 구하여라.

(1) $-\sqrt{(-1.5)^2}$ (2) $-\sqrt{\left(\frac{6}{13}\right)^2}$

창의 UP $a<0$일 때, $\sqrt{a^2}\neq a$인 이유를 설명하여라.

지/도/자/료

1. 제곱근의 성질을 정리해 보면 다음과 같다.

$a>0$일 때

- a의 제곱근은 $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$이다.
- $(\sqrt{a})^2=a,\ (-\sqrt{a})^2=a$
- $\sqrt{a^2}=a,\ \sqrt{(-a)^2}=a$

2. 근호 안에 어떤 수를 제곱한 수가 있을 때, 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다. 즉,

양수 a에 대하여 $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=a$

음수 a에 대하여 $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a$

예 제 3 다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{6})^2+\sqrt{(-3)^2}$ (2) $(-\sqrt{2})^2-\sqrt{25}$

● 풀이 (1) $(\sqrt{6})^2=6$, $\sqrt{(-3)^2}=3$이므로

$(\sqrt{6})^2+\sqrt{(-3)^2}=6+3=9$

(2) $(-\sqrt{2})^2=2$, $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$이므로

$(-\sqrt{2})^2-\sqrt{25}=2-5=-3$

답 ● (1) 9 (2) −3

문제 6 다음을 계산하여라.

(1) $(-\sqrt{7})^2+\sqrt{2^2}$ (2) $(\sqrt{11})^2-(-\sqrt{5})^2$

(3) $(\sqrt{10})^2-\sqrt{36}$ (4) $-\sqrt{64}+\sqrt{(-3)^2}$

발전 문제 7 $a>0$일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{(-3a)^2}$을 간단히 하여라.

의사소통 '9의 제곱근'과 '제곱근 9'의 차이점을 말하여 보자.

6

목표| 제곱근의 성질을 이용하여 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(-\sqrt{7})^2+\sqrt{2^2}=7+2=\mathbf{9}$

(2) $(\sqrt{11})^2-(-\sqrt{5})^2=11-5=\mathbf{6}$

(3) $(\sqrt{10})^2-\sqrt{36}=(\sqrt{10})^2-\sqrt{6^2}=10-6=\mathbf{4}$

(4) $-\sqrt{64}+\sqrt{(-3)^2}=-\sqrt{8^2}+\sqrt{(-3)^2}=-8+3=\mathbf{-5}$

7

목표| 제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $a>0$이므로 $\sqrt{a^2}=a$

$-3a<0$이므로 $\sqrt{(-3a)^2}=-(-3a)=3a$

따라서 $\sqrt{a^2}+\sqrt{(-3a)^2}=a+3a=\mathbf{4a}$이다.

의/사/소/통

|출제 의도| $a>0$일 때, 'a의 제곱근'과 '제곱근 a'의 차이점을 정확히 알게 하기 위한 문제이다.

풀이| 9의 제곱근은 제곱하여 9가 되는 수이므로 3과 -3이다. 그러나 제곱근 9는 $\sqrt{9}$, 즉 9의 양의 제곱근이므로 3이다.

지/도/자/료

1. 두 수 a, b에 대하여

$$(-a)\times(-b)=a\times b$$

임은 이미 다루었으나 a, b가 유리수인 경우이었다. 따라서

$(-\sqrt{2})^2=(-\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2$

과 같이 계산하는 것보다는 $-\sqrt{2}$는 2의 음의 제곱근인 것에서

$$(-\sqrt{2})^2=2$$

임을 생각하게 한다.

2. a의 제곱근과 제곱근 a의 차이점 (단, $a>0$)

	a의 제곱근	제곱근 a
의미	제곱하여 a가 되는 수	a의 제곱근 중 양의 제곱근
표현	$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
개수	2개	1개
예	5의 제곱근: $\pm\sqrt{5}$	제곱근 5: $\sqrt{5}$

기/초/력 향상 문제

다음을 계산하여라.

1 $-\sqrt{100}+\sqrt{(-7)^2}$

2 $\sqrt{6^2}-(-\sqrt{11})^2$

3 $(-\sqrt{5})^2\times\sqrt{0.8^2}$

4 $\sqrt{(-16)^2}\div\left(\frac{4}{3}\right)^2$

답 **1** −3 **2** −5 **3** 4 **4** 9

창의력 기르기 참/고/자/료

포르투갈의 독특한 타일 장식을 일컫는 아줄레주라는 말은 '작고 아름다운 돌'이라는 뜻의 아라비아어에서 유래되었다.

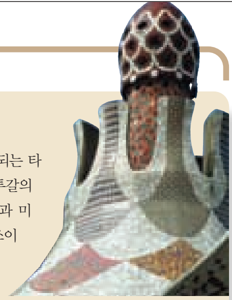
포르투갈의 마누엘 1세는 에스파냐 그라나다의 알람브라 궁전에 방문하여 이슬람 문화에서 전해진 타일 장식에 매료되어 포르투갈에 돌아온 후 자신의 왕궁을 아줄레주로 장식하였다고 전해진다. 이후 아줄레주는 포르투갈 전국에 퍼져 나가기 시작하였으며 각 시대의 문화에 따라 독특한 아줄레주가 만들어져 포르투갈의 문화적 창작물로 자리매김하게 되었다. 마누엘 1세의 지시로 처음 만들어진 포르투갈 최초의 아줄레주는 신트라 왕궁에 여전히 남아 있다.

사진은 에스파냐 카탈루냐 지방의 바르셀로나에 있는 구엘 공원의 한 건축물로, 이 공원의 곳곳에는 타일 장식이 있다.

교과서 18 쪽

제곱근의 대소 관계는 어떻게 알 수 있는가?

창의력 기르기

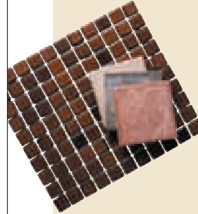


타일

건물의 바닥이나 벽면의 장식용 소재로 많이 사용되는 타일은 그 활용 범위가 넓다. 특히 아줄레주는 포르투갈의 독특한 타일 장식이다. 아줄레주는 유명한 건축물과 미술관뿐만 아니라 일반 가정집 등에서도 다양하게 쓰이고 있다.

탐구 활동

다음 그림과 같이 모눈의 간격이 1인 모눈종이 위에 크기가 다른 정사각형 모양의 타일 세 개가 있다. 타일 A의 넓이가 1일 때, 물음에 답하여 보자.



1 타일 B와 C의 넓이를 구한 후, 한 변의 길이를 각각 구하여 보자.

2 타일 B와 C의 넓이를 비교하여 보자. 또 두 타일의 한 변의 길이를 비교하여 보자.

3 **1**, **2**에서 제곱근의 대소 관계는 어떻게 알 수 있는지 말하여 보자.

한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이는 x^2 cm^{2}이다.

오른쪽 그림과 같이 넓이가 2 cm^2, 3 cm^{2}인 두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm이다. 그리고 두 정사각형에서 넓이가 큰 정사각형의 한 변의 길이가 더 길다. 즉,

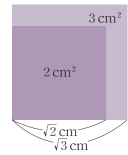
$$2<3\text{이면}\quad \sqrt{2}<\sqrt{3}$$

이

❶ 변의 길이가 긴 것이 넓이도 더 크므로

$$\sqrt{2}<\sqrt{3}\text{이면}\quad 2<3$$

이다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 크기가 다른 정사각형의 넓이와 한 변의 길이를 비교해 봄으로써 제곱근의 대소 관계를 알게 하려는 것이다.

1. 타일 B의 넓이는

$$2\times2-4\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)=4-2=\mathbf{2}$$

이므로 타일 B의 한 변의 길이는 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$이다.

타일 C의 넓이는

$$3\times3-4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)=9-4=\mathbf{5}$$

이므로 타일 C의 한 변의 길이는 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$이다.

2. 넓이를 비교하면 $\mathbf{2<5}$

한 변의 길이를 비교하면 $\boldsymbol{\sqrt{2}<\sqrt{5}}$

3. 정사각형의 넓이가 커지면 한 변의 길이도 길어지므로 **제곱근의 대소 관계는 근호 안의 수의 대소 관계와 같다.**

본문 해설

❶ 두 수가 양수일 때에는 근호 안의 수가 클수록 크고, 두 수가 음수일 때에는 근호 안의 수가 클수록 작다.

예 $2<3$이므로 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}>-\sqrt{3}$

지/도/자/료

구체적인 수로 많은 예를 제시하여 제곱근의 대소 관계를 쉽게 이해할 수 있도록 지도한다. 예를 들어 '$\sqrt{9}$와 $\sqrt{25}$는 어느 쪽이 더 큰가?'라고 물은 다음 정사각형의 넓이를 비교해 보도록 지도하여 제곱근의 대소 관계를 정사각형의 넓이와 한 변의 길이 사이의 관계를 통하여 쉽게 받아들일 수 있도록 한다.

교과서 19 쪽

일반적으로 넓이가 a, b인 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$이므로 정사각형의 넓이와 한 변의 길이 사이의 관계에 의하여 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

제곱근의 대소 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

(1) $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ (2) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

예제 4 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ (2) 3, $\sqrt{10}$

❶ [illegible] 있는 수와 없는 [illegible] 비교는 근호가 없는 수를 근호가 있는 수로 고친 뒤에 한다.

풀이 (1) $5<7$이므로 $\sqrt{5}<\sqrt{7}$

(2) $3=\sqrt{9}$이고 $9<10$이므로 $\sqrt{9}<\sqrt{10}$

따라서 $3<\sqrt{10}$이다.

답 (1) $\sqrt{5}<\sqrt{7}$ (2) $3<\sqrt{10}$

문제 8 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{7}$, $\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$

(3) 5, $\sqrt{5}$ (4) $\sqrt{8}$, 4

문제 9 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

(1) 0.6, $\sqrt{0.7}$ (2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}$

추론 $0<a<1$일 때, a와 $\sqrt{a}$의 대소 관계를 설명하여 보자.

본문 해설

❶ 근호가 있는 수와 근호가 없는 수의 대소 비교는 근호가 없는 수를 근호가 있는 수로 고쳐서 비교한다. 두 수가 모두 양수인 경우에는 두 수를 각각 제곱하여 비교할 수도 있다.

㉠ 0.7, $\sqrt{0.5}$의 대소 비교

|방법 1| $0.7=\sqrt{(0.7)^2}=\sqrt{0.49}$이고

$0.49<0.5$이므로 $\sqrt{0.49}<\sqrt{0.5}$

따라서 $0.7<\sqrt{0.5}$이다.

|방법 2| 두 수를 각각 제곱하면

$0.7^2=0.49$, $(\sqrt{0.5})^2=0.5$

이므로 $0.49<0.5$

따라서 $0.7<\sqrt{0.5}$이다.

8

목표| 제곱근의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $7>6$이므로 $\mathbf{\sqrt{7}>\sqrt{6}}$

(2) $11<13$이므로 $\mathbf{\sqrt{11}<\sqrt{13}}$

(3) $5=\sqrt{25}$이고 $25>5$이므로

$\sqrt{25}>\sqrt{5}$

따라서 $\mathbf{5>\sqrt{5}}$이다.

(4) $4=\sqrt{16}$이고 $8<16$이므로

$\sqrt{8}<\sqrt{16}$

따라서 $\mathbf{\sqrt{8}<4}$이다.

다른 풀이| (3) $5^2=25$, $(\sqrt{5})^2=5$이고

$25>5$이므로 $5>\sqrt{5}$

(4) $(\sqrt{8})^2=8$, $4^2=16$이고

$8<16$이므로 $\sqrt{8}<4$

9

목표| 제곱근의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $0.6=\sqrt{(0.6)^2}=\sqrt{0.36}$이고

$0.36<0.7$이므로

$\sqrt{0.36}<\sqrt{0.7}$

따라서 $\mathbf{0.6<\sqrt{0.7}}$이다.

(2) $\frac{1}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$이고 $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$이므로

$\sqrt{\frac{1}{3}}>\sqrt{\frac{1}{4}}$

따라서 $\mathbf{\sqrt{\frac{1}{3}}>\frac{1}{2}}$이다.

추/론

|출제 의도| 양수와 그 양수의 양의 제곱근의 대소 관계를 생각해 보게 하기 위한 문제이다.

풀이| $0<a<1$일 때, $a^2<a$이므로

$\sqrt{a^2}<\sqrt{a}$

그런데 $\sqrt{a^2}=a$이므로 $\mathbf{a<\sqrt{a}}$

참고| • $a>1$일 때, $a^2>a$이므로

$\sqrt{a^2}>\sqrt{a}$, $a>\sqrt{a}$

• $a=1$일 때, $a^2=a$이므로 $a=\sqrt{a}$

1-2 무리수

소단원 지도 목표

① 무리수의 뜻을 알게 한다.
② 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.
③ 실수의 뜻을 알고, 실수를 분류할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 다양한 상황을 이용하여 무리수의 필요성을 인식하게 한다.
2. $a>0$일 때, $\sqrt{a}$는 모두 무리수라고 생각하지 않도록 주의하여 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 무리수(無理數, irrational number)
- 실수(實數, real number)

창의력 기르기 참/고/자/료

보행의 안전성, 원활한 교통의 흐름, 도시의 수려한 미관을 위해 고안된 원형 육교는 우리나라의 경우 수원시 영통, 천안시 서북 등에 위치하고 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 역사적으로 사용된 π의 값을 소수로 나타내어 봄으로써 원주율 π가 순환하지 않는 무한소수임을 알게 하려는 것이다.

1. 유휘가 사용한 π의 값은 $3\frac{7}{50}=3.14$이고, 피보나치가 사용한 π의 값은 $\frac{864}{275}=3.14\dot{1}\dot{8}$이므로 **피보나치가 사용한 π의 값이 실제 π의 값에 더 가깝다.**

2. $3\frac{7}{50}$과 $\frac{864}{275}$는 **1**에서와 같이 유한소수로 나타낼 수 있거나 같은 숫자의 배열이 반복되지만 3.141592653⋯은 반복되는 숫자의 배열이 없다.

교과서 20 쪽

1-2 무리수

● 무리수의 개념을 이해한다.

무리수는 어떤 수인가?

창의력 기르기

원형 육교

번잡한 도로나 철로 위를 사람들이 안전하게 횡단할 수 있도록 공중으로 건너질러 놓은 다리를 육교라고 한다. 육교는 여러 가지 모양으로 건설되고 있는데 오른쪽 그림과 같은 원형 육교도 있다. 이와 같은 원형 육교를 설계하려면 원주율 π의 값이 필요하다.

탐구 활동

3세기경 중국의 수학자 유휘는 원주율 π의 값으로 $3\frac{7}{50}$을 사용하였고, 13세기 이탈리아의 수학자 피보나치는 π의 값으로 $\frac{864}{275}$를 사용하였다. 다음 물음에 답하여 보자.

1 두 수학자 중 누가 사용한 값이 π의 값 3.141592653⋯에 더 가까운지 말하여 보자.
2 두 수학자가 사용한 값을 소수로 나타내었을 때, 숫자의 배열이 3.141592653⋯과 다른 점을 말하여 보자.

우리는 "수학 ②"에서 유한소수와 순환소수는 유리수이고, 정수가 아닌 유리수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있음을 배웠다.

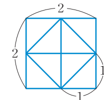
이제 $\sqrt{2}$가 유리수인지 알아보자.

● $a>0$, $b>0$일 때, $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이다.

오른쪽 그림에서 정사각형의 넓이를 비교하면 $1<2<4$이므로

$$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4},\ 1<\sqrt{2}<2$$

이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 정수가 아니다.



한편 정수가 아닌 유리수는 모두 기약분수로 나타낼 수 있고, 이 기약분수를 제곱하면 그 결과는 정수가 될 수 없다.

읽/기/자/료

고대 그리스의 수학자 아르키메데스(Archimedes: B.C. 287~B.C. 212)는 원에 내접하는 정96각형과 외접하는 정96각형의 변의 길이를 이용하여 π를 다음과 같이 구하였다.

$$3.1408\cdots<\pi<3.1428\cdots$$

이는 소수 둘째 자리까지 정확한 값이기 때문에 π를 '아르키메데스의 수'라고도 부른다.

다음은 역사적 π의 값의 예이다.

- 150년경 그리스의 프톨레마이오스: 3.1416
- 480년경 중국의 조충지: $\frac{355}{113}=3.1415929\cdots$
- 530년경 인도의 아리아바타: $\frac{62832}{20000}=3.1416$
- 1150년경 인도의 바스카라: $\frac{3927}{1250}=3.1416$은 정확한 값, $\frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}$은 부정확한 값, $\sqrt{10}=3.1622776\cdots$은 보통의 값이라고 하였다.
- 1579년 프랑스의 비에타: 393216각형을 이용하여 소수 90번째 자리까지 정확하게 계산하였다.

예를 들면

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},\ \left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4},\ \left(\frac{2}{7}\right)^2=\frac{4}{49},\ \cdots$$

는 모두 정수가 아니다.

그런데 $\sqrt{2}$를 기약분수로 나타낼 수 있다면 $(\sqrt{2})^2$은 정수가 될 수 없다. 그러나 $(\sqrt{2})^2=2$이므로 정수가 된다. 즉, $\sqrt{2}$는 기약분수로 나타낼 수 없다.

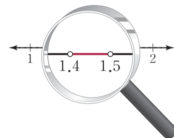
❶ $\sqrt{2}$는 정수도 아니고 기약분수로 나타낼 수도 없으므로 유리수가 아니다.

이와 같이 유리수가 아닌 수를 **무리수**라고 한다.

이제 무리수 $\sqrt{2}$를 다음과 같이 소수로 나타내어 보자.

(1) $1<2<4$이므로

$$1<\sqrt{2}<2$$



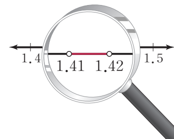
(2) $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$이므로

$$1.4^2<2<1.5^2$$

$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$

(3) $1.41^2=1.9881$, $1.42^2=2.0164$이므로

$$1.41<\sqrt{2}<1.42$$



(4) $1.414^2=1.999396$,

$1.415^2=2.002225$이므로

$$1.414<\sqrt{2}<1.415$$

같은 방법으로 계속하면 $\sqrt{2}$는 다음과 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타난다.

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504880\cdots$$

또 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π 등도 모두 무리수임이 알려져 있고, 다음과 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타난다.

$$\sqrt{3}=1.73205080756\cdots,\ \sqrt{5}=2.23606797749\cdots,\ \pi=3.14159265358\cdots$$

한편 $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{3}-1$ 등도 무리수이며 이들을 소수로 나타내면 다음과 같다.

$$\sqrt{2}+1=2.41421356237\cdots,\ \sqrt{3}-1=0.73205080756\cdots$$

주의 $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{0.49}$ 등은 각각 2, 3, $\frac{1}{2}$, 0.7 등과 같으므로 유리수이다.

지/도/자/료 (무리수)+(유리수)=(무리수)

일반적으로 (무리수)+(유리수)=(무리수)이다. 이는 다음과 같이 설명할 수 있다.

a가 무리수이고, b가 유리수일 때, $a+b$가 유리수 c가 된다고 하면 $a+b=c$에서 $a=c-b$이다. 이때 $c-b$는 두 유리수의 차이므로 유리수이고, a는 무리수이므로 모순이다. 따라서 c는 무리수이다.

그러나 학생들에게는 이와 같은 설명보다는 구체적인 예를 통하여 유한소수와 순환하지 않는 무한소수의 합은 순환하지 않는 무한소수가 됨을 지도한다.

본문 해설

❶ $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 다음과 같이 보일 수도 있다.

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\text{(단, }a,\ b\text{는 양의 정수이고 서로소이다.)} \quad \cdots\cdots ①$$

라고 하자.

①의 양변을 제곱하면

$$2=\frac{a^2}{b^2}\text{에서}\quad 2b^2=a^2$$

따라서 a는 2의 배수이다. 그러면

$$a=2m\ (m\text{은 양의 정수})$$

으로 놓을 수 있으므로

$$2b^2=a^2\text{에서}\quad b^2=2m^2$$

이 되고, b도 2의 배수이다.

a, b 모두 2의 배수이므로 a, b에 공약수 2가 있어서 ①에서 서로소라고 한 것에 모순이 된다.

따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

읽/기/자/료 람베르트(Lambert, J. H.: 1728~1777)

π는 소수점 아래 어느 자리에서도 끝나지 않고, 순환마디도 없이 무한히 계속되는 무리수이다. 이 사실이 참이라는 것은 1761년 람베르트에 의하여 밝혀졌다.

π는 유리수를 계수로 갖는 유한차수의 다항식의 해가 될 수 없고 이러한 종류의 수를 초월수라고 한다. 이로부터 원주율은 어떤 정수에 적당한 유리수를 곱하고 제곱근을 씌우는 등의 연산을 조합하여 얻어낼 수 없다는 사실을 알 수 있다. 또 π가 초월수라는 사실을 통하여 그리스 3대 난제 중의 하나였던 '자와 컴퍼스만을 사용하여 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 문제'가 유한한 대수적 방법으로는 불가능하다는 것을 밝혀낼 수 있다.

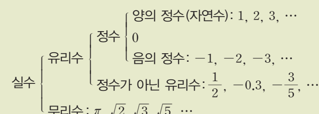
교과서 22 쪽

문제 1 다음 중에서 무리수가 써 있는 칸을 모두 찾아 색칠하여라.

$\sqrt{7}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{0.1}$	$-\sqrt{0.04}$
$-\sqrt{13}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	π	$\sqrt{(-2.6)^2}$	$\sqrt{2}+3$

유리수와 무리수를 통틀어 **실수**라고 하는데, 앞으로 수라고 하면 실수를 말하는 것으로 한다.

한편 실수를 분류하면 다음과 같다.



문제 2 보기의 수 중에서 다음에 해당하는 수를 모두 찾아 써라.

보기: π, 2, $-\sqrt{7}$, 1.3, $0.4\dot{3}$, -3, $-\sqrt{4}$, $1+\sqrt{2}$

(1) 자연수 (2) 정수 (3) 유리수
(4) 무리수 (5) 실수

문제 3 문제 2와 같이 수를 분류하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

창의 UP 순환소수는 무리수가 아님을 설명하여라.

1

목표| 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$, $\sqrt{3^2}=3$,
$-\sqrt{0.04}=-\sqrt{(0.2)^2}=-0.2$,
$\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$, $\sqrt{(-2.6)^2}=2.6$

따라서 $\sqrt{64}$, $\sqrt{3^2}$, $-\sqrt{0.04}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{(-2.6)^2}$은 유리수이므로 무리수가 써 있는 칸을 모두 색칠하면 다음과 같다.

$\sqrt{7}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{0.1}$	$-\sqrt{0.04}$
$-\sqrt{13}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	π	$\sqrt{(-2.6)^2}$	$\sqrt{2}+3$

2

목표| 실수를 분류할 수 있게 한다.

풀이| (1) 자연수는 **2**뿐이다.
(2) 모든 자연수는 정수이고, $-\sqrt{4}=-2$이므로 정수는 $\mathbf{2}$, $\mathbf{-3}$, $\mathbf{-\sqrt{4}}$이다.
(3) 모든 정수는 유리수이고, 유한소수와 순환소수도 유리수이므로 유리수는 $\mathbf{2}$, $\mathbf{1.3}$, $\mathbf{0.4\dot{3}}$, $\mathbf{-3}$, $\mathbf{-\sqrt{4}}$이다.
(4) 무리수는 $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{-\sqrt{7}}$, $\mathbf{1+\sqrt{2}}$이다.
(5) 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 하므로 실수는 $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{-\sqrt{7}}$, $\mathbf{1.3}$, $\mathbf{0.4\dot{3}}$, $\mathbf{-3}$, $\mathbf{-\sqrt{4}}$, $\mathbf{1+\sqrt{2}}$이다.

3

|출제 의도| 실수를 분류하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 실수의 분류를 능숙하게 할 수 있게 하기 위한 문제이다.

예시| 보기의 수 중에서 다음에 해당하는 수를 모두 찾아 써라.

보기: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, -7, $\frac{1}{9}$, $\sqrt{0.9}$

(1) 자연수 (2) 정수 (3) 유리수
(4) 무리수 (5) 실수

풀이| (1) $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$이므로 자연수는 $\sqrt{4}$이다.
(2) 정수는 $\sqrt{4}$, -7이다.
(3) 유리수는 $\sqrt{4}$, -7, $\frac{1}{9}$이다.
(4) 무리수는 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{0.9}$이다.
(5) 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 하므로 실수는 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, -7, $\frac{1}{9}$, $\sqrt{0.9}$이다.

창의 UP

|출제 의도| 무리수는 순환하지 않는 무한소수임을 이해하고 유리수와 무리수를 구별할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이| $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$와 같이 모든 순환소수는 분자, 분모(0이 아니다.)가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다. 즉, 무리수가 아니다.

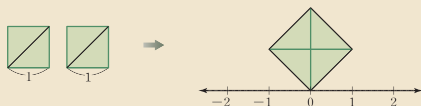
교과서 23 쪽

1-3 실수의 대소 관계

● 실수의 대소 관계를 이해한다.

무리수는 수직선 위에 어떻게 나타낼 수 있는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 두 정사각형으로 큰 정사각형을 만들어 수직선 위에 놓고, 물음에 답하여 보자.



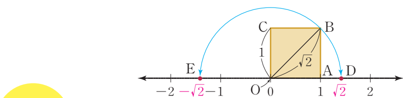
1 처음 정사각형의 넓이를 이용하여 큰 정사각형의 넓이를 구하여 보자.

2 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구하여 보자.

3 큰 정사각형의 한 변의 길이를 수직선 위에 나타낼 수 있는 방법을 말하여 보자.

우리는 모든 유리수에 대응하는 점을 수직선 위에 나타낼 수 있음을 "수학 ①"에서 배웠다. 이제 무리수 $\sqrt{2}$에 대응하는 점을 수직선 위에 나타내어 보자.

다음 그림과 같이 수직선 위에 한 변의 길이가 1인 정사각형 OABC를 그리면 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$가 된다. 따라서 원점 O를 중심으로 하고 대각선 OB를 반지름으로 하는 원을 그릴 때, 수직선과 만나는 점 D, E는 각각 무리수 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$를 나타낸다.



❶ [illegible]이 수직선 위에는 유리수에 대응하는 점뿐만 아니라 무리수에 대응하는 점[illegible] 있음을 알 수 있다.

실제로 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다.

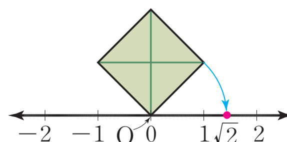
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 정사각형의 한 변의 길이로부터 무리수를 구하고, 그 무리수를 수직선 위에 나타내는 방법을 알게 하려는 것이다.

1. 넓이가 1인 정사각형 2개를 잘라 붙였으므로 큰 정사각형의 넓이는 2이다.

2. 넓이가 2인 큰 정사각형의 한 변의 길이를 x라고 하면 $x^2=2$이고 x는 양수이므로 $x=\sqrt{2}$이다. 따라서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

3. 다음 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 정사각형의 한 변을 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, 원점 O의 오른쪽에서 수직선과 만나는 점을 찾는다.



1-3 실수의 대소 관계

소단원 지도 목표

① 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있게 한다.
② 실수의 대소 관계를 이해하게 한다.
③ 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 존재함을 알게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 두 수의 차의 부호를 조사하여 두 실수의 대소를 비교할 수 있게 한다.

2. 수직선 위의 점들은 실수에 대응하는 점들로 완전히 메워져 있다는 것을 직관적으로 알게 한다.

본문 해설

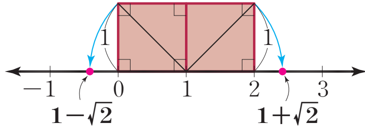
❶ 수직선 위에는 유리수에 대응하는 점이 무수히 많다. 그러나 유리수에 대응하지 않는 점도 무수히 많으며 이 점들이 바로 무리수에 대응하는 점들이다.
유리수에서와 마찬가지로 무리수에서도 양수는 원점의 오른쪽에 있는 점에 대응시키고, 음수는 원점의 왼쪽에 있는 점에 대응시킨다.

읽/기/자/료 무리수(irrational number)

irrational은 'ir+ratio+nal'로써, ir은 '…이 아니다.'를, ratio는 '비 또는 비율'을 뜻한다. 따라서 irrational number는 '두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수'를 의미한다. irrational은 그리스 어 $\alpha\lambda o\gamma o\sigma$에서 유래했다고 전해진다. 그리스의 피타고라스학파는 임의의 길이를 단위 길이로 정했을 때, 정사각형의 한 변의 길이와 대각선의 길이는 단위 길이에 대한 정수배로 나타낼 수 없다는 사실을 발견하였다. 이와 같이 두 선분의 길이가 같은 단위 길이에 대한 정수배로 나타낼 수 없을 때를 $\alpha\lambda o\gamma o\sigma$라고 하였다.

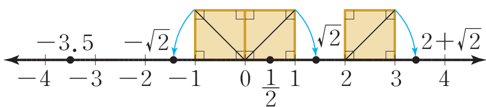
목표 | 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이 | 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$와 $1-\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 실수를 수직선 위에 나타내고, 수직선에서 왼쪽에 있는 수보다 오른쪽에 있는 수가 더 큰 수임을 이용하여 실수의 대소 관계를 이해하게 하려는 것이다.



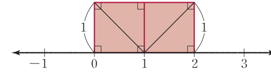
1. $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$

2. -3.5, $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$

교과서 24 쪽

따라서 한 실수는 수직선 위의 한 점에 대응하고, 거꾸로 수직선 위의 한 점에는 한 실수가 대응한다.

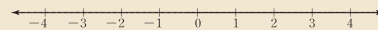
문제 | 다음 수직선 위에 무리수 $1+\sqrt{2}$와 $1-\sqrt{2}$를 나타내어라.



실수의 대소 관계는 어떻게 알 수 있는가?

탐구 활동 다음 실수를 아래의 수직선 위에 나타내고, 물음에 답하여 보자.

$\frac{1}{2}$, -3.5, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$

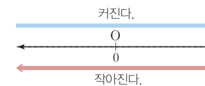


1 수직선 위에서 1보다 오른쪽에 나타낼 수 있는 수는 어느 것인가?

2 수직선 위에서 왼쪽에 나타낼 수 있는 수부터 차례로 말하여 보자.

❶ …에서와 마찬가지로 실수를 수직선 위에 나타내었을 때, 오른쪽에 있는 수 …쪽에 있는 수보다 크다.

원점 O를 기준으로 오른쪽에 있는 수를 양의 실수(양수), 왼쪽에 있는 수를 음의 실수(음수)라고 한다.



본문 해설

❶ 실수에서도 유리수에서와 같이 다음이 성립한다.

(1) 양수는 0보다 크고 음수는 0보다 작다.

(2) 양수는 그 절댓값이 클수록 크다.

(3) 음수는 그 절댓값이 클수록 작다.

지/도/자/료 실수의 대소 관계

1. 제곱 판정법

(1) $a>0$, $b>0$일 때 $a>b$이면 $a^2>b^2$

(2) $a>0$, $b>0$일 때 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$이면 $a>b$

2. 제곱근 판정법

(1) $a>0$, $b>0$일 때 $a^2>b^2$이면 $a>b$

(2) $a>0$, $b>0$일 때 $a>b$이면 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$

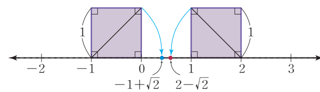
3. 빼기 판정법

임의의 a, b에 대하여 $a-b>0$이면 $a>b$

예를 들어 두 실수 $-1+\sqrt{2}$와 $2-\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같이 $-1+\sqrt{2}$보다 $2-\sqrt{2}$가 오른쪽에 있으므로

$$-1+\sqrt{2}<2-\sqrt{2}$$

이다.



이제 수직선을 이용하지 않고 실수의 대소를 비교하는 방법을 알아보자.
실수에서도 유리수에서와 같이 부등식의 성질이 성립한다.
즉, [illegible] 두 실수 a, b에 대하여
❶ [illegible]0이면 $a-b+b>0+b$이므로 $a>b$이다.
[illegible]<0이면 $a-b+b<0+b$이므로 $a<b$이다.
따라서 두 실수 a, b의 대소 관계는 $a-b$의 값의 부호에 따라 정할 수 있다.

일반적으로 다음이 성립한다.

실수의 대소 관계
두 실수 a, b에 대하여
(1) $a-b>0$이면 $a>b$　　(2) $a-b=0$이면 $a=b$　　(3) $a-b<0$이면 $a<b$

예제 1 두 실수 $\sqrt{7}-2$와 1의 대소를 비교하여라.

두 실수 a, b에 대하여 $a-b<0$이면 $a<b$이다.

풀이 $(\sqrt{7}-2)-1=\sqrt{7}-3=\sqrt{7}-\sqrt{9}$
$7<9$이므로 $\sqrt{7}<\sqrt{9}$에서 $\sqrt{7}-\sqrt{9}<0$
따라서 $(\sqrt{7}-2)-1<0$이므로 $\sqrt{7}-2<1$

답 $\sqrt{7}-2<1$

문제 2 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.
(1) $\sqrt{3}+4$, 5　　(2) 2, $\sqrt{11}-1$
(3) $\sqrt{5}-2$, 1　　(4) $4-\sqrt{2}$, 2

본문 해설

❶ 실수에서도 유리수에서와 같이 부등식의 성질이 성립한다.
(1) 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.
⇨ $a<b$이면 $a+c<b+c$, $a-c<b-c$
(2) 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.
⇨ $a<b$, $c>0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$
(3) 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀐다.
⇨ $a<b$, $c<0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

2

목표 두 실수의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이 (1) $(\sqrt{3}+4)-5=\sqrt{3}-1$
$=\sqrt{3}-\sqrt{1}>0$
이므로 $\sqrt{3}+4>5$
(2) $2-(\sqrt{11}-1)=3-\sqrt{11}$
$=\sqrt{9}-\sqrt{11}<0$
이므로 $2<\sqrt{11}-1$
(3) $(\sqrt{5}-2)-1=\sqrt{5}-3$
$=\sqrt{5}-\sqrt{9}<0$
이므로 $\sqrt{5}-2<1$
(4) $(4-\sqrt{2})-2=2-\sqrt{2}$
$=\sqrt{4}-\sqrt{2}>0$
이므로 $4-\sqrt{2}>2$

읽/기/자/료

여러 가지 수에 대한 영어 단어는 다음과 같다.
- 자연수: Natural number
- 정수: Integer
- 유리수: Rational number
- 무리수: Irrational number
- 실수: Real number

여기서 자연수, 실수를 각각 나타내는 기호 N, R는 각 수를 나타내는 영어 단어의 첫 글자임을 알 수 있다.
한편 정수를 나타내는 기호 Z는 '수'를 뜻하는 독일어 단어 Zahl의 첫 글자이고, 유리수를 나타내는 기호 Q는 '몫'을 뜻하는 영어 단어 Quotient의 첫 글자이다.

기/초/력 향상 문제

다음 수의 대소를 비교하여라.

1 $\sqrt{26}$, $\sqrt{28}$　　**2** $\sqrt{35}$, 6　　**3** $2+\sqrt{2}$, 3

답 **1** $\sqrt{26}<\sqrt{28}$ **2** $\sqrt{35}<6$ **3** $2+\sqrt{2}>3$

3

목표| 두 무리수 사이에 있는 무리수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{5}=2.23606797\cdots$, $\sqrt{10}=3.16227766\cdots$에 대하여

$\sqrt{5}+0.1=2.33606797\cdots$
$\sqrt{5}+0.01=2.24606797\cdots$
$\sqrt{5}+0.001=2.23706797\cdots$
$\vdots$

이므로

$\sqrt{5}<\sqrt{5}+0.001<\sqrt{5}+0.01<\sqrt{5}+0.1<\sqrt{10}$

따라서 $\boldsymbol{\sqrt{5}+0.001}$, $\boldsymbol{\sqrt{5}+0.01}$, $\boldsymbol{\sqrt{5}+0.1}$은 $\sqrt{5}$와 $\sqrt{10}$ 사이에 있는 무리수이다.

다른 풀이| $\sqrt{10}-0.1=3.06227766\cdots$
$\sqrt{10}-0.01=3.15227766\cdots$
$\sqrt{10}-0.001=3.16127766\cdots$
$\vdots$

이므로

$\sqrt{5}<\sqrt{10}-0.1<\sqrt{10}-0.01<\sqrt{10}-0.001<\sqrt{10}$

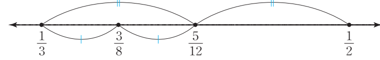
따라서 $\sqrt{10}-0.1$, $\sqrt{10}-0.01$, $\sqrt{10}-0.001$은 $\sqrt{5}$와 $\sqrt{10}$ 사이에 있는 무리수이다.

참고| 임의의 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

교과서 26 쪽

수직선 위에서 두 유리수 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$에 대응하는 두 점을 이은 선분의 중점은 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\div2=\frac{5}{12}$인 유리수에 대응하는 점이다. 이것은 각각 유리수 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$에 대응하는 두 점 사이에 있다. 즉, 두 유리수 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$ 사이에는 유리수 $\frac{5}{12}$가 있음을 알 수 있다.

마찬가지로 $\frac{1}{3}$과 $\frac{5}{12}$ 사이에는 $\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\right)\div2=\frac{3}{8}$이 있다.



이와 같은 방법으로 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있음을 알 수 있다.

한편 두 무리수

$\sqrt{2}=1.41421356237\cdots$, $\sqrt{3}=1.73205080756\cdots$

에 대하여

$\sqrt{2}+0.1$, $\sqrt{2}+0.01$, $\sqrt{2}+0.001$, $\cdots$

등은 모두 순환하지 않는 무한소수이고, 이들은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 무리수이다.

$\sqrt{2}+0.1=1.51421\cdots$
$\sqrt{2}+0.01=1.42421\cdots$
$\sqrt{2}+0.001=1.41521\cdots$

따라서 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있음을 알 수 있다.

일반적으로 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.

문제 3 두 무리수 $\sqrt{5}$와 $\sqrt{10}$의 값이 다음과 같을 때, 두 무리수 사이에 있는 무리수를 3개 찾아라.

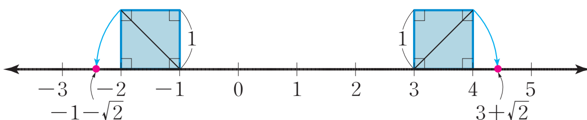
$\sqrt{5}=2.23606797\cdots$, $\sqrt{10}=3.16227766\cdots$

문제해결 수직선을 이용하여 $-1-\sqrt{2}<n<3+\sqrt{2}$를 만족시키는 정수 n을 모두 구하여 보자.

문/제/해/결

|출제 의도| 무리수를 수직선 위에 나타내고 두 무리수 사이에 있는 정수를 모두 구할 수 있게 하기 위한 문제이다.

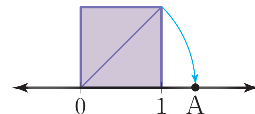
풀이|



위의 수직선에서 $-1-\sqrt{2}<n<3+\sqrt{2}$를 만족시키는 정수 n은 $\mathbf{-2}$, $\mathbf{-1}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$이다.

지/도/자/료 실수와 수직선

수직선은 유리수에 대응하는 점만으로 완전하게 메울 수 없다. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이에 해당되는 점 A는 유리수가 아니기 때문이다.



수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들 전체로 완전히 메워지는데, 실수 전체의 모든 수는 수직선 위의 점 전체와 한 개씩 대응한다. 즉, 임의의 한 실수는 반드시 수직선 위의 한 점에 대응하고, 수직선 위의 한 점은 반드시 한 실수를 나타낸다.

중 / 단 / 원 기초

> a의 제곱근
> ⇨ $x^2=a\ (a\ge 0)$를 만족시키는 수 x

1 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 6　　(2) 13　　(3) 0.25　　(4) $\frac{25}{81}$

> $a>0$일 때,
> ① $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$
> ② $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

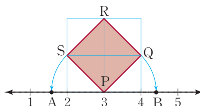
2 다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2$　　(2) $\sqrt{144}-\sqrt{9}$

3 다음 중에서 무리수를 모두 찾아라.

$\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, -5, $\sqrt{5}$, $-\frac{2}{7}$

4 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 2인 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 정사각형 PQRS를 그린 것이다. 수직선 위의 두 점 A, B에 대응하는 수를 각각 구하여라.



> 두 실수 a, b에 대하여
> ① $a-b>0$이면 $a>b$
> ② $a-b=0$이면 $a=b$
> ③ $a-b<0$이면 $a<b$

5 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.

(1) $2+\sqrt{6}$, 5　　(2) $\sqrt{3}-2$, $\sqrt{3}-\sqrt{7}$

중/단/원 기초

1

목표| 제곱근의 뜻을 알고, 제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 6의 제곱근은 $\pm\boldsymbol{\sqrt{6}}$이다.

(2) 13의 제곱근은 $\pm\boldsymbol{\sqrt{13}}$이다.

(3) $0.5^2=0.25$, $(-0.5)^2=0.25$이므로 0.25의 제곱근은 $\pm\mathbf{0.5}$이다.

(4) $\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{25}{81}$, $\left(-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{25}{81}$이므로 $\frac{25}{81}$의 제곱근은 $\pm\boldsymbol{\frac{5}{9}}$이다.

참고| a의 제곱근 ⇨ 제곱하여 a가 되는 수
⇨ $x^2=a$를 만족시키는 수 x

2

목표| 제곱근의 성질을 이용하여 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2=3+5=\mathbf{8}$

(2) $\sqrt{144}-\sqrt{9}=\sqrt{12^2}-\sqrt{3^2}$
$=12-3=\mathbf{9}$

3

목표| 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$이므로 유리수이다.
따라서 무리수는 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{\sqrt{5}}$이다.

참고| 근호 안의 수가 유리수의 제곱인 수는 유리수이다.

4

목표| 수직선 위의 점에 대응하는 무리수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| 정사각형 PQRS의 넓이는

$2\times2\times\frac{1}{2}=2$

이므로 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이다.
즉, $\overline{PQ}=\overline{PS}=\sqrt{2}$
따라서 점 A에 대응하는 수는 $\mathbf{3-\sqrt{2}}$이고, 점 B에 대응하는 수는 $\mathbf{3+\sqrt{2}}$이다.

5

목표| 두 실수의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(2+\sqrt{6})-5=\sqrt{6}-3=\sqrt{6}-\sqrt{9}<0$이므로
$\mathbf{2+\sqrt{6}<5}$

(2) $(\sqrt{3}-2)-(\sqrt{3}-\sqrt{7})=\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{7}-2$
$=\sqrt{7}-\sqrt{4}>0$

이므로 $\mathbf{\sqrt{3}-2>\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

중/단/원 기본

교과서 28 쪽

1

목표| 제곱근의 뜻을 알고, 제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 169의 제곱근은 $\sqrt{169}=13$과 $-\sqrt{169}=-13$, 즉 $\boldsymbol{\pm 13}$이다.

(2) $\frac{2}{3}$의 제곱근은 $\sqrt{\frac{2}{3}}$와 $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, 즉 $\boldsymbol{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}}$이다.

(3) 5^2의 제곱근은 $\sqrt{5^2}=5$와 $-\sqrt{5^2}=-5$, 즉 $\boldsymbol{\pm 5}$이다.

(4) 0의 제곱근은 **0**뿐이다.

(5) $\sqrt{81}=9$의 제곱근은 $\sqrt{9}=3$과 $-\sqrt{9}=-3$, 즉 $\boldsymbol{\pm 3}$이다.

(6) $(-\sqrt{7})^2=7$의 제곱근은 $\sqrt{7}$과 $-\sqrt{7}$, 즉 $\boldsymbol{\pm\sqrt{7}}$이다.

2

목표| 제곱근을 이용하여 정사각형의 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 직사각형의 넓이가 $3\times5=15(\text{cm}^2)$이므로 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이는 $\boldsymbol{\sqrt{15}}$ **cm**이다.

3

목표| 무리수의 뜻을 알고, 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| ㄱ. 순환하지 않는 무한소수는 유리수가 아니다.
따라서 옳은 것은 **ㄴ, ㄷ, ㄹ**이다.

4

목표| 실수의 대소를 비교하여 작은 것부터 차례로 나열할 수 있게 한다.

풀이| $1.5=\sqrt{1.5^2}=\sqrt{2.25}$, $3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$
따라서 주어진 수를 작은 것부터 차례로 나열하면
$\boldsymbol{\sqrt{2}, 1.5, \sqrt{3}, \sqrt{8}, 3}$

중/단/원 기본

제곱근 **1** 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 169 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 5^2
(4) 0 (5) $\sqrt{81}$ (6) $(-\sqrt{7})^2$

제곱근 **2** 가로, 세로의 길이가 각각 3 cm, 5 cm인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

실수 **3** 다음 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 무한소수는 유리수이다.
ㄴ. 모든 유리수와 무리수는 실수이다.
ㄷ. 2는 유리수이고, $\sqrt{2}$는 무리수이다.
ㄹ. $\sqrt{7}$은 순환하지 않는 무한소수이다.

실수의 대소 관계 **4** 다음 수를 작은 것부터 차례로 나열하여라.

$\sqrt{8}$, $\sqrt{2}$, 1.5, 3, $\sqrt{3}$

실수의 대소 관계 **5** 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라.

(1) 1 □ $\sqrt{5}-1$ (2) 2 □ $3-\sqrt{3}$
(3) $2+\sqrt{6}$ □ $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ □ $\sqrt{11}-\sqrt{5}$

5

목표| 두 실수의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1-(\sqrt{5}-1)=1-\sqrt{5}+1$
$=2-\sqrt{5}<0$
이므로 $1 \boxed{<} \sqrt{5}-1$

(2) $2-(3-\sqrt{3})=2-3+\sqrt{3}$
$=-1+\sqrt{3}>0$
이므로 $2 \boxed{>} 3-\sqrt{3}$

(3) $(2+\sqrt{6})-(\sqrt{6}+\sqrt{3})=2+\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{3}$
$=2-\sqrt{3}>0$
이므로 $2+\sqrt{6} \boxed{>} \sqrt{6}+\sqrt{3}$

(4) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})-(\sqrt{11}-\sqrt{5})=\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{11}+\sqrt{5}$
$=\sqrt{7}-\sqrt{11}<0$
이므로 $\sqrt{7}-\sqrt{5} \boxed{<} \sqrt{11}-\sqrt{5}$

교과서 29 쪽

중/단/원 실력

1 $\sqrt{16}$의 양의 제곱근을 a, $(-\sqrt{5})^2$의 양의 제곱근을 b라고 할 때, a, b의 대소를 비교하여라.

• 근호 안이 a^2의 꼴이 되도록 하는 x의 값을 생각해 본다.

2 $\sqrt{135x}$가 자연수가 되도록 하는 x의 값 중에서 가장 작은 자연수를 구하여라.

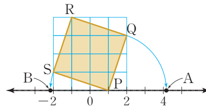
3 $4<\sqrt{3x}<5$를 만족시키는 자연수 x의 값을 모두 구하여라.

• 정사각형의 넓이가 10임을 이용한다.

4 오른쪽 그림에서 □PQRS가 정사각형일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 A, B에 대응하는 수를 각각 구하여라.

(2) 두 점 A, B 사이에 있는 점에 대응하는 무리수를 3개 구하여라.



5 다음 중에서 두 무리수 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 실수에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 3은 두 수 사이에 있다.
ㄴ. 두 수 사이에는 한 개의 정수가 있다.
ㄷ. $\sqrt{2}-0.01$은 두 수 사이에 있는 무리수이다.
ㄹ. 두 수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

중/단/원 실력

1

목표| 제곱근의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{16}=4$의 양의 제곱근은 $a=2$

$(-\sqrt{5})^2=5$의 양의 제곱근은 $b=\sqrt{5}$

따라서 $2<\sqrt{5}$이므로 $\boldsymbol{a<b}$

2

목표| 제곱근의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{135x}=\sqrt{3^2\times3\times5\times x}$

따라서 조건을 만족시키는 x의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $3\times5=\mathbf{15}$이다.

3

목표| 제곱근의 대소 관계를 이해하고, 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $4<\sqrt{3x}<5$에서 $\sqrt{16}<\sqrt{3x}<\sqrt{25}$

$\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$이므로 $16<3x<25$

$5\frac{1}{3}<x<8\frac{1}{3}$

따라서 구하는 자연수 x의 값은 **6**, **7**, **8**이다.

참고| $a>0$, $b>0$일 때, $a<\sqrt{x}<b$에서 각 변을 제곱하면 $a^2<x<b^2$

4

목표| 수직선 위에 실수를 대응시키고, 두 점 사이에 있는 무리수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\square\text{PQRS}=4^2-4\times\left(\frac{1}{2}\times3\times1\right)$

$=16-6$

$=10$

정사각형 PQRS의 넓이가 10이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

즉, $\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{PS}}=\sqrt{10}$

$\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PQ}}$, $\overline{\text{PB}}=\overline{\text{PS}}$이므로 두 점 A, B에 대응하는 수는 각각 $\mathbf{1+\sqrt{10}}$, $\mathbf{1-\sqrt{10}}$이다.

(2) $\mathbf{\sqrt{10}}$, $\mathbf{-1+\sqrt{10}}$, $\mathbf{-2+\sqrt{10}}$

이외에도 여러 가지가 있다.

5

목표| 실수의 성질을 이해하게 한다.

풀이| ㄱ. $\sqrt{2}<\sqrt{5}$이고 $\sqrt{5}<3$이므로 3은 두 수 사이에 있는 수가 아니다.

ㄴ. 두 수 사이에 있는 정수는 2뿐이다.

ㄷ. $\sqrt{2}-0.01<\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2}-0.01$은 두 수 사이에 있는 무리수가 아니다.

ㄹ. 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

따라서 옳은 것은 **ㄴ**, **ㄹ**이다.

2 근호를 포함한 식의 계산

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.
② 분모가 근호를 포함한 무리수인 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.
③ 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.
④ 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.
⑤ 제곱근의 반올림한 값을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
2-1 제곱근의 곱셈과 나눗셈	제곱근의 곱셈
	제곱근의 나눗셈
	분모의 유리화
2-2 제곱근의 덧셈과 뺄셈	제곱근의 덧셈과 뺄셈
	근호를 포함한 식의 혼합 계산
	제곱근표나 계산기를 이용하여 제곱근의 반올림한 값 구하기
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 30 쪽

2 근호를 포함한 식의 계산

준 | 비 | 학 | 습

소수의 계산
- 소수에 10, 100, 1000, …을 곱하면 곱하는 수의 0의 개수만큼 소수점을 오른쪽으로 옮긴다.
- 소수에 0.1, 0.01, 0.001, …을 곱하면 곱하는 수의 소수점 아래 자릿수만큼 소수점을 왼쪽으로 옮긴다.

1 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $3000=3\times\square=30\times\square$
(2) $0.003=3\times\square=30\times\square$
(3) $0.652\times100=\square$
(4) $0.652\times0.01=\square$

유리수의 계산
유리수의 나눗셈은 나누는 수의 역수를 곱하여 계산한다.

2 다음을 계산하여라.

(1) $(-2)\times(-7)$　(2) $15\div(-3)$
(3) $(-6)\times\frac{1}{3}$　(4) $\left(-\frac{4}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{21}\right)$

다항식의 계산
다항식의 덧셈과 뺄셈은 괄호를 풀고, 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

3 다음을 계산하여라.

(1) $(a+2b)+(3a-b)$　(2) $(6a+b)+2(a-3b)$
(3) $(3a+b)-(4a-3b)$　(4) $2(4a+b)-3(a+5b)$

곱셈 공식
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b)$
  $=x^2+(a+b)x+ab$

4 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+8)^2$　(2) $(x-3)^2$
(3) $(x+1)(x-1)$　(4) $(x+2)(x+5)$

준비 학습의 해설

1

목표| 소수의 곱셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3000=3\times\boxed{\mathbf{1000}}=30\times\boxed{\mathbf{100}}$
(2) $0.003=3\times\boxed{\mathbf{0.001}}=30\times\boxed{\mathbf{0.0001}}$
(3) $0.652\times100=\boxed{\mathbf{65.2}}$
(4) $0.652\times0.01=\boxed{\mathbf{0.00652}}$

2

목표| 유리수의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(-2)\times(-7)=+(2\times7)=\mathbf{14}$
(2) $15\div(-3)=15\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(15\times\frac{1}{3}\right)=\mathbf{-5}$
(3) $(-6)\times\frac{1}{3}=\mathbf{-2}$
(4) $\left(-\frac{4}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{21}\right)=\left(-\frac{4}{7}\right)\times\left(-\frac{21}{2}\right)=\mathbf{6}$

3

목표| 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(a+2b)+(3a-b)=a+2b+3a-b$
$=a+3a+2b-b=\mathbf{4a+b}$
(2) $(6a+b)+2(a-3b)=6a+b+2a-6b$
$=6a+2a+b-6b=\mathbf{8a-5b}$
(3) $(3a+b)-(4a-3b)=3a+b-4a+3b$
$=3a-4a+b+3b=\mathbf{-a+4b}$
(4) $2(4a+b)-3(a+5b)=8a+2b-3a-15b$
$=8a-3a+2b-15b$
$=\mathbf{5a-13b}$

4

목표| 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+8)^2=x^2+2\times x\times8+8^2=\mathbf{x^2+16x+64}$
(2) $(x-3)^2=x^2-2\times x\times3+3^2=\mathbf{x^2-6x+9}$
(3) $(x+1)(x-1)=x^2-1^2=\mathbf{x^2-1}$
(4) $(x+2)(x+5)=x^2+(2+5)x+2\times5=\mathbf{x^2+7x+10}$

교과서 31 쪽

2-1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

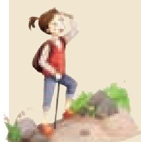
● 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.

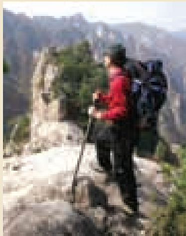
제곱근의 곱셈은 어떻게 하는가?

창의력 기르기

등산

전 국토의 70 %가 산인 우리나라에서 등산은 건강을 지키기 위하여 손쉽게 할 수 있는 여가 활동 중 하나이다.
특히 높은 산의 정상에 오르면 매우 먼 곳까지 볼 수 있다. 맑은 날 높은 산에 올랐을 때, 눈으로 볼 수 있는 거리인 가시거리 d(m)와 산의 높이 h(m)는 $d=\sqrt{12800}\times\sqrt{h}$의 관계가 있다고 한다.





탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1 높이가 $h=100$(m)인 산에 올랐을 때의 가시거리를 구하는 식을 세워 보자.
2 높이가 $h=400$(m)인 산에 올랐을 때의 가시거리를 구하는 식을 세워 보자.

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$의 계산에 대하여 알아보자.
예를 들어 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$은 양수이고, 이를 제곱하면

❶ $(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})$
$=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2=2\times3$

이므로 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$은 2×3의 양의 제곱근이다.
그런데 2×3의 양의 제곱근은 $\sqrt{2\times3}$이므로

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$$

이다.

실수의 곱셈에서 다음과 같은 계산 법칙이 성립한다.
• 교환법칙: $ab=ba$
• 결합법칙: $(ab)c=a(bc)$

새로 나온 용어와 기호

• 분모의 유리화
(rationalization of denominator)

창의력 기르기 참/고/자/료

가시거리는 물체나 빛이 분명하게 보이는 최대 거리로 대기가 혼탁한 정도를 나타내는 척도의 하나로 사용된다. 가시거리는 습도와 대기오염 물질 등에 따라 변하며 항공기의 운항 등에 직접적인 영향을 미친다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 가시거리와 산의 높이 사이의 관계식을 이용하여 제곱근의 곱셈 방법을 이해하게 하려는 것이다.

2-1 제곱근의 곱셈과 나눗셈

소단원 지도 목표

① 제곱근의 곱셈을 할 수 있게 한다.
② 제곱근의 나눗셈을 할 수 있게 한다.
③ 분모가 근호를 포함한 무리수인 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 제곱근의 곱셈을 구체적인 예를 통해 확인한 후, 문자를 사용하여 일반화할 수 있도록 지도한다.

2. 분모가 무리수인 분수와 분모가 유리수인 분수의 차이를 알게 함으로써 분모를 유리화할 필요성을 느끼도록 지도한다.

3. 제곱근의 계산 결과는 근호 안에 제곱인 수가 없도록 고쳐서 나타내고, 분모가 근호가 있는 무리수이면 분모를 유리화하여 나타내도록 한다.

1. $h=100$(m)일 때, 가시거리 d는
$d=\sqrt{12800}\times\sqrt{100}=\boldsymbol{\sqrt{12800}\times10}$**(m)**

2. $h=400$(m)일 때, 가시거리 d는
$d=\sqrt{12800}\times\sqrt{400}=\boldsymbol{\sqrt{12800}\times20}$**(m)**

본문 해설

❶ 실수의 곱셈에서도 유리수와 마찬가지로 교환법칙과 결합법칙이 성립하므로 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2&=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3}) \\ &=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{2})\times\sqrt{3} && \text{결합법칙} \\ &=\sqrt{2}\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times\sqrt{3} && \text{교환법칙} \\ &=(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3}) && \text{결합법칙} \\ &=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2 \\ &=2\times3\end{aligned}$$

본문 해설

❶ $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$임을 다음과 같이 설명할 수 있다.

$a>0$, $b>0$일 때

$x=\sqrt{a}\sqrt{b}$ ……①

라고 하면 $x>0$이다.

①의 양변을 제곱하면

$x^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$

제곱근의 뜻에 의하여

$x=\sqrt{ab}$ 또는 $x=-\sqrt{ab}$

그런데 $x>0$이므로

$x=\sqrt{ab}$ ……②

①, ②에서 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

❷ $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$, $2\times\sqrt{3}$, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 등은 문자가 들어 있는 식에서와 같이 주로 곱셈 기호 $\times$를 생략하고 $\sqrt{2}\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{a}\sqrt{b}$ 등으로 쓴다.

교과서 32 쪽

❶ 으로 두 양수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$를 제곱하면 ab가 되므로 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 는 양의 제곱근인 $\sqrt{ab}$와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 곱셈 [1]

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

❷ 는 곱셈 기호 $\times$ 여 $\sqrt{a}\sqrt{b}$와 같이 나타내기도 한다.

보기 (1) $\sqrt{3}\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{15}$ (2) $\sqrt{2}\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4$

문제 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{2}\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{3}\sqrt{12}$

(3) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7}$ (4) $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10}$

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}$과 같이 근호 안의 수에 제곱인 인수가 있으면 이것을 근호 밖으로 꺼내어 근호 안을 간단한 수로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{2^2}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

이다. 또 $3\sqrt{5}$와 같은 무리수는 근호 밖의 양수를 제곱하여 근호 안에 넣어 나타낼 수도 있다. 즉,

$$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{45}$$

이다.

- $a\times\sqrt{b}$는 곱셈 기호 $\times$를 생략하여 $a\sqrt{b}$와 같이 나타내기도 한다.
- $2\sqrt{3}$과 같이 근호가 없는 수를 항상 앞에 쓴다.

일반적으로 다음이 성립한다.

❸ **곱셈 [2]**

>0일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

목표 | 제곱근의 곱셈을 할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{2\times5}=\mathbf{\sqrt{10}}$

(2) $\sqrt{3}\sqrt{12}=\sqrt{3\times12}=\sqrt{36}=\mathbf{6}$

(3) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7}=\sqrt{2\times3\times7}=\mathbf{\sqrt{42}}$

(4) $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10}=\sqrt{2\times5\times10}=\sqrt{100}=\mathbf{10}$

본문 해설

❸ 근호 안의 제곱인 수를 근호 밖으로 꺼낼 수도 있고, 이와 반대로 근호 밖의 양수를 제곱하여 근호 안에 넣을 수도 있다.

지/도/자/료

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$임을 다음 표와 같이 구체적인 예를 많이 들어서 확인한 후에 일반화할 수 있도록 지도한다.

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
4	9	2	3	6
25	4	5	2	10
36	100	6	10	60

$a\times b$	$\sqrt{a\times b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$와 $\sqrt{a\times b}$의 값의 비교
36	6	서로 같다.
100	10	서로 같다.
3600	60	서로 같다.

예 제 1

다음 물음에 답하여라.

(1) $\sqrt{18}$을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

(2) $4\sqrt{7}$을 $\sqrt{a}$의 꼴로 나타내어라.

● 풀이 (1) $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때, 보통 근호 안의 수는 가장 작은 자연수가 되도록 한다.

$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}$

$=3\sqrt{2}$

(2) $4\sqrt{7}=\sqrt{4^2\times7}$

$=\sqrt{16\times7}=\sqrt{112}$

답 ● (1) $3\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{112}$

문제 2 다음을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{2^2\times5}$ (2) $\sqrt{3\times7^2}$

(3) $\sqrt{24}$ (4) $\sqrt{63}$

문제 3 문제 2와 같이 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

예 제 2

다음을 $\sqrt{a}$ 또는 $-\sqrt{a}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $5\sqrt{3}$ (2) $-3\sqrt{6}$

● 풀이 (1) $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times3}$

$=\sqrt{25\times3}=\sqrt{75}$

(2) $-3\sqrt{6}=-\sqrt{3^2\times6}$

$=-\sqrt{9\times6}=-\sqrt{54}$

답 ● (1) $\sqrt{75}$ (2) $-\sqrt{54}$

2

목표| $\sqrt{a^2b}$의 꼴을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{2^2\times5}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

(2) $\sqrt{3\times7^2}=\mathbf{7\sqrt{3}}$

(3) $\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times6}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

(4) $\sqrt{63}=\sqrt{3^2\times7}=\mathbf{3\sqrt{7}}$

3

|출제 의도| $\sqrt{a^2b}$의 꼴을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 근호 안을 간단한 수로 나타내는 것을 능숙하게 하기 위한 문제이다.

예시| 다음을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{48}$ (2) $\sqrt{72}$

(3) $\sqrt{108}$ (4) $\sqrt{200}$

풀이| (1) $\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times3}=4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{108}=\sqrt{6^2\times3}=6\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{200}=\sqrt{10^2\times2}=10\sqrt{2}$

지/도/자/료

근호 안의 수를 소인수분해하여 간단히 할 때, 다음과 같은 순서로 할 수 있다.

❶ 근호 안의 수를 소인수분해한다.

❷ 지수가 짝수인 소인수는 지수를 반으로 하여 근호 밖으로 꺼낸다.

❸ 지수가 3 이상의 홀수인 소인수는 지수법칙을 이용하여 짝수로 만든 후 ❷를 한다.

예) $\sqrt{108}=\sqrt{2^2\times3^3}$

$=2\sqrt{3^3}$

$=2\sqrt{3^2\times3}$

$=2\times3\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

기/초/력 향상 문제

1 $4\sqrt{3}$을 $\sqrt{a}$의 꼴로 나타내어라.

2 $\sqrt{2^2\times3^2\times5}$를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

3 다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{8}$ (2) $\sqrt{1000}$

(3) $\sqrt{2\times7^2}$ (4) $\sqrt{6\sqrt{8}}$

답 **1** $\sqrt{48}$ **2** $6\sqrt{5}$ **3** (1) $2\sqrt{2}$ (2) $10\sqrt{10}$ (3) $7\sqrt{2}$ (4) $4\sqrt{3}$

교과서 34 쪽

문제 4 다음을 $\sqrt{a}$ 또는 $-\sqrt{a}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $3\sqrt{3}$ (2) $-7\sqrt{2}$

(3) $10\sqrt{7}$ (4) $-6\sqrt{5}$

창의 UP $-3\sqrt{6}$은 $\sqrt{(-3)^2\times 6}$과 같이 계산하면 안 되는 이유를 설명하여라.

제곱근의 나눗셈은 어떻게 하는가?

창의력 기르기 붉은 악마

우리나라 축구 국가 대표 팀의 응원단인 붉은 악마는 1998년 프랑스 월드컵 아시아 지역 예선을 앞두고 국가 대표 팀을 조직적으로 응원하기 위하여 창설되었다. 그 후 붉은 악마는 2002년 한일 월드컵을 통하여 전 세계에 널리 알려지게 되었다. 현재 붉은 악마는 치우천왕이 그려진 응원기를 사용하고 있다.

탐구 활동 오른쪽 그림과 같이 폭이 $\sqrt{2}$ m인 천으로 넓이가 $\sqrt{3}$ m^{2}인 직사각형 모양의 응원기를 만들려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1 응원기의 넓이를 구하는 식을 세워 보자.

2 1에서 세운 식을 이용하여 응원기의 높이 x m를 구하는 식을 세워 보자.

4

목표| $a\sqrt{b}$의 꼴을 $\sqrt{a^2b}$의 꼴로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $3\sqrt{3}=\sqrt{3^2\times 3}=\sqrt{9\times 3}=\boldsymbol{\sqrt{27}}$

(2) $-7\sqrt{2}=-\sqrt{7^2\times 2}=-\sqrt{49\times 2}=\boldsymbol{-\sqrt{98}}$

(3) $10\sqrt{7}=\sqrt{10^2\times 7}=\sqrt{100\times 7}=\boldsymbol{\sqrt{700}}$

(4) $-6\sqrt{5}=-\sqrt{6^2\times 5}=-\sqrt{36\times 5}=\boldsymbol{-\sqrt{180}}$

주의| 근호 밖의 수를 제곱하여 근호 안에 넣을 때, 음수는 근호 안에 들어갈 수 없다.

예) $-3\sqrt{2}\neq\sqrt{(-3)^2\times 2}$

$-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\times 2}=-\sqrt{18}$

창의 UP

|출제 의도| $a<0$인 경우 $a\sqrt{b}$의 꼴을 $\sqrt{a^2b}$의 꼴로 나타낼 때, 음수는 근호 안으로 들어갈 수 없는 이유를 알게 하기 위한 문제이다.

풀이| $\sqrt{(-3)^2\times 6}=\sqrt{9\times 6}=\sqrt{3^2\times 6}=3\sqrt{6}$이므로 $-3\sqrt{6}$과 같지 않기 때문이다.

창의력 기르기 참/고/자/료

붉은 악마는 우리나라 축구 국가 대표 팀의 응원단 중 하나이며 1995년 인터넷 축구 동호회 형태로 시작하였다. 붉은 악마라는 이름은 1983년 멕시코 세계 청소년 축구 대회에서 우리나라 대표 팀이 모두의 예상을 깨고 4강에 올라 외국의 언론들에 '붉은 악령(Red Furies)'으로 불린 것에서 유래하였다. 붉은 악마에 대한 보다 자세한 정보는 붉은 악마 홈페이지(http://www.reddevil.or.kr)에서 확인할 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 넓이를 이용하여 높이를 구하는 식을 세워 봄으로써 제곱근의 나눗셈 방법을 이해하게 하려는 것이다.

1. 직사각형의 넓이는 (가로의 길이)×(세로의 길이)이므로 응원기의 넓이는 $\boldsymbol{(\sqrt{2}\times x)}$ $\mathbf{m^2}$이다.

2. 응원기의 넓이가 $\sqrt{3}$ m^{2}이므로 $\sqrt{2}x=\sqrt{3}$이다. 따라서 구하고자 하는 응원기의 높이는 $\boldsymbol{x=\sqrt{3}\div\sqrt{2}}$**(m)**이다.

❶ $2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\div\sqrt{b}$의 계산에 대하여 알아보자.

예를 들어 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$은 양수이고, 이를 제곱하면

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{3}{2}$$

이므로 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$은 $\frac{3}{2}$의 양의 제곱근이다.

그런데 $\frac{3}{2}$의 양의 제곱근은 $\sqrt{\frac{3}{2}}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

이다.

● $a>0$, $b>0$일 때, $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$

❷ 로 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$를 제곱하면 $\frac{a}{b}$가 되므로 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$는 $\frac{a}{b}$의 양의 제곱근인 $\sqrt{\frac{a}{b}}$와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 나눗셈

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

보기 (1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$ (2) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$

문제 5 다음을 계산하여라.

(1) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ (2) $\sqrt{\frac{8}{49}}$

(3) $\sqrt{3}\div\sqrt{27}$ (4) $\sqrt{45}\div\sqrt{3}$

5

목표| 제곱근의 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{15}{3}}=\mathbf{\sqrt{5}}$

(2) $\sqrt{\frac{8}{49}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{2^2\times2}}{\sqrt{7^2}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{7}}$

(3) $\sqrt{3}\div\sqrt{27}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{3}{27}}=\sqrt{\frac{1}{9}}$
$=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(4) $\sqrt{45}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{45}{3}}=\mathbf{\sqrt{15}}$

참고| 제곱근의 나눗셈은 근호 안의 수끼리 나눈 후 그 수에 근호를 씌운다. 이때 근호 안의 수를 소인수분해하여 제곱인 수는 근호 밖으로 꺼낸다.
즉, $a>0$, $b>0$일 때,

• $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ • $\sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$

본문 해설

❶ $a\div b=\frac{a}{b}$이므로 $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$를 계산하는 것은 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$을 계산하는 것과 같다.

❷ $a>0$, $b>0$일 때 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 다음과 같이 설명할 수 있다.

$a>0$, $b>0$일 때 $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ……①

라고 하면 $x>0$이다.

①의 양변을 제곱하면 $x^2=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$

제곱근의 뜻에 의하여 $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 또는 $x=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$ ……②

①, ②에서 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

지/도/자/료

$a>0$, $b>0$일 때 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 구체적인 예를 많이 들어서 확인한 후에 일반화할 수 있도록 지도한다.

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
1	4	1	2	$\frac{1}{2}$
4	9	2	3	$\frac{2}{3}$

$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$와 $\sqrt{\frac{a}{b}}$의 값의 비교
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	서로 같다.
$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	서로 같다.

교과서 36 쪽

근호를 포함한 식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있을 때에는 앞에서부터 차례로 계산한다.

예제 3 다음을 계산하여라.

(1) $3\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\div\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{24}\div\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

풀이 (1) $3\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\div\sqrt{6}=6\sqrt{12}\div\sqrt{6}=\frac{6\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$

$=6\sqrt{\frac{12}{6}}=6\sqrt{2}$

❶ $\div\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}=\sqrt{\frac{24}{2}}\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{36}=6$

(2)의 계산에서
$\sqrt{12}\times\sqrt{3}$
$=(\sqrt{3}\times\sqrt{4})\times\sqrt{3}$
$=(\sqrt{3})^2\times\sqrt{4}$
$=3\times2=6$
과 같이 계산할 수도 있다.

답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) 6

문제 6 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{8}\times3\sqrt{6}\div12$ (2) $\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\sqrt{5}$

(3) $2\sqrt{7}\div\sqrt{2}\times\sqrt{6}$ (4) $\sqrt{27}\div6\sqrt{3}\times4\sqrt{2}$

발전 **문제 7** 다음을 계산하여라.

(1) $(-3\sqrt{7})\times\sqrt{7}\times\sqrt{12}$ (2) $\sqrt{18}\div\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\div(-\sqrt{20})$

의사소통 근호를 포함한 식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있을 때에는 앞에서부터 차례로 계산하는 이유에 대하여 토의하여 보자.

본문 해설

❶ $\sqrt{24}\div\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{24}\div\sqrt{2\times3}$

$=\sqrt{24}\div\sqrt{6}=\sqrt{\frac{24}{6}}=\sqrt{4}=2$

와 같이 계산하면 계산의 결과가 달라진다. 따라서 근호를 포함한 식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있을 때에는 유리수의 계산과 마찬가지로 앞에서부터 차례로 계산한다.

6

목표| 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{8}\times3\sqrt{6}\div12=3\sqrt{48}\div12=\frac{3\sqrt{48}}{12}$

$=\frac{\sqrt{48}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\mathbf{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{5}$

$=2\sqrt{\frac{15}{3}}\times\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\mathbf{10}$

(3) $2\sqrt{7}\div\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\times\sqrt{6}=2\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{6}$

$=2\sqrt{\frac{7}{2}\times6}=\mathbf{2\sqrt{21}}$

(4) $\sqrt{27}\div6\sqrt{3}\times4\sqrt{2}=\frac{\sqrt{27}}{6\sqrt{3}}\times4\sqrt{2}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{27}{3}}\times4\sqrt{2}$

$=\frac{1}{6}\sqrt{9}\times4\sqrt{2}=\frac{3}{6}\times4\sqrt{2}$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

7

목표| 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(-3\sqrt{7})\times\sqrt{7}\times\sqrt{12}=-21\times2\sqrt{3}$

$=\mathbf{-42\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{18}\div\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\div(-\sqrt{20})=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$

$=\frac{3\sqrt{5}}{2}\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)=\mathbf{-\frac{3}{4}}$

의/사/소/통

|출제 의도| 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식을 계산할 때, 앞에서부터 차례로 계산해야 하는 이유를 알게 하여 계산의 순서를 확실히 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| $\sqrt{12}\div\sqrt{3}\times\sqrt{4}$에서 차례로 계산하는 경우와 그렇지 않은 경우를 살펴보면 다음과 같다.

• $\sqrt{12}\div\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\sqrt{\frac{12}{3}}\times\sqrt{4}$

$=\sqrt{4}\times\sqrt{4}=4$

• $\sqrt{12}\div\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\sqrt{12}\div\sqrt{3\times4}$

$=\sqrt{12}\div\sqrt{12}=1$

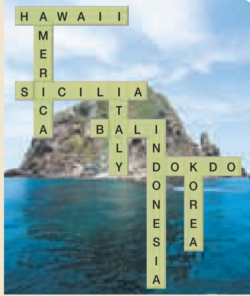
이와 같이 서로 다른 계산 결과가 나타나므로 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 경우 앞에서부터 차례로 계산하는 것을 원칙으로 한다.

분모의 유리화란 무엇인가?

창의력 기르기

광고판

2010년 3월 1일 삼일절을 맞아 미국 뉴욕 맨해튼의 한복판인 타임스 스퀘어의 대형 광고판에 낱말 퍼즐의 형식을 빌려 "하와이는 미국 땅, 시칠리아는 이탈리아 땅, 발리는 인도네시아 땅, 독도는 한국 땅"이라고 말한 뒤 '동해(East Sea)'가 표기된 한국과 일본 인근의 지도를 보여주면서 '이것들은 매우 분명한 사실'이라고 지적하는 광고가 상영되었다. 광고는 이어 "한국의 아름다운 섬, 독도를 방문하세요."라는 메시지로 끝을 맺는다.



탐구 활동

가로의 길이가 $\sqrt{2}$ m이고 넓이가 1 m^{2}인 직사각형 모양의 광고판을 만들려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1 $\sqrt{2}$를 소수 넷째 자리에서 반올림하여 1.414라고 할 때, 나눗셈을 이용하여 빈칸에 알맞은 소수를 써넣어 보자.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \div \sqrt{2} = \bigcirc$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \div 2 = \bigcirc$

2 1로부터 광고판의 세로의 길이를 구하기 위하여 어떤 나눗셈의 계산이 더 편리한지 말하여 보자.

탐구 활동에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 분모, 분자에 각각 $\sqrt{2}$를 곱하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

한편 $\sqrt{2}$는 순환하지 않는 무한소수 1.41421356…이다. 따라서 $\sqrt{2}$를 소수 넷째 자리에서 반올림하여 1.414라 하고 $1 \div \sqrt{2}$와 $\sqrt{2} \div 2$를 직접 계산해 보면, $1 \div \sqrt{2} = 1 \div 1.414$보다 $\sqrt{2} \div 2 = 1.414 \div 2$가 더욱 편리하다는 것을 알 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 분모가 무리수인 분수와 유리수인 분수의 값을 각각 계산해 봄으로써 분모의 유리화의 필요성을 느끼게 하려는 것이다.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \div \sqrt{2} = 1 \div 1.414$

$= \mathbf{0.7072135785\cdots}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \div 2 = 1.414 \div 2 = \mathbf{0.707}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \div 2$가 $\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \div \sqrt{2}$보다 계산하기 편리하다.

창의력 기르기 참/고/자/료

외교통상부 독도 홈페이지(http://dokdo.mofat.go.kr)에서는 대한민국 정부의 독도에 대한 기본 입장과 다양한 정보를 제공하고 있다. 특히 외교통상부 청소년 홈페이지(http://www.mofat.go.kr/young)의 [지식마당] – [함께 보는 외교통상부]에서는 독도 관련 플래시 영상을 찾아볼 수 있다.

지/도/자/료 $\sqrt{3} \div \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{6} = 2.449$라고 주어졌을 때, $\sqrt{3} \div \sqrt{2}$를 구하는 방법은 다음과 같이 여러 가지가 있다.

(1) $\sqrt{3} \div \sqrt{2} = 1.732 \div 1.414$

$= 1.2248\cdots$

(2) $\sqrt{3} \div \sqrt{2} = \sqrt{6} \div 2 = 2.449 \div 2$

$= 1.2245$

(3) $\sqrt{3} \div \sqrt{2} = \sqrt{1.5}$

(1), (2), (3) 모두 소수 셋째 자리까지 구하면 1.225를 얻게 되는데 (1)의 방법은 계산이 복잡하고, (3)의 방법은 소수의 제곱근을 구해야 하므로 쉽지 않다.

따라서 근호를 포함한 나눗셈을 구하려고 할 때에는 (2)의 방법과 같이 분모, 분자에 적당한 수를 곱하여 분모의 근호를 제거할 수 있도록 지도한다.

교과서 38 쪽

일반적으로 분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 이를 유리수로 바꾼 후에 계산하면 편리하다.

이와 같이 분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 분모, 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 **분모의 유리화**라고 한다.

분모의 유리화

$a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

예제 4 다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{5}{3\sqrt{5}}$

분모에 있는 무리수를 분모, 분자에 각각 곱하여 준다.

풀이 (1) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$의 분모, 분자에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$$\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

❶ 의 분모, 분자에 $\sqrt{5}$를 곱하면

$$\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{5\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{3\times5}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 (1) $2\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

문제 8 다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$ (4) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

문제 9 문제 8과 같이 분모를 유리화하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

본문 해설

❶ 분모를 유리화할 때에는 분모의 근호가 있는 부분만 분모, 분자에 각각 곱한다. 즉, $\dfrac{5}{3\sqrt{5}}$의 분모와 분자에 $3\sqrt{5}$가 아닌 $\sqrt{5}$를 곱한다.

참고| $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$과 같이 근호 안에 제곱인 인수가 있으면 이것을 근호 밖으로 꺼내어 간단한 수로 나타낸 후 분모를 유리화하는 것이 더 편리하다.

예 $\dfrac{1}{\sqrt{12}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

8

목표| 분모가 근호를 포함한 무리수인 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{2\times7}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{42}}{14}}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

9

|출제 의도| 분모를 유리화하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 분모의 유리화를 능숙하게 하기 위한 문제이다.

예시| 다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ (2) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

풀이| (1) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

(2) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{6}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

지/도/자/료

$a>0$일 때 $(\sqrt{a})^2=a$임을 이용하여 분모가 유리수가 되도록 분모, 분자에 같은 무리수를 곱해야 하는데, 잘못 이해하여 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$와 같이 계산하는 경우가 종종 있으므로 주의하여 지도한다.

기/초/력 향상 문제

다음 수의 분모를 유리화하여라.

1 $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ **2** $\dfrac{1}{2\sqrt{11}}$ **3** $\dfrac{5}{4\sqrt{5}}$

답 **1** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ **2** $\dfrac{\sqrt{11}}{22}$ **3** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

교과서 39 쪽

2-2 제곱근의 덧셈과 뺄셈

● 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

제곱근의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 하는가?

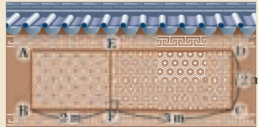
창의력 기르기

꽃담

담을 쌓을 때 기와 조각이나 돌 등으로 무늬를 넣어 만든 담을 꽃담이라고 한다. 꽃담에는 여러 가지 무늬와 상징적인 문양이 들어간다. 우리의 멋스러운 디자인 감각을 뽐낸 담이라 할 수 있다. 고궁 중에서도 경복궁에 있는 자경전 서쪽 꽃담은 화려하면서도 세련된 아름다움으로 유명하다.

탐구 활동

다음 그림은 어느 꽃담의 일부분이다. 물음에 답하여 보자.



1 직사각형 ABFE와 직사각형 EFCD의 넓이를 각각 구하고, 두 직사각형의 넓이의 합을 식으로 나타내어 보자.

2 변 BC의 길이를 구하고, 이것을 이용하여 직사각형 ABCD의 넓이를 구하여 보자.

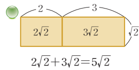
탐구 활동의 그림에서 전체 직사각형의 가로의 길이는 5 m이고, 세로의 길이는 $\sqrt{2}$ m이므로 넓이는

$$5\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}\,(\mathrm{m}^2)$$

이다. 이것은 직사각형 각각의 넓이의 합과 같으므로

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}\,(\mathrm{m}^2)$$

임을 알 수 있다.



2-2 제곱근의 덧셈과 뺄셈

소단원 지도 목표

① 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.
② 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.
③ 곱셈 공식을 이용하여 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.
④ 제곱근표나 계산기를 이용하여 제곱근의 반올림한 값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$와 같이 실수하지 않도록 지도한다.

2. 유리수와 무리수의 덧셈은 더 이상 간단히 할 수 없음에 유의하여 지도한다.

3. 곱셈 공식을 활용한 분모의 유리화를 다룰 때에는 분모와 분자의 항의 개수가 각각 2개 이하인 경우만 다룬다.

4. 제곱근을 반올림한 값이 필요할 때에는 제곱근표나 계산기를 사용하고, 제곱근 풀이법은 다루지 않는다.

5. 제곱근표에는 1.00에서 99.9까지의 수에 대한 양의 제곱근을 반올림한 값만 나와 있으므로 이외의 반올림한 값은 제곱근의 성질을 이용하여 구할 수 있음을 이해하게 한다.

창의력 기르기 참/고/자/료

자경전은 흥선 대원군이 경복궁을 다시 지으면서 자미당 터에 고종의 어머니인 조대비(신정왕후)를 위해 지었으나 불에 타 버려 고종 25년인 1888년에 다시 지어 오늘에 이른다. 자경전은 대비들이 일상생활을 하고 잠을 자는 침전 건물로, 총 44칸 규모이다. 겨울에 따뜻하게 지낼 수 있도록 서북쪽에 복안당이라는 침실을 두고 중앙에는 중심 건물인 자경전을 두었다. 또 동남쪽에는 다락집인 청연루를 두어 여름을 시원하게 보낼 수 있도록 하였다.

자경전과 경복궁에 대한 보다 자세한 자료는 경복궁 홈페이지(http://www.royalpalace.go.kr)에서 찾아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직사각형의 넓이를 두 가지 방법으로 구하여 비교해 봄으로써 제곱근의 덧셈 방법을 이해하게 하려는 것이다.

1. □ABFE$=2\times\sqrt{2}=\mathbf{2\sqrt{2}\,(m^2)}$
□EFCD$=3\times\sqrt{2}=\mathbf{3\sqrt{2}\,(m^2)}$
□ABFE+□EFCD$=\mathbf{2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,(m^2)}$

2. $\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{FC}=2+3=\mathbf{5\,(m)}$
□ABCD$=\overline{BC}\times\overline{CD}=5\times\sqrt{2}=\mathbf{5\sqrt{2}\,(m^2)}$

본문 해설

❶ $x>0$일 때

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$$
$$a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$$

와 같이 근호를 포함하고 있는 식의 덧셈과 뺄셈은 근호 부분을 문자와 같이 생각하여 다항식의 덧셈과 뺄셈처럼 동류항끼리 모아서 계산한다.

교과서 40 쪽

❶ $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$에서 $\sqrt{2}$를 문자 a로 생각하면

$$2a+3a=(2+3)a=5a$$

이므로

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

임을 알 수 있다.

$2a+3a=5a$
$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

마찬가지로

$$2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(2-3)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

임을 알 수 있다.

따라서 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈은 근호가 있는 수를 문자로 생각하여 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 동류항끼리 계산하는 것과 같은 방법으로 한다.

또 근호를 포함한 식이 복잡할 경우에는 a, b가 양수일 때 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$임을 이용하여 간단히 한다.

● 근호 안의 수가 같은 것을 다항식의 동류항과 같이 생각한다.

예제 1 다음을 계산하여라.

(1) $6\sqrt{5}-7\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{3}+7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

● 풀이 (1) $6\sqrt{5}-7\sqrt{5}=(6-7)\sqrt{5}=-\sqrt{5}$
(2) $\sqrt{3}+7\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(1+7-2)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

답 ● (1) $-\sqrt{5}$ (2) $6\sqrt{3}$

문제 1 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ (2) $-5\sqrt{6}-4\sqrt{6}$
(3) $-\sqrt{3}+9\sqrt{3}-4\sqrt{3}$ (4) $-4\sqrt{7}-\sqrt{7}+3\sqrt{7}$

발전 **문제 2** 다음을 계산하여라.

(1) $5\sqrt{3}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ (2) $3\sqrt{7}-\dfrac{14}{\sqrt{7}}$

1

목표| 근호 안의 수가 같은 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1+3)\sqrt{2}$
$=\mathbf{4\sqrt{2}}$

(2) $-5\sqrt{6}-4\sqrt{6}=(-5-4)\sqrt{6}$
$=\mathbf{-9\sqrt{6}}$

(3) $-\sqrt{3}+9\sqrt{3}-4\sqrt{3}=(-1+9-4)\sqrt{3}$
$=\mathbf{4\sqrt{3}}$

(4) $-4\sqrt{7}-\sqrt{7}+3\sqrt{7}=(-4-1+3)\sqrt{7}$
$=\mathbf{-2\sqrt{7}}$

2

목표| 근호 안의 수가 같은 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $5\sqrt{3}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}-\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=5\sqrt{3}-\dfrac{6\sqrt{3}}{3}$
$=5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(5-2)\sqrt{3}=\mathbf{3\sqrt{3}}$

(2) $3\sqrt{7}-\dfrac{14}{\sqrt{7}}=3\sqrt{7}-\dfrac{14\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=3\sqrt{7}-\dfrac{14\sqrt{7}}{7}$
$=3\sqrt{7}-2\sqrt{7}=(3-2)\sqrt{7}=\mathbf{\sqrt{7}}$

주의| 근호를 포함한 식을 간단히 할 때, 분모에 근호가 들어 있는 경우에는 분모의 유리화를 가장 먼저 시행하는 것이 편리하다.

지/도/자/료 실수의 계산 법칙

실수에서도 유리수와 마찬가지로 다음 계산 법칙이 성립한다.

a, b, c가 실수일 때

(1) 덧셈의 교환법칙: $a+b=b+a$
곱셈의 교환법칙: $ab=ba$

(2) 덧셈의 결합법칙: $(a+b)+c=a+(b+c)$
곱셈의 결합법칙: $(ab)c=a(bc)$

(3) 분배법칙: $a(b+c)=ab+ac$
$(a+b)c=ac+bc$

예 제 2 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{2}+5\sqrt{3}+7\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{6}-\sqrt{20}+\sqrt{54}-\sqrt{45}$

(1) $8\sqrt{2}+4\sqrt{3}$은 근호 안의 수를 같게 할 수 없으므로 더 이상 간단히 할 수 없다.
(2) $\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times5}=2\sqrt{5}$임을 이용한다.

● 풀이 (1) $\sqrt{2}+5\sqrt{3}+7\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{2}+7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}$
$=(1+7)\sqrt{2}+(5-1)\sqrt{3}=8\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{6}-\sqrt{20}+\sqrt{54}-\sqrt{45}=\sqrt{6}-2\sqrt{5}+3\sqrt{6}-3\sqrt{5}$
$=\sqrt{6}+3\sqrt{6}-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}$
$=(1+3)\sqrt{6}-(2+3)\sqrt{5}=4\sqrt{6}-5\sqrt{5}$

❶ 답 (1) $8\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ (2) $4\sqrt{6}-5\sqrt{5}$

문제 3 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{2}-5\sqrt{7}-6\sqrt{2}-\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{6}+\sqrt{32}-\sqrt{24}-\sqrt{18}$

근호를 포함한 식에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있을 때에는 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산한다.

예 제 3 $2\times\sqrt{6}-\sqrt{2}\div\sqrt{12}$를 계산하여라.

분모에 근호가 있을 때에는 분모를 유리화하여 계산하는 것이 편리한 경우도 있다.

● 풀이 $2\times\sqrt{6}-\sqrt{2}\div\sqrt{12}=2\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=2\sqrt{6}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$
$=2\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\left(2-\dfrac{1}{6}\right)\sqrt{6}=\dfrac{11}{6}\sqrt{6}$

답 ● $\dfrac{11}{6}\sqrt{6}$

문제 4 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{28}\div2+\sqrt{7}\times3$ (2) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{5}\div\sqrt{15}$

본문 해설

❶ $8\sqrt{2}+4\sqrt{3}$, $4\sqrt{6}-5\sqrt{5}$를 각각 문자식 $8a+4b$, $4x-5y$와 비교하여 보면 더 이상 간단히 할 수 없음을 알 수 있다. $8\sqrt{2}+4\sqrt{3}=(8+4)\sqrt{2+3}=12\sqrt{5}$와 같이 계산하지 않도록 주의한다.

3

목표| 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{2}-5\sqrt{7}-6\sqrt{2}-\sqrt{7}$
$=\sqrt{2}-6\sqrt{2}-5\sqrt{7}-\sqrt{7}$
$=(1-6)\sqrt{2}-(5+1)\sqrt{7}$
$=\mathbf{-5\sqrt{2}-6\sqrt{7}}$

(2) $\sqrt{6}+\sqrt{32}-\sqrt{24}-\sqrt{18}$
$=\sqrt{6}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$
$=\sqrt{6}-2\sqrt{6}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}$
$=(1-2)\sqrt{6}+(4-3)\sqrt{2}$
$=\mathbf{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

4

목표| 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{28}\div2+\sqrt{7}\times3=2\sqrt{7}\div2+3\sqrt{7}$
$=\sqrt{7}+3\sqrt{7}$
$=(1+3)\sqrt{7}$
$=\mathbf{4\sqrt{7}}$

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{5}\div\sqrt{15}=\sqrt{12}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$
$=2\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$=2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$=\left(2-\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{3}$
$=\mathbf{\dfrac{5}{3}\sqrt{3}}$

지/도/자/료

1. 근호를 포함한 식에서 근호 안의 수가 다르더라도 제곱근의 성질을 이용하여 근호 안의 수를 같게 만들 수 있는지를 반드시 확인하도록 지도한다.
2. 근호를 포함한 식에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있을 때에는 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산해야 한다는 것에 익숙해지도록 많은 예를 통하여 충분히 설명해 준다.

5

목표| 식에 괄호가 있을 때에는 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어 계산할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{5}(\sqrt{3}+2\sqrt{5})=\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{5}\times2\sqrt{5}$

$=\mathbf{\sqrt{15}+10}$

(2) $-2\sqrt{6}(\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

$=-2\sqrt{6}\times\sqrt{2}+(-2\sqrt{6})\times4\sqrt{3}$

$=-2\sqrt{12}-8\sqrt{18}$

$=-2\times2\sqrt{3}-8\times3\sqrt{2}$

$=\mathbf{-4\sqrt{3}-24\sqrt{2}}$

6

목표| 곱셈 공식을 이용하여 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$

$=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2$

$=2+2\sqrt{14}+7$

$=\mathbf{9+2\sqrt{14}}$

(2) $(\sqrt{6}-3)^2=(\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{6}\times3+3^2$

$=6-6\sqrt{6}+9$

$=\mathbf{15-6\sqrt{6}}$

(3) $(\sqrt{5}-4)(\sqrt{5}+4)=(\sqrt{5})^2-4^2$

$=5-16$

$=\mathbf{-11}$

(4) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+4)=3(\sqrt{2})^2+(12+1)\sqrt{2}+1\times4$

$=6+13\sqrt{2}+4$

$=\mathbf{10+13\sqrt{2}}$

교과서 42 쪽

근호를 포함한 식에 괄호가 있을 때에는 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어 계산한다.

예제 4 $\sqrt{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$를 계산하여라.

$a(b+c)=ab+ac$

풀이 $\sqrt{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})=\sqrt{6}\times\sqrt{3}+\sqrt{6}\times2\sqrt{2}=\sqrt{18}+2\sqrt{12}$
$=3\sqrt{2}+2\times2\sqrt{3}=3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

답 $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

문제 5 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{5}(\sqrt{3}+2\sqrt{5})$ (2) $-2\sqrt{6}(\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

"수학 ②"에서 배운 곱셈 공식을 이용하여 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있다.

예제 5 다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ (2) $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$

곱셈 공식
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

풀이 (1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$
$=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$
(2) $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=3^2-(\sqrt{2})^2=9-2=7$

답 (1) $5+2\sqrt{6}$ (2) 7

문제 6 다음을 계산하여라.

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$ (2) $(\sqrt{6}-3)^2$
(3) $(\sqrt{5}-4)(\sqrt{5}+4)$ (4) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+4)$

읽/기/자/료 수학자 아벨

27세의 젊은 나이로 죽은 노르웨이의 아벨(Abel, N. H.: 1802~1829)은 훌륭한 업적을 남긴 수학자이다.

그는 중학교 때에는 공부를 잘하는 학생은 아니었으나 수학만큼은 뛰어나게 잘하여 어려운 고등 수학을 혼자서 배워 나갔다.

19세쯤 되는 나이에 목사였던 아버지를 여의고 본래 가난했던 생활은 더욱더 어려워져 어머니와 7명의 아이들은 그야말로 한 끼니를 때우기도 어려울 지경이었다.

그러나 아벨은 수학 공부만은 도저히 포기할 수 없었고, 마침내 대학에 입학을 하였다. 물론 가난한 아벨은 대학생이 되어서도 끼니를 굶는 날이 적지 않았다.

한번은 아벨이 중학교 은사님에게 보내는 편지 끝에

$\sqrt[3]{6064321219}$년

이라는 괴상한 날짜 표시를 하였다고 한다.

6064321219의 세제곱근은

1823.590827519⋯

이다. 여기서 1823은 그 해 곧 1823년을 가리키고, 나머지 소수점 이하는 1년을 단위로 하였을 때의 소수이므로 날짜로 고치면

$365\times0.590827519\cdots=215.652\cdots$(일)

이다. 즉, 1월 1일로부터 따져 216일째가 된다는 것이며, 그것은 8월 4일에 해당한다.

아벨은 1823년 8월 4일이라고 쓰는 대신에 위와 같은 세제곱근을 썼던 것이다.

❶ 식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화할 수 있다.

예제 6 $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$의 분모를 유리화하여라.

● 풀이 $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$의 분모, 분자에 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$를 곱하면

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$$

답 ● $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

문제 7 다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (2) $\frac{2}{3+\sqrt{7}}$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ (4) $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}$

창의 UP $6-\sqrt{5}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, a^2-b^2의 값을 구하는 방법을 설명하여라. (단, $0\le b<1$)

추론 다음 그림을 보고 영훈이와 수연이는 어느 부분을 잘못 말하였는지 설명하여 보자.

(3) $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

(4) $$\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}=\frac{(\sqrt{6}+2)^2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$$
$$=\frac{(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{6}\times2+2^2}{(\sqrt{6})^2-2^2}$$
$$=\mathbf{5+2\sqrt{6}}$$

창의 UP

|출제 의도| 무리수에서 정수 부분과 소수 부분을 구해 봄으로써 무리수를 이해하고, 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 능숙하게 하기 위한 문제이다.

풀이| $2<\sqrt{5}<3$이므로 $3<6-\sqrt{5}<4$
따라서 $a=3$이고 $b=(6-\sqrt{5})-3=3-\sqrt{5}$이므로

$$a^2-b^2=3^2-(3-\sqrt{5})^2$$
$$=9-(9-6\sqrt{5}+5)$$
$$=\mathbf{6\sqrt{5}-5}$$

본문 해설

❶ $a+b$에 $a-b$를 곱하면 a^2-b^2이 되어 a 또는 b가 근호로 표현되는 무리수일지라도 a^2-b^2은 항상 유리수가 된다.

7

목표| 곱셈 공식을 이용하여 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

풀이| (1) $$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\mathbf{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}}$$

(2) $$\frac{2}{3+\sqrt{7}}=\frac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}$$
$$=\frac{2(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2}=\mathbf{3-\sqrt{7}}$$

추/론

|출제 의도| 제곱근의 덧셈에서 흔히 생길 수 있는 오류를 바로 잡아 봄으로써 제곱근의 덧셈을 정확히 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| • 영훈: $\sqrt{12}+\sqrt{48}$은 근호 안의 수가 다르지만 $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$이고 $\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times3}=4\sqrt{3}$이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.
$\sqrt{12}+\sqrt{48}=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(2+4)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
즉, $\sqrt{12}+\sqrt{48}$은 근호 안의 수가 다르지만 같게 변형할 수 있으므로 더 계산이 가능하다.

• 수연: $\sqrt{12}+\sqrt{48}=6\sqrt{3}=\sqrt{108}$이고 $\sqrt{12+48}=\sqrt{60}$이므로 $\sqrt{12}+\sqrt{48}\neq\sqrt{12+48}$이다. 이와 같이 제곱근의 합을 계산할 때 근호 안의 수를 더하면 실제의 값과 다른 값이 나타나므로
$\sqrt{12}+\sqrt{48}=\sqrt{12+48}=\sqrt{60}$
은 잘못 계산한 것이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 계산기를 사용하여 제곱근의 반올림한 값을 구하여 순환하지 않는 무한소수인 무리수를 소수로 나타내는 방법을 이해하게 하려는 것이다.
준비물 • 계산기

1. 1.581

2. $\sqrt{6.23}=2.496$
$\sqrt{0.63}=0.794$
$\sqrt{62.3}=7.893$

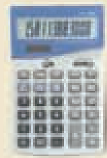
교과서 44 쪽

무리수는 소수로 어떻게 나타내는가?

탐 구 활 동

●준비물
계산기

다음은 계산기를 이용하여 $\sqrt{2.5}$를 소수로 나타내는 과정이다. 물음에 [illegible]하여 보자.



❶ [illegible], [.], [5]를 차례로 누른다.
❷ [√]를 누른다.
❸ 계산기의 창에 표시된 값을 읽는다.

1 위에서 구한 소수를 반올림하여 소수 셋째 자리까지 구하여 보자.

2 다음 수를 **1**과 같은 방법으로 구하여 보자.

$\sqrt{6.23}$ $\sqrt{0.63}$ $\sqrt{62.3}$

위의 그림은 바빌로니아의 점토판으로 가운데 숫자가 $\sqrt{2}$를 나타낸다.

무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 실제의 값을 소수로 나타낼 때에는 반올림한 값으로 나타낼 수 있다. 무리수를 반올림한 값은 계산기나 제곱근표를 이용하여 구할 수 있다.

먼저 탐구 활동에서 계산기를 이용하여 $\sqrt{2.5}$를 반올림한 값으로 표현한 것을 살펴보자. $\sqrt{2.5}$를 계산기를 이용하여 구해 보면 $\sqrt{2.5}=1.58113883008\cdots$을 반올림한 값이 나타난다. 즉, 계산기가 나타내는 자리가 소수 둘째 자리라면 1.58, 소수 [illegible] 자리라면 1.581이 나타나는 것이다.

❷ [illegible] 책의 부록에 있는 제곱근표에는 1.00부터 99.9까지의 수에 대한 양의 제[illegible]을 반올림한 값이 나와 있다. 이 제곱근표에는 1.00부터 9.99까지 0.01 간격으로, 10.0부터 99.9까지 0.1 간격으로 되어 있다.

다음 표는 부록에 있는 제곱근표의 일부를 나타낸 것이다.

제곱근표는 양의 제곱근을 소수 넷째 자리에서 반올림하여 구한 것이다.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261

본문 해설

❶ 계산기는 그 종류에 따라 제곱근값을 계산하는 순서가 약간씩 다를 수 있다. 그러나 전문가용 계산기가 아닌 일반 계산기를 사용하는 방법은 교과서에 제시되어 있는 방법과 같다.

❷ 제곱근표에 있는 1.00부터 99.9까지의 수 중에서 유리수의 제곱인 수의 제곱근은 반올림한 값이 아닌 실제의 값이다.

읽/기/자/료 점토판에 나타난 $\sqrt{2}$

오른쪽 사진은 지금으로부터 약 4000년 전의 것으로 추정되는 바빌로니아의 유물인 흙으로 만든 점토판이다.
이 점토판의 사각형의 대각선 위에는

1, 24, 51, 10

이 적혀 있다.
그 당시 바빌로니아에서는 60진법을 사용하였으므로 이를 십진법의 수로 나타내어 보면

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.41421\dot{2}9\dot{6}$$

이며 이 값은 $\sqrt{2}$를 표현한 것이다.

교과서 45 쪽

제곱근표에서 $\sqrt{1.25}$를 반올림한 값은 왼쪽의 수 1.2의 가로줄과 위쪽의 수 5의 세로줄이 만나는 곳의 수 1.118이다. 즉,

$$\sqrt{1.25}=1.118$$

이다.

문제 8 다음 수를 제곱근표를 이용하여 구하여라.

(1) $\sqrt{1.32}$　　(2) $\sqrt{4.51}$

(3) $\sqrt{27.6}$　　(4) $\sqrt{84.3}$

❶ …곱근표에는 0과 1 사이의 수와 99.9보다 큰 수의 제곱근을 반올림한 값은 … 있지 않다. 그러나 이들의 제곱근을 반올림한 값은

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}\ (a>0,\ b>0)$$

와 제곱근표를 이용하여 구할 수 있다.

예제 7 다음 수를 제곱근표를 이용하여 구하여라.

(1) $\sqrt{340}$　　(2) $\sqrt{0.34}$

풀이 (1) 제곱근표에서 $\sqrt{3.4}=1.844$이므로

$$\sqrt{340}=\sqrt{3.4\times10^2}=10\sqrt{3.4}$$
$$=10\times1.844=18.44$$

(2) 제곱근표에서 $\sqrt{34}=5.831$이므로

$$\sqrt{0.34}=\sqrt{\frac{34}{100}}=\frac{\sqrt{34}}{10}$$
$$=\frac{5.831}{10}=0.5831$$

답 (1) 18.44　(2) 0.5831

지/도/자/료

인터넷 에듀넷 사이트(http://www.edunet4u.net)에 접속하면 수업에 활용하기 유용한 플래시 자료를 볼 수 있다. [중등 에듀넷] 항목을 클릭하면 학년과 과목 창이 나타나는데 여기서

[수학]–[수와 연산]–[제곱근의 덧셈과 뺄셈]

을 선택하면 이번 단원의 내용을 공부할 수 있다.

8

목표| 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{1.32}=\mathbf{1.149}$

(2) $\sqrt{4.51}=\mathbf{2.124}$

(3) $\sqrt{27.6}=\mathbf{5.254}$

(4) $\sqrt{84.3}=\mathbf{9.182}$

본문 해설

❶ 제곱근표에 없는 수는 근호 안의 수를 다음과 같이 고쳐서 계산한다.

a가 제곱근표에 있는 수일 때

- 근호 안의 수가 100보다 큰 수이면
  $\sqrt{100a}=10\sqrt{a}$, $\sqrt{10000a}=100\sqrt{a}$, …
- 근호 안의 수가 1보다 작은 수이면
  $\sqrt{\frac{a}{100}}=\frac{\sqrt{a}}{10}$, $\sqrt{\frac{a}{10000}}=\frac{\sqrt{a}}{100}$, …

읽/기/자/료 히파티아

히파티아는 기원후 370년경 알렉산드리아 대학의 저명한 수학과 교수였던 테온의 딸로 태어났다. 알렉산드리아는 서로의 학문을 나누기 위해서 모든 문명국으로부터 학자들이 모여드는 세계적인 학문의 중심지였기 때문에 히파티아는 유년기부터 예술, 문학, 자연 과학, 철학에 이르기까지 상당히 균형 잡힌 교육을 받았다. 그녀는 수학에 관한 몇 권의 책을 저술하였고 별에 관련된 많은 연구 자료가 들어 있는 프톨레마이오스(Ptolemaios, C.: ?~?)의 천체 관측 규범인 "알마게스트"에 관한 해설서도 집필하였다. 원뿔 곡선에 대해 히파티아가 주석을 쓰고 난 후 수 세기가 지나 데카르트(Descartes, R.: 1596~1650)나 뉴턴(Newton, I.: 1642~1727) 그리고 라이프니츠(Leibniz, G. W.: 1646~1716) 등의 연구가 나올 때까지 수리 과학에서의 발전은 더 이상 없었다. 10세기 말경의 그리스 문학 사전 편찬자인 수이다스는 몇 권의 책이 히파티아의 것이라고 기록하였으나 대부분의 책들은 완전히 파손되었거나 없어졌다. 그녀의 연구는 단편적인 부분만 남아 있는데 "디오판토스의 천문학적 계산에 관하여"라고 하는 그녀의 저서 일부분이 15세기경 바티칸 도서관에서 발견되었다.

9

목표 | 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값을 구하고, 계산기로 확인할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 제곱근표에서 $\sqrt{1.67}=1.292$이므로

$\sqrt{167}=\sqrt{1.67\times100}=10\sqrt{1.67}$

$=10\times1.292=\mathbf{12.92}$

계산기에서

$\sqrt{167}=12.9228479833$ ➞ **12.92**

(2) 제곱근표에서 $\sqrt{23}=4.796$이므로

$\sqrt{2300}=\sqrt{23\times100}=10\sqrt{23}$

$=10\times4.796=\mathbf{47.96}$

계산기에서

$\sqrt{2300}=47.9583152331$ ➞ **47.96**

(3) 제곱근표에서 $\sqrt{5.2}=2.280$이므로

$\sqrt{0.052}=\sqrt{\dfrac{5.2}{100}}=\dfrac{\sqrt{5.2}}{10}=\dfrac{2.280}{10}$

$=\mathbf{0.2280}$

계산기에서

$\sqrt{0.052}=0.22803508501$ ➞ **0.2280**

(4) 제곱근표에서 $\sqrt{84.1}=9.171$이므로

$\sqrt{0.841}=\sqrt{\dfrac{84.1}{100}}=\dfrac{\sqrt{84.1}}{10}=\dfrac{9.171}{10}$

$=\mathbf{0.9171}$

계산기에서

$\sqrt{0.841}=0.91706052144$ ➞ **0.9171**

교과서 46 쪽

문제 9 제곱근표를 이용하여 다음 수의 값을 구하고, 계산기로 확인하여라.

(1) $\sqrt{167}$ (2) $\sqrt{2300}$

(3) $\sqrt{0.052}$ (4) $\sqrt{0.841}$

문제 10 제곱근표에서 $\sqrt{7}=2.646$, $\sqrt{70}=8.367$일 때, 다음 수의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{700}$ (2) $\sqrt{7000}$

(3) $\sqrt{0.7}$ (4) $\sqrt{0.07}$

컴퓨터의 활용 **양의 제곱근을 구하여 보자.**

컴퓨터 프로그램을 이용하여 양의 제곱근을 구할 수 있다.

5의 양의 제곱근을 구하여 보자.

1. A2 셀에 숫자 '5'를 입력한다.

2. C2 셀에 '=INT(POWER(A2, 0.5))', B2 셀에 '=(POWER(A2, 0.5)−C2)＊10'을 입력한다. '=INT(POWER(A2, 0.5))'는 $\sqrt{5}$의 정수 부분을, '=(POWER(A2, 0.5)−C2)＊10'은 $\sqrt{5}$의 소수 부분에 10을 곱한 값을 나타낸다.

3. C3 셀에 '=INT(B2)', B3 셀에 '=(B2−C3)＊10'을 입력한다.

4. C1 셀에 '.'을 입력한다.

5. D2 셀에 '=C2&TEXT(C1, 0)', D3 셀에 '=D2&TEXT(C3, 0)'을 입력한다.

6. B3 셀부터 D3 셀까지 블록으로 잡고 아래로 드래그한다.

7. 5의 양의 제곱근은 2.2360679774…임을 알 수 있다.

10

목표 | $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}\ (a>0,\ b>0)$임을 이용하여 제곱근의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\sqrt{700}=\sqrt{7\times100}=10\sqrt{7}=10\times2.646=\mathbf{26.46}$

(2) $\sqrt{7000}=\sqrt{70\times100}=10\sqrt{70}=10\times8.367=\mathbf{83.67}$

(3) $\sqrt{0.7}=\sqrt{\dfrac{7}{10}}=\sqrt{\dfrac{70}{100}}=\dfrac{\sqrt{70}}{10}=\dfrac{8.367}{10}=\mathbf{0.8367}$

(4) $\sqrt{0.07}=\sqrt{\dfrac{7}{100}}=\dfrac{\sqrt{7}}{10}=\dfrac{2.646}{10}=\mathbf{0.2646}$

지/도/자/료

한국교육과정평가원 홈페이지(http://www.kice.re.kr)에 방문하여

[정보마당]−[교육평가]−[기출문제]−[학업성취도]

를 클릭하면 연도별, 학년별, 과목별 국가 수준 학업성취도 평가 기출문제를 다운받을 수 있다. 이곳에서 수학을 선택하여 기출문제를 풀어 자신의 실력을 스스로 평가해 보게 할 수 있다.

교과서 47 쪽

중/단/원 기초

수준별

$a>0$, $b>0$일 때,
① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

1 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{3}\sqrt{7}$　(2) $\sqrt{2}\sqrt{11}$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$　(4) $\sqrt{\frac{3}{16}}$

$a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때, 보통 근호 안의 수는 가장 작은 자연수가 되도록 한다.

2 다음을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{7^2\times5}$　(2) $\sqrt{2^2\times3^2\times7}$

분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 분모, 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 분모의 유리화라고 한다.

3 다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$　(2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(3) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$　(4) $\frac{4}{\sqrt{12}}$

근호를 포함한 식에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있을 때에는 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산한다.

4 다음을 계산하여라.

(1) $2\sqrt{7}+\sqrt{7}$　(2) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{2}$

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$　(4) $\sqrt{2}\times5-2\div\sqrt{2}$

5 다음 수의 반올림한 값을 제곱근표를 이용하는 방법과 계산기를 이용하는 방법으로 각각 구하여라.

(1) $\sqrt{1700}$　(2) $\sqrt{0.017}$

중/단/원 기초

1

목표| 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{3}\sqrt{7}=\sqrt{3\times7}=\mathbf{\sqrt{21}}$

(2) $\sqrt{2}\sqrt{11}=\sqrt{2\times11}=\mathbf{\sqrt{22}}$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{6}{24}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(4) $\sqrt{\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4^2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

2

목표| $\sqrt{a^2b}$의 꼴을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{7^2\times5}=\mathbf{7\sqrt{5}}$

(2) $\sqrt{2^2\times3^2\times7}=2\times3\times\sqrt{7}=\mathbf{6\sqrt{7}}$

주의| $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때, 근호 안의 수 b는 가장 작은 자연수가 되어야 한다.

3

목표| 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\mathbf{\frac{\sqrt{42}}{7}}$

(2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

(3) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{15}}{3}}$

(4) $\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{6}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

4

목표| 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2\sqrt{7}+\sqrt{7}=(2+1)\sqrt{7}=\mathbf{3\sqrt{7}}$

(2) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}$
$=(3-4+1)\sqrt{2}=\mathbf{0}$

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$
$=5+2\sqrt{15}+3=\mathbf{8+2\sqrt{15}}$

(4) $\sqrt{2}\times5-2\div\sqrt{2}=5\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}-\sqrt{2}$
$=(5-1)\sqrt{2}=\mathbf{4\sqrt{2}}$

5

목표| 제곱근표와 계산기를 이용하여 제곱근의 반올림한 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 제곱근표에서 $\sqrt{17}=4.123$이므로

$\sqrt{1700}=\sqrt{17\times100}=10\sqrt{17}=10\times4.123=\mathbf{41.23}$

계산기에서 $\sqrt{1700}=41.2310562561$ ➡ **41.23**

(2) 제곱근표에서 $\sqrt{1.7}=1.304$이므로

$\sqrt{0.017}=\sqrt{\frac{1.7}{100}}=\frac{\sqrt{1.7}}{10}=\frac{1.304}{10}=\mathbf{0.1304}$

계산기에서 $\sqrt{0.017}=0.1303840481$ ➡ **0.1304**

중/단/원 기본

1

목표| $\sqrt{a^2b}$의 꼴을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{2\times11^2}=\mathbf{11\sqrt{2}}$

(2) $\sqrt{3^2\times5\times7^2}=\mathbf{21\sqrt{5}}$

(3) $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=\mathbf{3\sqrt{5}}$

(4) $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times3}=\mathbf{5\sqrt{3}}$

2

목표| 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{2}-3)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{3}}$

(2) $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{48}}=\dfrac{2-\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{6})\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}}$

(3) $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}=\dfrac{5(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\dfrac{5(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6})^2-1^2}=\dfrac{5(\sqrt{6}+1)}{6-1}=\mathbf{\sqrt{6}+1}$

(4) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{(3-\sqrt{2})^2}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\dfrac{(3-\sqrt{2})^2}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{9-6\sqrt{2}+2}{7}=\mathbf{\dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}}$

3

목표| 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3\sqrt{2}\times\sqrt{12}\times\sqrt{\dfrac{5}{8}}=3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\mathbf{3\sqrt{15}}$

(2) $\sqrt{8}\div\sqrt{\dfrac{2}{5}}\div\sqrt{20}=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\mathbf{1}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\div\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{12}}{5}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}}{5}}$

(4) $(-4\sqrt{7})\div(-\sqrt{28})\times\sqrt{21}=4\sqrt{7}\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\times\sqrt{21}=\mathbf{2\sqrt{21}}$

교과서 48 쪽

중/단/원 기본

수준별

제곱근의 곱셈 **1** 다음을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{2\times11^2}$ (2) $\sqrt{3^2\times5\times7^2}$

(3) $\sqrt{45}$ (4) $\sqrt{75}$

분모의 유리화 **2** 다음 수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{48}}$

(3) $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$ (4) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

제곱근의 곱셈과 나눗셈 **3** 다음을 계산하여라.

(1) $3\sqrt{2}\times\sqrt{12}\times\sqrt{\dfrac{5}{8}}$ (2) $\sqrt{8}\div\sqrt{\dfrac{2}{5}}\div\sqrt{20}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\div\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{8}}$ (4) $(-4\sqrt{7})\div(-\sqrt{28})\times\sqrt{21}$

제곱근의 덧셈과 뺄셈 **4** 다음을 계산하여라.

(1) $4\sqrt{3}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{50}+\sqrt{20}$

(3) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-2)+\sqrt{24}$ (4) $\sqrt{54}-\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

근호를 포함한 식의 혼합 계산 **5** 다음을 계산하여라.

(1) $(2\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ (2) $(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2$

(3) $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

4

목표| 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $4\sqrt{3}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(4+1+2)\sqrt{3}=\mathbf{7\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{50}+\sqrt{20}=2\sqrt{2}+\sqrt{5}-5\sqrt{2}+2\sqrt{5}=2\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{5}=\mathbf{-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}}$

(3) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-2)+\sqrt{24}=\sqrt{18}-2\sqrt{6}+\sqrt{24}=3\sqrt{2}-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{54}-\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3\sqrt{6}-3-\sqrt{6}=3\sqrt{6}-\sqrt{6}-3=\mathbf{2\sqrt{6}-3}$

5

목표| 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(2\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=(2\sqrt{5})^2+2\times2\sqrt{5}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=\mathbf{23+4\sqrt{15}}$

(2) $(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2=(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=\mathbf{15-4\sqrt{14}}$

교과서 49 쪽

중/단/원 실력

1 $\frac{\sqrt{396}}{\sqrt{x}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 중에서 가장 작은 짝수를 구하여라.

• 175를 소인수분해하여 본다.

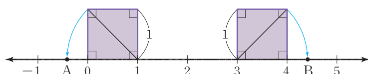
2 $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{7}$일 때, $\sqrt{175}$를 a, b를 사용하여 나타내어라.

3 $x=\sqrt{7}$일 때, $2x$는 $\frac{1}{x}$의 몇 배인지 구하여라.

4 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$을 계산하여라.

• 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

5 다음 수직선에서 두 점 A, B에 대응하는 수를 각각 a, b라고 할 때, $\frac{b}{a}$의 값을 구하여라.



(3) $\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(1+2\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

중/단/원 실력

1

목표| 제곱근의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{\sqrt{396}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2^2\times3^2\times11}{x}}$이 자연수가 되기 위한 x의 값은 11, $2^2\times11=44$, $3^2\times11=99$, $2^2\times3^2\times11=396$이므로 가장 작은 짝수는 **44**이다.

2

목표| 제곱근의 곱셈을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{175}=\sqrt{5^2\times7}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{7}$

$=\sqrt{5\times5}\times\sqrt{7}$

$=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}$

$=(\sqrt{5})^2\times\sqrt{7}=\boldsymbol{a^2b}$

3

목표| 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $2x=2\sqrt{7}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{7}}$

$2\sqrt{7}\div\frac{1}{\sqrt{7}}=2\sqrt{7}\times\sqrt{7}=14$

따라서 $2x$는 $\frac{1}{x}$의 **14배**이다.

4

목표| 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}-\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}-\frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3}$

$=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}-\frac{8-2\sqrt{15}}{2}$

$=4+\sqrt{15}-(4-\sqrt{15})$

$=\boldsymbol{2\sqrt{15}}$

5

목표| 수직선에서 대응하는 무리수를 찾고, 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $a=1-\sqrt{2}$, $b=3+\sqrt{2}$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=\frac{3+4\sqrt{2}+2}{1-2}=\frac{5+4\sqrt{2}}{-1}$

$=\boldsymbol{-5-4\sqrt{2}}$

수행 과제

● 수행 과제 의도

이 수행 과제는 황금 분할기를 직접 만들어 보고 무리수인 황금비가 일상생활에서 이용되는 예를 찾아봄으로써 새롭게 배운 무리수에 대하여 다시 한 번 생각해 보도록 하기 위한 것이다.

과제 1 _예시

주어진 방법대로 각자 황금 분할기를 만들어 본다.

교과서 50 쪽

수행 과제

황금 분할기 만들기

●준비물 하드보드지, 가위, 자, 핀

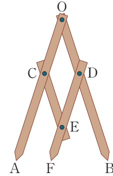
사람들이 안정적이고 아름답다고 느끼는 자연물이나 건축물에는 황금비가 숨어 있는데, 황금비는 $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 여기서 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$는 무리수이고 그 값은 $1.6180339\cdots$이다. 실제 정확한 무리수는 측정하기 어렵기 때문에 $1.6180339\cdots$와 비슷한 1.6을 사용하여 황금 분할기를 만들어 보자.

과제 1 황금비를 찾을 수 있는 황금 분할기를 다음과 같은 방법으로 만들어 보자.

❶ 하드보드지를 잘라 4개의 막대를 준비한 다음 길이를 정확하게 측정할 수 있도록 끝을 뾰족하게 잘라 낸다.
❷ 네 개의 막대 위에 다음 조건에 맞게 구멍을 뚫는다.

$$\overline{OB} /\!/ \overline{CE},\ \overline{OA} /\!/ \overline{DF}$$
$$\overline{OC} : \overline{CA} = \overline{OD} : \overline{DB} = 1 : 1.6$$

❸ 네 개의 막대를 오른쪽 그림과 같이 핀으로 연결한다. 이때 A, F, B는 일직선이 되어야 한다.



과제 2 오른쪽 그림과 같이 여러 곳에서 황금비를 찾아보자.

과제 2 _예시

황금 분할기를 이용하여 생활 주변에서 황금비를 찾아본다.

교과서 51 쪽

Ⅰ. 실수와 그 계산

학습에 대한 자/기/평/가

이름: ______________ (____학년 ____반 ____번)

점검 항목		도달 정도		
학습 내용	제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하였는가?			
	무리수의 개념을 이해하였는가?			
	실수의 대소 관계를 이해하였는가?			
	근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있는가?			
학습 태도	학습 준비물을 잘 준비하였는가?			
	수업 시간에 적극적으로 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			

재미있었거나 어려웠던 내용 적어 보기

더 알고 싶거나 궁금한 점 적어 보기

스스로 평가하기

선생님 의견

읽/기/자/료 밀로의 비너스

'밀로의 비너스'는 고대 그리스 말기에 대리석으로 만든 조각상으로 현재 프랑스 루브르 박물관에 소장되어 있다.
이 조각상은 높이가 204 cm이고, 허리 부분을 단면으로 하여 상하(上下) 두 개의 대리석으로 이루어져 있으며 양팔이 없다. 또한 배꼽을 중심으로 상반신과 하반신의 비가 황금비를 이룬다.

교과서 52 쪽

Ⅰ. 실수와 그 계산

대단원 핵심 한눈에 보기

① 제곱근과 그 성질

제곱근	(1) 음이 아닌 수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다. (2) 양수 a의 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$로 나타낸다.
제곱근의 성질	$a>0$일 때, (1) $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$ (2) $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$
제곱근의 대소 관계	$a>0$, $b>0$일 때, (1) $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ (2) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

② 무리수

무리수	(1) 무리수: 유리수가 아닌 수 (2) 무리수를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 된다. 예 $\sqrt{2}=1.41421356237\cdots$ $\sqrt{3}=1.73205080756\cdots$ $\pi=3.14159265358\cdots$
실수	유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다. 실수 - 유리수 - 정수 - 양의 정수(자연수): 1, 2, 3, … 실수 - 유리수 - 정수 - 0 실수 - 유리수 - 정수 - 음의 정수: -1, -2, -3, … 실수 - 유리수 - 정수가 아닌 유리수: $\frac{1}{2}$, -0.3, $-\frac{3}{5}$, … 실수 - 무리수: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …

③ 수직선과 실수의 대소 관계

실수와 수직선	(1) 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있다. (2) 수직선은 실수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다.
실수의 대소 관계	두 실수 a, b에 대하여 (1) $a-b>0$이면 $a>b$ (2) $a-b=0$이면 $a=b$ (3) $a-b<0$이면 $a<b$

④ 근호를 포함한 식의 계산

제곱근의 곱셈과 나눗셈	$a>0$, $b>0$일 때, (1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ (2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$
분모의 유리화	분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 분모, 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 분모의 유리화라고 한다. 예 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$
제곱근의 덧셈과 뺄셈	근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈은 근호가 있는 수를 문자로 생각하여 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 동류항끼리 계산하는 것과 같은 방법으로 한다.
제곱근을 반올림한 값	제곱근을 반올림한 값은 계산기나 제곱근표를 이용하여 구할 수 있다.

이번 단원에서 배운 용어와 기호

- 제곱근, 근호, 무리수, 실수, 분모의 유리화
- $\sqrt{\ }$

지도 내용

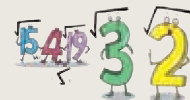
1. 제곱근, 근호, 무리수, 실수의 뜻을 알고, 유리수와 무리수를 구분할 수 있도록 한다. 제곱근의 성질을 이해하고, 제곱근의 대소 관계, 실수의 대소 관계를 알 수 있도록 한다.

2. 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근을 포함한 식을 계산할 수 있도록 한다. 분모의 유리화의 뜻을 알고, 주어진 수의 분모를 유리화할 수 있도록 한다.

교과서 53 쪽

만화로 보는 수학 이야기

무리수 주식회사



생각 키/우/기 | $\sqrt{4}$가 무리수 주식회사 검색대에서 걸린 이유를 설명하여 보자.

만화로 보는 수학 이야기

만화에서는 $\sqrt{4}$와 같이 근호가 있어도 유리수인 수가 있음을 보여 주고 있다. 근호 안의 수가 유리수의 제곱인 수는 유리수이다.

생각 키/우/기

$\sqrt{4}$는 근호가 있어 마치 무리수처럼 보이지만 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$이므로 유리수이기 때문에 무리수 주식회사의 검색대에서 걸렸다.

대/단/원 평가 문제

교과서 54 쪽

대/단/원 평가 문제

선/택/형

1 다음 중에서 옳은 것은?

① $\sqrt{4}$의 값은 ±2이다.
② -4의 제곱근은 -2이다.
③ 4의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$이다.
④ $(-2)^2$의 제곱근은 ±2이다.
⑤ 2의 양의 제곱근은 4이다.

2 다음 수 중에서 무리수는 모두 몇 개인가?

$\sqrt{0.01}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{25}$

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

3 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① 무한소수는 무리수이다.
② 유리수이면서 무리수인 수는 없다.
③ 유리수와 무리수는 모두 실수이다.
④ 모든 실수는 수직선 위의 점에 대응된다.
⑤ 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.

4 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $\sqrt{ab^2}=a\sqrt{b}$
② $(-\sqrt{ab})^2=-ab$
③ $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$
④ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{b}\times\sqrt{a}$
⑤ $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{b\div a}$

5 다음 중에서 옳은 것을 모두 찾으면? (정답 2개)

① $5\sqrt{2}<7$ ② $\sqrt{8}<2\sqrt{2}$
③ $0.6<\sqrt{0.6}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{2}{3}$
⑤ $-2\sqrt{3}<-\sqrt{14}$

6 $(3+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$를 계산하면?

① $-1-\sqrt{2}$ ② $1-\sqrt{2}$
③ $-7+5\sqrt{2}$ ④ $7-5\sqrt{2}$
⑤ $4\sqrt{2}$

7 다음 중에서 옳은 것은?

① $\frac{8}{\sqrt{2}}=2$ ② $\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
③ $\sqrt{\frac{6}{2}}=3$ ④ $\sqrt{0.2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

8 $\frac{6}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{27}-\sqrt{72}}{\sqrt{3}}$를 계산하면?

① $3+\sqrt{6}$ ② $3+5\sqrt{6}$
③ $-3+5\sqrt{6}$ ④ $3-5\sqrt{6}$
⑤ $3+\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

1
목표| 제곱근의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.

풀이| ① $\sqrt{4}=2$
② 음수의 제곱근은 생각하지 않는다.
③ 4의 제곱근은 ±2이다.
④ $(-2)^2=4$의 제곱근은 ±2이다.
⑤ 2의 양의 제곱근은 $\sqrt{2}$이다.

답 ④

2
목표| 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{0.01}=\sqrt{0.1^2}=0.1$이고 $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$이므로 유리수이다.

따라서 무리수는 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{8}$의 3개이다.

답 ③

3
목표| 실수의 성질을 이해하게 한다.

풀이| ① 순환하는 무한소수는 유리수이다.

답 ①

4
목표| 제곱근의 성질을 이해하게 한다.

풀이| ① $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$
② $(-\sqrt{ab})^2=ab$
③ $a=1$, $b=4$라고 하면
$\sqrt{a}+\sqrt{b}=3$, $\sqrt{a+b}=\sqrt{5}$이므로
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$
④ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{ba}=\sqrt{b}\times\sqrt{a}$
⑤ $a=1$, $b=4$라고 하면
$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{b\div a}=2$이므로
$\sqrt{a}\div\sqrt{b}\neq\sqrt{b\div a}$

답 ④

5
목표| 제곱근의 대소 관계를 이해하게 한다.

풀이| ① $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$, $7=\sqrt{49}$이고 $\sqrt{50}>\sqrt{49}$이므로
$5\sqrt{2}>7$
② $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
③ $0.6=\sqrt{0.36}$이고 $\sqrt{0.36}<\sqrt{0.6}$이므로
$0.6<\sqrt{0.6}$
④ $\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{9}}$, $\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{4}{9}}$이고
$\sqrt{\frac{3}{9}}<\sqrt{\frac{4}{9}}$이므로 $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{2}{3}$
⑤ $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$이고 $\sqrt{12}<\sqrt{14}$이므로
$2\sqrt{3}<\sqrt{14}$
따라서 $-2\sqrt{3}>-\sqrt{14}$이다.

답 ③, ④

9 $a=2+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $c=\sqrt{3}+1$일 때, 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $a<b<c$ ② $a<c<b$
③ $b<c<a$ ④ $c<b<a$
⑤ $c<a<b$

10 제곱근표에서 $\sqrt{8.57}=2.927$, $\sqrt{a}=29.27$일 때, 다음 중에서 a의 값은?

① 85.7 ② 857 ③ 8570
④ 85700 ⑤ 857000

서/답/형

11 x는 자연수일 때, $6<\sqrt{x}<7$을 만족시키는 x의 개수를 구하여라.

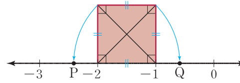
12 $\dfrac{1}{\sqrt{75}}=k\sqrt{3}$일 때, k의 값을 구하여라.

13 $1<a<2$일 때, $\sqrt{(1-a)^2}-\sqrt{(2-a)^2}$을 간단히 하여라.

14 $3\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{48}-2\sqrt{27}$을 계산하여라.

|서술형|

15 다음 그림에서 두 점 P, Q에 대응하는 수를 각각 p, q라고 할 때, $2p+q$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서술형|

16 $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, b^2+ab의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, $0\le b<1$)

6

목표| 제곱근의 곱셈을 할 수 있게 한다.

풀이| $(3+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=3-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4=-1-\sqrt{2}$

답 ①

7

목표| 분모의 유리화를 할 수 있게 한다.

풀이| ① $\dfrac{8}{\sqrt{2}}=\dfrac{8\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

② $\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$

③ $\sqrt{\dfrac{6}{2}}=\sqrt{3}$

④ $\sqrt{0.2}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

답 ②

8

목표| 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{6}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\dfrac{\sqrt{27}-\sqrt{72}}{\sqrt{3}}$

$=\left(6+\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)-(\sqrt{9}-\sqrt{24})$

$=6+3\sqrt{6}-3+2\sqrt{6}$

$=3+5\sqrt{6}$

답 ②

9

목표| 실수의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| $a-b=(2+\sqrt{2})-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=2-\sqrt{3}>0$

이므로 $a>b$ ……①

$b-c=(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)$

$=\sqrt{2}-1>0$

이므로 $b>c$ ……②

①, ②에서 $c<b<a$

답 ④

10

목표| 제곱근의 성질과 제곱근의 반올림한 값을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{8.57}=2.927$, $\sqrt{a}=29.27$이므로

$10\times\sqrt{8.57}=10\times2.927=29.27$

$\sqrt{a}=10\times\sqrt{8.57}$

$=\sqrt{100}\times\sqrt{8.57}$

$=\sqrt{100\times8.57}$

$=\sqrt{857}$

따라서 $a=857$이다.

답 ②

11

목표| 제곱근의 대소 관계를 이해하고, 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $6<\sqrt{x}<7$에서 $\sqrt{36}<\sqrt{x}<\sqrt{49}$이므로

$36<x<49$

따라서 x는 37, 38, $\cdots$, 48로 모두 12개이다.

답 12개

12

목표| 분모의 유리화를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{1}{\sqrt{75}}=\frac{1}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{15}=k\sqrt{3}$

따라서 k의 값은 $\frac{1}{15}$이다.

답 $\frac{1}{15}$

13

목표| 제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $1-a<0$이므로 $\sqrt{(1-a)^2}=-(1-a)=a-1$

$2-a>0$이므로 $\sqrt{(2-a)^2}=2-a$

$\sqrt{(1-a)^2}-\sqrt{(2-a)^2}=(a-1)-(2-a)$

$=a-1-2+a$

$=2a-3$

답 $2a-3$

14

목표| 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| $3\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{48}-2\sqrt{27}$

$=6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-4\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

$=10\sqrt{5}-10\sqrt{3}$

답 $10\sqrt{5}-10\sqrt{3}$

15

목표| 수직선에서 대응하는 무리수를 찾고, 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $p=-1-\sqrt{2}$ …㉠

$q=-2+\sqrt{2}$ …㉡

$2p+q=2(-1-\sqrt{2})+(-2+\sqrt{2})$

$=-2-2\sqrt{2}-2+\sqrt{2}$

$=-4-\sqrt{2}$ …㉢

답 $-4-\sqrt{2}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	p의 값 구하기	㉠	40%
	q의 값 구하기	㉡	40%
답 구하기	$2p+q$의 값 구하기	㉢	20%

16

목표| 무리수를 이해하고, 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{20}+2}{2}$

$=\frac{2\sqrt{5}+2}{2}=\sqrt{5}+1$

$2<\sqrt{5}<3$이므로

$3<\sqrt{5}+1<4$ …㉠

따라서 정수 부분은 3이므로

$a=3$ …㉡

소수 부분은 주어진 값에서 정수 부분을 뺀 값과 같으므로

$b=(\sqrt{5}+1)-3=\sqrt{5}-2$ …㉢

$b^2+ab=(\sqrt{5}-2)^2+3(\sqrt{5}-2)$

$=5-4\sqrt{5}+4+3\sqrt{5}-6$

$=3-\sqrt{5}$ …㉣

답 $3-\sqrt{5}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\sqrt{5}+1$의 범위 구하기	㉠	20%
	a의 값 구하기	㉡	30%
	b의 값 구하기	㉢	30%
답 구하기	b^2+ab의 값 구하기	㉣	20%

교과서 56 쪽

수학산책

제곱근과 행성의 일 년

태양계는 태양을 비롯하여 태양을 중심으로 공전하는 천체의 모임으로 8개의 행성과 그 행성 주위를 도는 위성, 그리고 수많은 소행성과 혜성, 유성 등을 포함한다. 태양계의 행성은 1930년부터 70여 년간 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성, 천왕성, 해왕성, 명왕성의 9개로 인식되어 왔다. 그러나 2006년에 이들 중에서 맨 바깥쪽에 있던 명왕성이 왜행성으로 분류되면서 행성의 수는 8개가 되었다.

태양계의 중심에 있는 태양은 지름의 길이가 약 1392000 km이고, 질량은 약 1.99×10^{33} g으로 지구 질량의 33만 배 정도인 거대한 불덩어리이다. 태양계의 전체 질량 중에서 태양은 99.86 %에 해당하며 목성과 토성이 나머지 질량의 90 %를 차지하고 있다. 따라서 그 외의 천체들의 질량은 태양계 내에서 매우 작은 값에 해당한다.

태양은 우리 은하의 중심으로부터 약 3만 광년 거리에서 많은 항성과 더불어 은하계의 중심 주위를 돌고 있으며, 이렇게 한 바퀴를 도는 데 약 2억 2600만 년이 걸린다. 태양계의 행성이 태양을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간을 그 행성의 일 년이라고 하는데, 태양에서 행성까지의 평균 거리를 이용하면 행성의 일 년이 지구 시간으로 며칠에 해당하는지 계산할 수 있다.

교과서 57 쪽

즉, 태양에서 행성까지의 평균 거리를 R백만 km라 하고 행성의 일 년을 N일이라고 하면 N을 구하는 식은 다음과 같다.

$$N=0.2\times(\sqrt{R})^3$$

이 식에서 알 수 있듯이 행성의 일 년을 계산하려면 제곱근을 계산할 수 있어야 한다.

한편 태양에서 지구까지의 평균 거리가 149.6백만 km이므로 지구의 일 년은 $0.2\times(\sqrt{149.6})^3$으로 약 365일로 계산된다. 또 태양에서 가장 가까운 수성은 태양으로부터 평균 거리가 57.9백만 km이므로 수성의 일 년은 $0.2\times(\sqrt{57.9})^3$으로 약 88일로 계산된다. 이는 행성의 일 년 가운데 가장 짧은 날수이다.

실제로 수성이 태양을 도는 평균 속력은 초속 48 km로 가장 빠르다. 그래서 서양에서는 수성을 신들의 전령으로서 날개 달린 발을 가진 로마 신화의 머큐리 신(그리스 신화의 헤르메스)의 이름을 붙여 '머큐리'라고 부른다.

이와 같은 방법으로 행성의 일 년을 계산하여 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 물론 태양에서 행성까지의 평균 거리는 실제로 측정할 수 없으므로 며칠 정도의 오차는 생긴다. 하지만 제곱근이 이렇게 실생활에서 유용하게 쓰인다는 사실 만큼은 기억해 두어야 할 것이다.

행성	평균 거리 (백만 km)	행성의 일 년 (일)
수성	57.9	88
금성	108.2	225
지구	149.6	365
화성	227.9	688
목성	778.3	4342
토성	1427.0	10781
천왕성	2871.0	30766
해왕성	4497.1	60315

선/택/형

1 다음 중에서 옳은 것은? [5점]

① 16의 제곱근은 4이다.
② $\sqrt{36}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{6}$이다.
③ $(-3)^2$의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다.
④ $\sqrt{(-5)^2}$의 제곱근은 ±5이다.
⑤ $\frac{1}{2}$의 제곱근은 $\pm\frac{1}{4}$이다.

2 $(-7)^2$의 양의 제곱근을 a, $\sqrt{81}$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, $a-b$의 값은? [5점]

① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

3 다음 중에서 옳은 것은 모두 몇 개인가? [6점]

㉠ $\sqrt{0.3}=\frac{3}{\sqrt{10}}$	㉡ $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$
㉢ $\sqrt{25}-\sqrt{16}=1$	㉣ $-\sqrt{(-11)^2}=-11$

① 0개 ② 1개 ③ 2개
④ 3개 ⑤ 4개

4 $1<x<3$일 때, $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$을 간단히 하면? [6점]

① -4 ② -2 ③ 2
④ $2x-4$ ⑤ $-2x+4$

5 다음 중에서 두 수의 대소 관계가 옳은 것은? [5점]

① $\sqrt{50}<7$ ② $5\sqrt{2}<2\sqrt{5}$
③ $-\sqrt{3}<-\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{0.1}<-0.1$
⑤ $\frac{\sqrt{8}}{2}<\sqrt{2}$

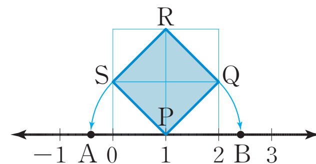
6 $2.5<\sqrt{2x}<4$를 만족시키는 모든 자연수 x값의 합은? [6점]

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

7 다음 실수 중에서 유리수가 <u>아닌</u> 수는? [6점]

① $\sqrt{0.04}$ ② $\sqrt{\frac{9}{16}}$ ③ $-\sqrt{12}$
④ $-3\sqrt{49}$ ⑤ $6.2\dot{8}$

8 다음 그림은 한 변의 길이가 2인 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 정사각형 PQRS를 그린 것이다. 두 점 A, B에 대응하는 수를 각각 a, b라고 할 때, a^2+b^2+ab의 값은? [6점]



① 5 ② 6 ③ 9
④ $4\sqrt{2}-1$ ⑤ $6\sqrt{2}$

9 다음 중에서 계산 결과가 다른 하나는? [5점]

① $7\sqrt{6}-6\sqrt{6}$ ② $\sqrt{30}\div\sqrt{5}$

③ $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{6}{\sqrt{6}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{12}}{2}$

10 $2\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{75}=a\sqrt{3}$일 때, a의 값은? [5점]

① -5 ② -3 ③ 2

④ 4 ⑤ 6

서/답/형

11 가로, 세로의 길이와 높이가 각각 $(5+\sqrt{6})$cm, 5 cm, $\sqrt{6}$ cm인 직육면체의 부피를 구하여라. [7점]

12 다음을 계산하여라. [7점]

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

13 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$를 계산하여라. [7점]

14 제곱근표에서 $\sqrt{3.7}=1.924$, $\sqrt{37}=6.083$일 때 $\sqrt{0.37}$의 반올림한 값을 구하여라. [7점]

|서술형|

15 $\sqrt{6}$의 소수 부분을 a라고 할 때, $\dfrac{a+4}{a}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [8점]

|서술형|

16 다음 세 수 a, b, c의 대소 관계를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [9점]

$$a=\sqrt{3}+\sqrt{5},\ b=2+\sqrt{5},\ c=\sqrt{3}+2$$

60점 미만이면 **하 · 수준** 문제를, 60점 이상 80점 미만이면 **중 · 수준** 문제를, 80점 이상이면 **상 · 수준** 문제를 풀어 보세요.

하·수준

1 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 13 (2) 0.36

(3) 7^2 (4) $\frac{6}{24}$

2 다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{3^2}$ (2) $\sqrt{(-2)^2}$

(3) $\sqrt{10^2}$ (4) $(-\sqrt{5})^2$

3 다음 두 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{13}$, $\sqrt{7}$ (2) 3, $\sqrt{3}$

4 다음을 계산하여라.

(1) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$

5 제곱근표에서 $\sqrt{1.45}=1.204$일 때, 다음 수의 반올림한 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{145}$ (2) $\sqrt{14500}$

(3) $\sqrt{0.0145}$ (4) $\sqrt{0.000145}$

6 다음을 계산하여라.

(1) $6\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

(3) $9\sqrt{3}-\sqrt{7}-8\sqrt{3}+5\sqrt{7}$ (4) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}+5\sqrt{6}-\sqrt{2}$

중·수준

1 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{16}+\sqrt{(-5)^2}\times(-\sqrt{2})^2$

(2) $\sqrt{\frac{4}{9}}\times(-\sqrt{36})\div\sqrt{(-3)^2}$

2 가로, 세로의 길이가 각각 2 cm, 8 cm인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

3 다음 중에서 무리수를 모두 찾아라.

$-\sqrt{250},\ -1.\dot{4}\dot{3},\ \sqrt{5},\ \frac{1}{3},\ \sqrt{36}$

4 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라.

(1) $3+\sqrt{5}$ □ 5

(2) -2 □ $-\sqrt{3}-1$

(3) 2 □ $\sqrt{7}-1$

(4) $\sqrt{10}-1$ □ 4

5 다음을 계산하여라.

(1) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2$

(2) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}-\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

6 $\sqrt{5.3}=a$, $\sqrt{53}=b$일 때, 다음을 a, b를 사용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt{5300}$

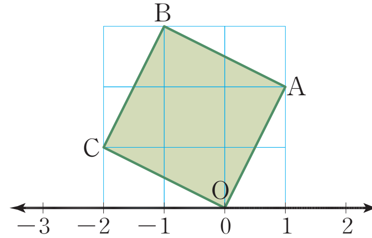
(2) $\sqrt{0.0053}$

(3) $\sqrt{530}+\sqrt{0.053}$

(4) $\sqrt{53000}-\sqrt{0.53}$

상·수준

1 다음 그림에서 정사각형 OABC의 넓이를 구하고, 수직선 위에 무리수 $\sqrt{5}$와 $-\sqrt{5}$를 나타내어라.



2 $\dfrac{\sqrt{1260}}{\sqrt{x}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 중에서 가장 작은 짝수를 구하여라.

3 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{5}$일 때, 다음을 a, b를 사용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt{18}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{6}+\sqrt{15})$

4 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어라.

(1) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ □ $3\sqrt{5}-\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}$ □ $\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

5 $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$을 계산하여라.

1 목표| 제곱근의 뜻과 성질을 알게 한다.

풀이| ② $\sqrt{36}=6$의 제곱근은 $\pm\sqrt{6}$이다.

답 ②

2 목표| 제곱근의 뜻을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $(-7)^2=49$이므로 $a=\sqrt{49}=7$

$\sqrt{81}=9$이므로 $b=-\sqrt{9}=-3$

$a-b=10$

답 ①

3 목표| 제곱근의 성질을 알게 한다.

풀이| ㉠ $\sqrt{0.3}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}\neq\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

답 ④

4 목표| 제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $1<x<3$이므로 $x-3<0$, $x-1>0$

$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=-(x-3)+(x-1)=2$

답 ③

5 목표| 제곱근의 대소 관계를 이해하게 한다.

풀이| ④ $0.1=\sqrt{0.01}$이고, $\sqrt{0.1}>\sqrt{0.01}$이므로

$-\sqrt{0.1}<-\sqrt{0.01}$

따라서 $-\sqrt{0.1}<-0.1$이다.

답 ④

6 목표| 제곱근의 대소 관계를 이해하고, 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $2.5<\sqrt{2x}<4$에서 $3.125<x<8$

따라서 구하는 자연수 x값의 합은

$4+5+6+7=22$

답 ②

7 목표| 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| ③ $-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$은 무리수이다.

답 ③

8 목표| 수직선에서 대응하는 무리수를 찾고, 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $a=1-\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}$이므로 $a^2+b^2+ab=5$

답 ①

9 목표| 제곱근의 사칙계산과 분모의 유리화를 할 수 있게 한다.

풀이| ①, ②, ③, ④의 계산 결과는 모두 $\sqrt{6}$이다.

⑤ $\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

답 ⑤

10 목표| 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| $2\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{75}=6\sqrt{3}=a\sqrt{3}$

따라서 $a=6$이다.

답 ⑤

11 목표| 제곱근의 곱셈을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $(\text{부피})=(5+\sqrt{6})\times5\times\sqrt{6}=25\sqrt{6}+30(\text{cm}^3)$

답 $(25\sqrt{6}+30)\ \text{cm}^3$

12 목표| 근호를 포함한 복잡한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

13 목표| 근호를 포함한 복잡한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2+2\sqrt{7}}{2}-\dfrac{3+3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

답 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

14 목표| 제곱근의 반올림한 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{0.37}=\sqrt{\dfrac{37}{100}}=\dfrac{\sqrt{37}}{10}=\dfrac{6.083}{10}=0.6083$

답 0.6083

15 목표| 무리수를 이해하고, 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{6}<3$ …㉠

따라서 $\sqrt{6}$의 정수 부분은 2이므로 소수 부분은

$a=\sqrt{6}-2$ …㉡

$\frac{a+4}{a}=\frac{(\sqrt{6}-2)+4}{\sqrt{6}-2}=5+2\sqrt{6}$ …㉢

답 $5+2\sqrt{6}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$\sqrt{6}$의 범위 구하기 ㉠	2점
	a의 값 구하기 ㉡	3점
답 구하기	$\frac{a+4}{a}$의 값 구하기 ㉢	3점

16 목표| 실수의 대소 관계를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a-b=(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(2+\sqrt{5})=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

이므로 $a<b$ …㉠

$a-c=(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{3}+2)=\sqrt{5}-\sqrt{4}>0$

이므로 $a>c$ …㉡

따라서 $c<a<b$이다. …㉢

답 $c<a<b$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	a, b의 대소 관계 구하기 ㉠	4점
	a, c의 대소 관계 구하기 ㉡	4점
답 구하기	a, b, c의 대소 관계 구하기 ㉢	1점

하·수준

1 목표| 제곱근의 뜻을 알고, 제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 13의 제곱근은 $\pm\sqrt{13}$이다.

(2) 0.36의 제곱근은 ±0.6이다.

(3) $7^2=49$의 제곱근은 ±7이다.

(4) $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$의 제곱근은 $\pm\frac{1}{2}$이다.

답 (1) $\pm\sqrt{13}$ (2) ±0.6 (3) ±7 (4) $\pm\frac{1}{2}$

2 목표| 제곱근의 성질을 이해하게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{3^2}=3$ (2) $\sqrt{(-2)^2}=2$

(3) $\sqrt{10^2}=10$ (4) $(-\sqrt{5})^2=5$

답 (1) 3 (2) 2 (3) 10 (4) 5

3 목표| 제곱근의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $13>7$이므로 $\sqrt{13}>\sqrt{7}$

(2) $3=\sqrt{9}$이고 $9>3$이므로 $\sqrt{9}>\sqrt{3}$

따라서 $3>\sqrt{3}$이다.

답 (1) $\sqrt{13}>\sqrt{7}$ (2) $3>\sqrt{3}$

4 목표| 제곱근의 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{9}{3}}=\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{128}{2}}=8$

답 (1) $\sqrt{3}$ (2) 8

5 목표| 제곱근의 반올림한 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{145}=10\sqrt{1.45}=12.04$

(2) $\sqrt{14500}=100\sqrt{1.45}=120.4$

(3) $\sqrt{0.0145}=\frac{\sqrt{1.45}}{10}=0.1204$

(4) $\sqrt{0.000145}=\frac{\sqrt{1.45}}{100}=0.01204$

답 (1) 12.04 (2) 120.4 (3) 0.1204 (4) 0.01204

6 목표| 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $6\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(6+4)\sqrt{5}=10\sqrt{5}$

(2) $5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(5-3)\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(3) $9\sqrt{3}-\sqrt{7}-8\sqrt{3}+5\sqrt{7}=\sqrt{3}+4\sqrt{7}$

(4) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}+5\sqrt{6}-\sqrt{2}=4\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

답 (1) $10\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{3}+4\sqrt{7}$ (4) $4\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

중·수준

1 목표| 제곱근의 성질을 이용하여 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{16}+\sqrt{(-5)^2}\times(-\sqrt{2})^2=4+5\times2=14$

(2) $\sqrt{\frac{4}{9}}\times(-\sqrt{36})\div\sqrt{(-3)^2}$

$=\frac{2}{3}\times(-6)\times\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

답 (1) 14 (2) $-\frac{4}{3}$

2 목표| 제곱근을 이용하여 정사각형의 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 직사각형의 넓이가 $2\times8=16(\text{cm}^2)$이므로 구하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{16}=4(\text{cm})$

답 4 cm

3 목표| 무리수의 뜻을 알고, 유리수와 무리수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| $-1.\dot{4}\dot{3}=-1\frac{43}{99}$, $\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$

답 $-\sqrt{250}$, $\sqrt{5}$

4 목표| 실수의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-\sqrt{4}>0$이므로
$3+\sqrt{5}>5$

(2) $-2-(-\sqrt{3}-1)=-\sqrt{1}+\sqrt{3}>0$이므로
$-2>-\sqrt{3}-1$

(3) $2-(\sqrt{7}-1)=\sqrt{9}-\sqrt{7}>0$이므로 $2>\sqrt{7}-1$

(4) $(\sqrt{10}-1)-4=\sqrt{10}-\sqrt{25}<0$이므로
$\sqrt{10}-1<4$

답 (1) > (2) > (3) > (4) <

5 목표| 곱셈 공식을 이용하여 근호를 포함한 식의 혼합 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2=27-12\sqrt{21}+28$
$=55-12\sqrt{21}$

(2) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}-\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$
$=(17-12\sqrt{2})-(17+12\sqrt{2})=-24\sqrt{2}$

답 (1) $55-12\sqrt{21}$ (2) $-24\sqrt{2}$

6 목표| 제곱근의 곱셈을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{5300}=10\sqrt{53}=10b$

(2) $\sqrt{0.0053}=\frac{\sqrt{53}}{100}=\frac{b}{100}$

(3) $\sqrt{530}+\sqrt{0.053}=10\sqrt{5.3}+\frac{\sqrt{5.3}}{10}=\frac{101}{10}a$

(4) $\sqrt{53000}-\sqrt{0.53}=100\sqrt{5.3}-\frac{\sqrt{53}}{10}=100a-\frac{b}{10}$

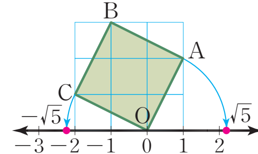
답 (1) $10b$ (2) $\frac{b}{100}$ (3) $\frac{101}{10}a$ (4) $100a-\frac{b}{10}$

상·수준

1 목표| 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $\square\text{OABC}=3^2-4\times\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)=5$

따라서 □OABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



답 풀이 참조

2 목표| 제곱근의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{\sqrt{1260}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2^2\times3^2\times5\times7}{x}}$이므로 조건을 만족시키는 x의 값 중에서 가장 작은 짝수는 $2^2\times5\times7=140$이다.

답 140

3 목표| 근호를 포함한 식을 변형하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}=3a$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{6}+\sqrt{15})=\sqrt{2}+\sqrt{5}=a+b$

답 (1) $3a$ (2) $a+b$

4 목표| 두 수의 대소를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(2\sqrt{5}+\sqrt{3})-(3\sqrt{5}-\sqrt{3})=-\sqrt{5}+\sqrt{12}>0$
이므로 $2\sqrt{5}+\sqrt{3}>3\sqrt{5}-\sqrt{3}$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2}{3}(-\sqrt{3}+\sqrt{2})<0$
이므로 $\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}<\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}$

답 (1) > (2) <

5 목표| 제곱근의 성질을 이용하여 근호를 포함한 식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{5}-2>0$, $\sqrt{5}-3<0$이므로
$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=(\sqrt{5}-2)-(\sqrt{5}-3)=1$

답 1

제곱근을 찾아라!

4명이 다음과 같은 게임을 하여 보아라.

준비물

- 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 카드 10장
- 1부터 100까지의 자연수 중에서 제곱수가 각각 적힌 카드 10장
- 11부터 100까지의 자연수 중에서 제곱수가 아닌 수가 각각 적힌 카드 20장

참고 • 1, 4, 9, 16, 25 등과 같이 자연수를 제곱하여 얻은 수를 제곱수라고 한다.

게임 규칙

① 40장의 카드를 잘 섞어 10장씩 나누어 가진다.

② 각자 어떤 수와 그 수의 제곱근이 되는 수 카드가 있으면 그 한 쌍의 수 카드를 서로 직각 방향으로 바닥에 내려놓는다.

③ 한 사람씩 바닥에 놓여진 수의 양의 제곱근과 들고 있는 수의 양의 제곱근의 차가 1 미만인 카드를 모두 찾아 바닥의 카드 옆에 내려놓는다. 이를테면 25 옆에 내려놓을 수 있는 수는 16 초과 36 미만인 수 중에서 25를 제외한 수이다.

④ 내려놓을 수 있는 카드가 없는 경우에는 다음 사람으로 넘어간다.

⑤ 모두 더 이상 내려놓을 카드가 없게 되면 카드를 가장 적게 가진 사람이 이긴다.

관포지교(管鮑之交)와 친화수

‘동수와 원상이는 관포지교’, ‘25년 동안 지켜온 관포지교의 정’ 등과 같이 관포지교(管鮑之交)는 ‘친한 친구 사이의 사귐’을 이르는 말이다. 이 말은 “사기(史記)” ‘관안열전(管晏列傳)’에 나오는 관중(管仲)과 포숙아(鮑叔牙)의 이야기에서 유래되었다.

춘추 시대 초반 제(齊)나라에 관중과 포숙아라는 관리가 있었는데, 이들은 어려서부터 아주 친한 친구였다. 그런데 나중에 관중은 제나라 양공(襄公)의 아들 규(糾)를 섬기고 포숙아는 규의 동생 소백(小白)을 섬겼다. 그러던 중 양공이 사촌 동생 공손무지(公孫無知)에게 시해되자 관중은 규와 함께 노(魯)나라로 망명하였고, 포숙아는 소백과 함께 거(莒)나라로 망명하였다. 얼마 후 공손무지가 살해되자 규와 소백은 임금의 자리를 놓고 대립하게 되었고 관중과 포숙아는 본의 아니게 서로 정적이 되었다.

관중은 규를 왕위에 앉히기 위해 소백을 암살하려 했지만 실패하였고, 결국 소백이 먼저 제나라로 들어와 환공(桓公)이라 일컫고 왕위에 올랐다. 환공은 노나라로 망명한 규를 죽이고 관중을 제나라로 압송하였다. 환공은 자기를 죽이려 한 관중을 죽일 작정이었지만 포숙아가 이를 간절히 말렸다.

“전하, 제나라만을 다스리겠다면 신으로도 충분할 것이옵니다. 하지만 천하를 얻으시려면 관중을 중용해야 합니다.”

환공은 자기가 신뢰하는 포숙아의 말을 따라 관중을 대부로 중용하고 정사를 맡겼다. 관중은 자신의 역량을 발휘하여 환공을 춘추 시대의 첫 번째 패자로 군림하게 만들었다. 이것은 환공의 관용과 관중의 재능이 어우러진 결과이지만 그 시작은 관중에 대한 포숙아의 변함없는 우정이었다.

수학에도 관포지교 같은 친구가 있는데, 수학에서 친구를 처음 말한 사람은 바로 피타고라스이다.

피타고라스는 어느 날 제자로부터 이런 질문을 받았다.

“친구란 어떤 관계입니까?”

피타고라스는 이렇게 대답하였다.

“친구란 또 다른 나이다. 마치 220과 284처럼.”

그 이후 피타고라스학파에서는 220과 284를 친화수(親和數)라고 하였다.

친화수는 우애수, 친구수라고도 한다. 피타고라스가 220과 284를 친구라고 했던 이유는 220의 진약수 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110을 모두 더하면 합이 284가 되고, 마찬가지로 284의 진약수 1, 2, 4, 71, 142를 모두 더하면 220이 되기 때문이었다. 이와 같이 두 수가 친화수라는 것은 한 수의 진약수의 합이 다른 수와 같고, 그 반대의 경우도 동시에 성립할 때이다.

친화수의 쌍이 유한개인지 무한개인지는 아직 밝혀지지 않았으며 현재까지 알려진 친화수는 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수인 경우뿐이다. 더욱이 짝수와 홀수로 이뤄진 친화수가 존재하는지 여부와 서로소인 친화수가 존재하는지도 아직까지 밝혀지지 않고 있다.

관포지교(管鮑之交) 管(대롱 관), 鮑(절인고기 포), 之(어조사 지), 交(사귈 교)

II 이차방정식

이 단원의 학습 목표

1. 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있다.
2. 이차방정식과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있다.
3. 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

자전거는 사람의 힘을 추진력으로 전환하도록 고안된 것이다. 현대의 자전거와 같은 것을 최초로 만든 사람은 프랑스의 피에르 미쇼와 그의 아들 에르네스트 미쇼이다. 1861년 미쇼 부자는 앞바퀴에 2개의 크랭크를 장착하고 페달을 부착하여 페달의 회전하는 힘을 직접 앞바퀴에 전달하여 자전거가 굴러가도록 하였다.

오늘날 자전거는 환경친화적인 교통수단으로 많은 사람들이 이용하고 있으며 자전거를 타고 이동한 거리는 시간에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

예를 들어 자전거가 내리막길에서 t초 동안 달린 거리를 $(0.2t^2+4t)$ m라고 하자. 이때 내리막길의 길이가 300 m라고 하면 내리막길을 벗어나는 데 걸리는 시간은 방정식으로 나타내어 풀면 알 수 있다.

단원을 시작하기 전에

우리는 자연 현상이나 실생활에서 일어나는 수량 사이의 관계에 관한 문제를 일차방정식이나 연립일차방정식으로 나타내어 해결할 수 있음을 배웠다. 마찬가지로 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 m 더 긴 직사각형의 넓이가 84 m^2일 때, 이차방정식을 세워 가로의 길이와 세로의 길이를 구할 수 있다. 이 단원에서는 다항식을 인수분해하는 방법을 알게 하고, 이차방정식의 뜻과 그 해를 구하는 방법을 지도한다.

단원의 지도 목표

1. 다항식의 인수분해

① 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있게 한다.
② 인수분해 공식과 곱셈 공식 사이의 관계를 이해하게 한다.
③ 인수분해 공식을 이해하게 한다.

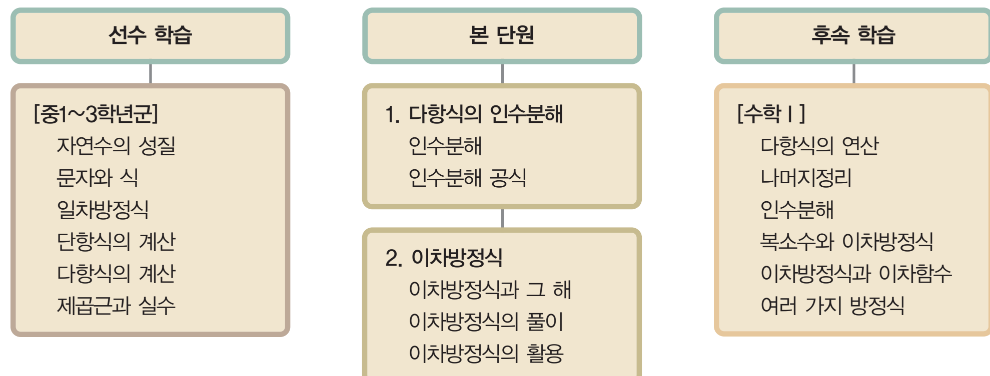
2. 이차방정식

① 이차방정식과 그 해의 의미를 이해하게 한다.
② 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
③ 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
④ 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
⑤ 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
⑥ 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 인수분해는 이차방정식의 해를 구하는 데 필요한 정도로 다룬다.
② 이차방정식의 의미는 다양한 상황을 통해 도입한다.
③ 이차방정식은 해가 실수인 경우만 다룬다.
④ 이차방정식에서 자신의 풀이 방법을 설명할 수 있게 한다.
⑤ 이차방정식의 해가 문제의 의도에 맞는지 확인하게 한다.
⑥ 이차방정식의 활용에서는 계산 과정이 지나치게 복잡한 경우는 피하고, 실생활과 관련된 간단한 문제를 다룬다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관			58~59	• 단원의 개관	
1. 다항식의 인수분해	**준비 학습**		60	• 소인수분해 • 전개 • 곱셈 공식	
	1-1 인수분해	1	61~62	• 인수분해의 뜻	인수, 인수분해
	1-2 인수분해 공식	2~5	63~70	• $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ • $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ • $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ • $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ • $acx^2+(ad+bc)x+bd$ $=(ax+b)(cx+d)$ • 컴퓨터의 활용	완전제곱식
	수준별 학습	6	71~73	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 이차방정식	**준비 학습**		74	• 일차방정식의 풀이 • 제곱근 • 인수분해 • 일차방정식	
	2-1 이차방정식과 그 해	7	75~76	• 이차방정식의 뜻 • 이차방정식의 해	이차방정식
	2-2 이차방정식의 풀이	8~12	77~85	• 인수분해를 이용한 풀이 • 중근의 뜻 • 제곱근을 이용한 풀이 • 완전제곱식을 이용한 풀이 • 근의 공식의 뜻과 이를 이용한 풀이	중근, 근의 공식
	2-3 이차방정식의 활용	13	86~88	• 이차방정식의 활용	
	수준별 학습	14	89~91	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		15~16	92~99	• 수행 과제 • 학습에 대한 자기 평가 • 대단원 핵심 한눈에 보기 • 만화로 보는 수학 이야기 • 대단원 평가 문제 • 수학 산책	

학습 지도 계획 수립 시 차시별 지도 계획을 바탕으로 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도에 따라 적절히 조정할 수 있다.

단원의 이론적 배경

1. 문자와 대수

최근까지 인류 최초의 문자는 기원전 3000년경 고대 메소포타미아 수메르 인들의 쐐기 문자로 알려져 있었다. 그러나 1998년 이집트의 아비도스 유적에서는 수메르의 쐐기 문자보다 200~300년 앞선 상형 문자가 발견되었다. 점토판에 새겨진 수메르나 아비도스의 기록은 주로 인구, 세금, 토지의 계산에 관한 것이며, 수메르 인들의 점토판에서는 간단한 일차, 이차방정식의 풀이를 볼 수 있다.

수와 개수 세기에 대한 기록은 최초의 문자 이전으로 거슬러 올라간다. 아프리카의 콩고 민주 공화국에서 발견되어 그곳의 이름을 딴 '이샹고의 뼈'는 기원전 2만 년 전의 것으로 뼈에 새겨진 개수 세기에서 덧셈과 뺄셈의 흔적과 소수(prime number)에 대한 생각을 찾을 수 있다.

3세기경 알렉산드리아에서 활약한 디오판토스(Diophantos: ?200~?284)는 "산학(Arithmetica)" 13권을 저술하였는데, 그중 6권만이 현재 전해지고 있다. "산학"에는 189개의 방정식과 그에 대한 풀이가 있는데 현대 수학에도 큰 영향을 끼치고 있다. 디오판토스 이전까지 수식의 표현은 말로 서술하는 형태였다. 디오판토스는 수식을 표현할 때, 문자를 채택하고 간결한 표현 방법을 썼으나 오늘날의 수식의 표현과는 다르다. 또 디오판토스는 수를 뜻하는 그리스어의 첫 두 글자 α와 ρ를 섞어서 만든 s로 미지수를 나타내기도 하였다.

알콰리즈미

대수라는 말을 쓴 세계 최초의 책은 아라비아의 알콰리즈미(Al-Khwarizmi: ?780~?850)의 대수 책이고, 문자, 기호 및 계산을 이용하여 사고를 수행하고 문제 해결뿐만 아니라 증명까지도 시도한 최초의 수학자는 16세기 프랑스 최고의 대수학자인 비에타(Viéta, F.: 1540~1603)이다. 또한 오늘날 우리들이 사용하는 덧셈 기호 +, 뺄셈 기호 −는 비트만(Widmann, J.: 1462~1498)이 처음으로 사용하였고 등호 =는 영국의 레코드(Recorde, R.: 1510~1558)가 처음 사용하였다. 또 부등호 <, >는 해리엇(Harriot, T.: 1560~1621)이, 곱셈 기호 ×는 오트레드(Oughtred, W.: 1574~1660)가 처음으로 사용하였다.

그리고 미지수를 나타내는 현대적인 형식은 데카르트(Descartes, R.: 1596~1650)에 의해서 정립되었다. 그는 1637년의 저서 "기하학(Geometrie)"에서 알파벳의 첫머리 문자 a, b, c, … 등은 기지량으로, 끝쪽 문자 x, y, z, … 등은 미지량으로 나타내고 있다.

2. 다항식과 인수분해

다항식은 변수에 대한 덧셈과 곱셈에 의한 식의 표현이다. 다항식은 이와 같이 간단한 형태의 함수이기 때문에 다른 함수들을 연구하는 데 필수적이다.

현대 수학에서 다항식에 관한 연구는 가장 활발하게 이루어지고 있다. 다항식이 나타내는 도형을 연구하는 분야인 대수기하는 19세기 이후로 수학의 중심 분야 중 하나이며, 힐베르트(Hilbert, D.: 1862~1943)와 뇌터(Noether, A. E.: 1882~1935)가 증명한 여러 결과들이 다항식 연구의 바탕이 되고 있다.

피타고라스(Pythagoras: ?B.C. 569~?B.C. 475) 이후로 던져진 중요한 수학의 문제들이 다항식으로 표현되며 이는 수에 관한 연구와 연결된다. 1802년 가우스(Gauss, K. F.: 1777~1855)는 일차 이상의 다항식은 기약다항식의 곱으로 유일하게 인수분해된다는 것을 증명하였다. 유클리드(Euclid:

가우스

?B.C. 325∼?B.C. 265)가 그의 책 "원론(Elements)"에서 소수의 곱에 관한 내용을 소개한 이후에 2100년이 지난 후에야 가우스가 다항식의 인수분해 정리를 증명함으로써 유클리드 이후로 강조되고 있던 소수의 중요성과 소인수분해를 이용한 최대공약수 및 최소공배수의 계산 등이 다항식의 경우에도 그대로 적용되었다.

3. 방정식과 근의 공식

고대의 여러 문명의 기록을 살펴보면 방정식에 관계된 문제와 해법이 많이 나와 있다. 세계 최고의 수학서인 아메스(Ahmes: ?B.C. 1680∼?B.C. 1620)의 "파피루스"에 처음으로 일차방정식의 해법이 등장하였다. 아메스는 여기에서 한 개의 미지량을 가지는 일차방정식에 관련된 문제와 그것의 해결 방법을 서술하였다.

또 탈레스(Thales: ?B.C. 624∼?B.C. 546)는 피라미드의 그림자를 이용하여 그 높이를 측정하였는데, 이때 비례식을 이용하여 일차방정식을 풀었다.

그리스의 수학자인 디오판토스는 "산학"이라는 수학책에서 기호를 사용하여 일차방정식을 기술하였으며, 이항 및 동류항의 정리와 같은 계산 방법을 제시하였다. 이 책에서 디오판토스는 그 외에도 여러 가지 방정식과 부정방정식의 해법도 기술하고 있으나, 음수는 방정식의 해로 취급하지 않았다.

방정식의 해법은 인도의 수학에서도 많이 발견되는데 브라마굽타(Brahmagupta: 598∼670)와 바스카라(Bhaskara, A.: 1114∼1185)가 대표적인 수학자이다. 브라마굽타는 일차부정방정식

$$ax+by=c \ (a,\ b,\ c\text{는 정수})$$

의 일반적인 해법을 최초로 소개하였으나 음수의 해까지 확장하지는 못하였다. 음수의 해까지도 확실히 생각한 것은 바스카라였다. 한편 인도에서 0의 발견은 기수법을 발전시켰고, 이에 따라 방정식의 일반화를 가져왔다. 인도에서 발전한 방정식에 관한 이론은 아라비아를 거쳐서 유럽에 전파되었다고 한다.

이차방정식의 근의 공식에 의한 풀이는 기원전 2000년에 바빌로니아 인들의 기록에 나타나며, 기원전 150년경에 중국에서 저술된 "구장산술"에도 나타나 있다.

삼차방정식의 근의 공식은 타르탈리아(Tartaglia, N. F.: 1499∼1557)에 의하여 발견되었다. 당시 수학 교수였던 카르다노(Cardano, G.: 1501∼1576)는 삼차방정식의 근의 공식이 자신의 결과인 듯 발표하였고, 타르탈리아와의 논쟁에서 자신의 지위를 이용하여 타르탈리아를 곤경으로 몰아넣었다. 사차방정식의 근의 공식은 카르다노의 제자였던 페라리(Ferrari, L.: 1522∼1565)가 발견하였다.

타르탈리아

카르다노

5차 이상의 방정식을 푸는 일반적인 방법은 존재하지 않는다는 것을 증명한 사람은 19세기 노르웨이의 젊은 수학자 아벨(Abel, N. H.: 1802∼1829)이었다. 그는 이것의 증명 과정에서 '군'의 개념을 생각해 내었고, 그 결과 방정식의 해법에 관련된 수학의 새로운 영역으로 '군'이 탄생되었는데 이 군의 이론은 20세기 수학의 특징인 추상주의의 계기가 되어 수학 전반에 큰 영향을 주었다.

갈루아(Galois, E.: 1811∼1832)는 방정식이 5차 이상인 모든 경우에 근의 공식이 존재하지 않음을 증명하였다. 갈루아는 '갈루아 이론'이라고 불리는 방법을 제시하였는데, 이는 현대 수학에서 방정식을 풀 때 가장 중요한 계산 방법으로 이용되고 있다.

갈루아

교수 · 학습 과정안 (기초)

대단원		Ⅱ. 이차방정식	쪽수	교과서 61~62쪽
소단원		1. 다항식의 인수분해 1-1 인수분해	차시	1/16
학습 목표		인수분해의 뜻을 안다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 다항식의 전개에 대하여 질문한다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 인수분해의 뜻을 안다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **인수** 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때의 각각의 식 **인수분해** 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수들의 곱으로 나타내는 것 x^2+5x+6 ⇄ (인수분해 / 전개) $(x+2)(x+3)$ (인수) ◐ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◐ 의사소통을 모둠별로 해결하도록 한다. 의사소통 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.		
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음 식을 인수분해하여라. (1) $ax-ay$ (2) x^2+2x 답 (1) $a(x-y)$ (2) $x(x+2)$ ◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 다항식 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$을 인수분해할 수 있다.		

수준별 학습지 (기초)

대단원	Ⅱ. 이차방정식	쪽수	교과서 61~62쪽
소단원	1. 다항식의 인수분해 1-1 인수분해	차시	1/16
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

하나의 다항식을 두 개 이상의 인수들의 곱으로 나타내는 것을 □라 하고, 반대로 두 개 이상의 인수들의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것을 □라고 한다.

답 인수분해, 전개

2 다음 중에서 $ab+a$의 인수를 모두 찾아라.

㉠ ab　　㉡ a　　㉢ b
㉣ $b+1$　　㉤ $a+b$

답 ㉡, ㉣

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ax+bx-3x$

(2) $2ax+8x$

(3) $3a^2-6a$

답 (1) $x(a+b-3)$　(2) $2x(a+4)$　(3) $3a(a-2)$

교수 · 학습 과정안 (기본)

대단원		Ⅱ. 이차방정식	쪽수	교과서 61~62쪽
소단원		1. 다항식의 인수분해　1-1 인수분해	차시	1/16
학습 목표		인수분해의 뜻을 안다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 다항식의 전개에 대하여 질문한다. ◯ 학습 목표를 제시한다. • 인수분해의 뜻을 안다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◯ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◯ 학습 내용 설명 **인수** 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때의 각각의 식 **인수분해** 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수들의 곱으로 나타내는 것 x^2+5x+6 ⇄ (인수분해 / 전개) $(x+2)(x+3)$ (인수) ◯ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◯ 의사소통을 모둠별로 해결하도록 한다. 의사소통 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.		
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음 식을 인수분해하여라. (1) $xy-x$　　　(2) $ax+bx-cx$ 답 (1) $x(y-1)$　(2) $x(a+b-c)$ ◯ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 다항식 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$을 인수분해할 수 있다.		

수준별 학습지 (기본)

대단원	Ⅱ. 이차방정식	쪽수	교과서 61~62쪽
소단원	1. 다항식의 인수분해 1-1 인수분해	차시	1/16
(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:			

1 다음은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 구하여라.

(1) $x(x-3)$

(2) $x(x-y)$

(3) $2xy(x+1)$

답 (1) x^2-3x (2) x^2-xy (3) $2x^2y+2xy$

2 다음 다항식 중에서 ab가 인수인 것을 모두 찾아라.

㉠ $abx-ab$	㉡ a^2bx-ab^2y
㉢ a^2c-2ab	㉣ $abx+ab(x-c)$

답 ㉠, ㉡, ㉣

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $3a+15ab$

(2) $4x-x^2$

(3) $ac+2c-cd$

(4) $x^2y-xy-xy^2$

답 (1) $3a(1+5b)$ (2) $x(4-x)$ (3) $c(a+2-d)$ (4) $xy(x-1-y)$

교수 · 학습 과정안 (실력)

대단원	Ⅱ. 이차방정식	쪽수	교과서 61~62쪽
소단원	1. 다항식의 인수분해　1-1 인수분해	차시	1/16
학습 목표	인수분해의 뜻을 안다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 다항식의 전개에 대하여 질문한다. ◎ 학습 목표를 제시한다. • 인수분해의 뜻을 안다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **인수** 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때의 각각의 식 **인수분해** 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수들의 곱으로 나타내는 것 x^2+5x+6 ⇄ (인수분해 →, ← 전개) $(x+2)(x+3)$ (인수) ◎ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◎ 의사소통을 모둠별로 해결하도록 한다. 의사소통 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.	
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음 식을 인수분해하여라. (1) $3x^2-6xy$　　(2) $x^2y+xy-2xy^2$ 답 (1) $3x(x-2y)$　(2) $xy(x+1-2y)$ ◎ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 다항식 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$을 인수분해할 수 있다.	

수준별 학습지 (실력)

대단원	Ⅱ. 이차방정식	쪽수	교과서 61~62쪽
소단원	1. 다항식의 인수분해 1-1 인수분해	차시	1/16
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 다음은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 구하여라.

(1) $(a-2)(a-3)$

(2) $(a-2)^2$

(3) $abc(d-1)$

답 (1) a^2-5a+6 (2) a^2-4a+4 (3) $abcd-abc$

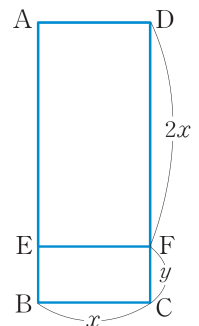
2 다음 다항식 중에서 $x+y$가 인수인 것을 모두 찾아라.

㉠ $xy+x$	㉡ $xy+y^2$
㉢ x^2+xy	㉣ x^2+y

답 ㉡, ㉢

3 오른쪽 그림은 직사각형 ABCD를 두 개의 직사각형 AEFD와 EBCF로 나눈 것이다. □AEFD+□EBCF=□ABCD임을 이용하여 인수분해를 나타내어라.

답 $2x^2+xy=x(2x+y)$



1 다항식의 인수분해

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있게 한다.

② 인수분해 공식과 곱셈 공식 사이의 관계를 이해하게 한다.

③ 인수분해 공식을 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
1-1 인수분해	인수분해의 뜻
1-2 인수분해 공식	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
	$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
	$x^2+(a+b)x+ab$ $=(x+a)(x+b)$
	$acx^2+(ad+bc)x+bd$ $=(ax+b)(cx+d)$
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 60 쪽

1 다항식의 인수분해

준 | 비 | 학 | 습

소인수분해
자연수를 소인수들만의 곱으로 나타내는 것을 소인수분해한다고 한다.

전개
다항식의 곱셈에서 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개라고 한다.

곱셈 공식
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b)$
  $=x^2+(a+b)x+ab$
- $(ax+b)(cx+d)$
  $=acx^2+(ad+bc)x+bd$

1 다음 수를 소인수분해하여라.

(1) 27 (2) 80
(3) 121 (4) 196

2 다음 식을 전개하여라.

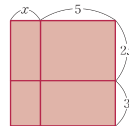
(1) $2a(x+3)$ (2) $5x(x-2)$
(3) $(a+4)(b-5)$ (4) $(2x-1)(y-6)$

3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3)^2$ (2) $(x-4)^2$
(3) $(x+7)(x-7)$ (4) $(x+2)(x+6)$

4 오른쪽 그림을 보고, 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$(x+5)(2x+3)=\square x^2+\square x+15$



준비 학습의 해설

1

목표| 소인수분해를 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $27=\mathbf{3^3}$

(2) $80=\mathbf{2^4\times5}$

(3) $121=\mathbf{11^2}$

(4) $196=\mathbf{2^2\times7^2}$

2

목표| 분배법칙을 이용하여 다항식의 곱을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2a(x+3)=\mathbf{2ax+6a}$

(2) $5x(x-2)=\mathbf{5x^2-10x}$

(3) $(a+4)(b-5)=\mathbf{ab-5a+4b-20}$

(4) $(2x-1)(y-6)=\mathbf{2xy-12x-y+6}$

3

목표| 곱셈 공식을 이용하여 다항식의 곱을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+3)^2=x^2+2\times x\times3+3^2=\mathbf{x^2+6x+9}$

(2) $(x-4)^2=x^2-2\times x\times4+4^2=\mathbf{x^2-8x+16}$

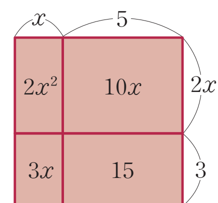
(3) $(x+7)(x-7)=x^2-7^2=\mathbf{x^2-49}$

(4) $(x+2)(x+6)=x^2+(2+6)x+2\times6=\mathbf{x^2+8x+12}$

4

목표| 그림을 이용하여 곱셈 공식을 이해하게 한다.

풀이| 가로와 세로의 길이가 각각 $x+5$, $2x+3$인 직사각형의 넓이는 $(x+5)(2x+3)$이다. 이것은 오른쪽 그림과 같이 4개의 직사각형의 넓이의 합과 같으므로



$(x+5)(2x+3)=2x^2+10x+3x+15$

$=\boxed{\mathbf{2}}\,x^2+\boxed{\mathbf{13}}\,x+15$

교과서 61 쪽

1-1 인수분해

● 인수분해의 뜻을 안다.

인수분해란 무엇인가?

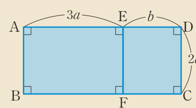
창의력 기르기

가두리 양식장

연안에 구획을 정하여 그물을 치고 그 안에서 수산물을 기르고 번식시키는 것을 가두리 양식이라고 하는데, 주로 사각형의 바둑판 모양으로 그물을 설치한다. 양식장 근처의 해안에는 어족 보호를 위하여 공장 건설과 유조선의 통행을 제한하기도 한다.

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 가두리 양식장을 만들려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1 □ABCD의 넓이를 □ABFE와 □EFCD의 넓이의 합으로 나타내어 보자.

2 □ABCD의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 나타내어 보자.

3 **1**과 **2**에서 나타낸 식의 차이점을 말하여 보자.

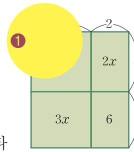
$(x+2)(x+3)$을 전개하면

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

이다. 이 등식의 좌변과 우변을 서로 바꾸면

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

이 되므로 다항식 x^2+5x+6은 $x+2$와 $x+3$의 곱으로 나타 ...다.



❶ ❷ ...이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식... 처음 식의 **인수**라고 한다.

$x+2$와 $x+3$은 x^2+5x+6의 인수이다.

1-1 인수분해

소단원 지도 목표

① 인수분해의 뜻을 알게 한다.
② 다항식을 공통인수로 묶어 내어 인수분해할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 다항식의 인수와 인수분해의 뜻을 정확히 이해하게 한다.

2. 전개와 인수분해는 등식의 좌변과 우변을 바꾸면 서로 같음을 이해하게 한다.

3. 다항식의 각 항에 공통으로 들어 있는 인수로 묶는 것이 인수분해의 기본임을 알게 한다.

4. 다항식의 각 항에 공통으로 들어 있는 인수가 여러 개 있을 수 있음에 유의하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 인수 (因數, factor)
- 인수분해 (因數分解, factorization)

창의력 기르기 참/고/자/료

가두리 양식은 주로 수심이 깊은 하천이나 바다의 연안에서 이루어지지만 먼 바다에서 이루어지는 경우에는 조류의 영향을 덜 받아 적조와 태풍에 안정적이고 자연산에 가까운 수산물을 생산할 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직사각형 모양의 가두리 양식장의 넓이를 구해 봄으로써 인수분해의 뜻을 알게 하려는 것이다.

1. □ABFE$=3a\times2a=6a^2$
□EFCD$=b\times2a=2ab$
□ABCD$=$□ABFE$+$□EFCD
$=\boldsymbol{6a^2+2ab}$

2. 가로의 길이는 $3a+b$이고, 세로의 길이는 $2a$이므로
□ABCD$=\boldsymbol{(3a+b)\times2a}$

3. **1**은 항들의 합으로 나타낸 것이고, **2**는 두 다항식의 곱으로 나타낸 것이다.

본문 해설

❶ 가로와 세로의 길이가 각각 $x+2$, $x+3$인 직사각형의 넓이는 $(x+2)(x+3)$이다. 이것은 주어진 그림과 같이 넓이가 x^2, $2x$, $3x$, 6인 직사각형의 넓이의 합과 같으므로
$(x+2)(x+3)=x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$

❷ 다항식의 인수는 자연수에서의 인수와 마찬가지로 생각할 수 있다. 즉, 자연수 a, b, c에 대하여 $a=b\times c$일 때 b, c를 a의 인수라고 하는데, 다항식에서도 처음 다항식을 몇 개의 다항식의 곱으로 나타내었을 때 곱하여진 각 다항식을 처음 다항식의 인수라고 한다.

본문 해설

❶ 자연수를 소인수분해할 때 소인수들만의 곱으로 나타내는 것과 같이 다항식을 인수분해할 때에도 더 이상 인수분해되지 않는 인수들의 곱으로 나타낸다.

- $24=8\times3 \Rightarrow 24=2^3\times3$
- $ax^2+2ax+a=a(x^2+2x+1)$
  $\Rightarrow ax^2+2ax+a=a(x+1)^2$

❷ 인수분해와 전개는 서로 반대의 과정이고 인수분해는 곱의 모양, 전개는 합의 모양으로 나타내어진다.

주의| x^2+5x+6을 $x(x+5)+6$의 형태로 바꾸는 것은 인수분해가 아니다.

❸ 분배법칙을 이용하여 공통인수로 묶어 내는 것은 인수분해의 기본이다. 인수분해할 때에는 먼저 공통인수가 있는지 확인하고, 정수 계수가 있을 경우에는 정수 계수의 최대공약수로 묶어 내어 인수분해한다.

교과서 62 쪽

❶ …의 다항식을 두 개 이상의 인수들의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 …해한다고 한다.

❷ …$5x+6$ ⇄ $(x+2)(x+3)$ (인수분해 →, ← 전개; 인수)

공통으로 들어 있는 인수를 공통인수라고 한다.

❸ …항식 $ma+mb$에서 m은 항 ma와 mb에 공통으로 들어 있는 인수이고, …식을 이용하여 공통인수 m으로 묶어 내면 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ma+mb=m(a+b)$$

예 제 1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ab+3ac$　　(2) $2x^2-4xy$

풀이 (1) ab와 $3ac$의 공통인수는 a이므로

$$ab+3ac=a(b+3c)$$

(2) $2x^2$과 $-4xy$의 공통인수는 $2x$이므로

$$2x^2-4xy=2x\times x-2x\times2y=2x(x-2y)$$

답 (1) $a(b+3c)$　(2) $2x(x-2y)$

(2) $2x^2=2\times x\times x$, $-4xy=-2\times2\times x\times y$
식을 인수분해할 때에는 공통인수가 남지 않도록 모두 묶어 낸다.

문 제 1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ax+5ay$　(2) x^2-2ax
(3) $8x^2-4xy$　(4) $ax+ay-az$

의사소통 $2x^2+4x$를 $2(x^2+2x)$로 나타내었을 때, 이것을 인수분해한 것이라고 할 수 있는지 토의하여 보자.

1

목표| 다항식을 공통인수로 묶어 내어 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) ax와 $5ay$의 공통인수는 a이므로
$ax+5ay=\mathbf{a(x+5y)}$

(2) x^2과 $-2ax$의 공통인수는 x이므로
$x^2-2ax=\mathbf{x(x-2a)}$

(3) $8x^2$과 $-4xy$의 공통인수는 $4x$이므로
$8x^2-4xy=\mathbf{4x(2x-y)}$

(4) ax, ay, $-az$의 공통인수는 a이므로
$ax+ay-az=\mathbf{a(x+y-z)}$

기/초/력 향상 문제

다음 식을 인수분해하여라.

1 m^2+4m

2 x^2y-3xy^2

3 $5x^2-15xy$

4 $-ax-bx-6cx$

답 **1** $m(m+4)$　**2** $xy(x-3y)$　**3** $5x(x-3y)$　**4** $-x(a+b+6c)$

의/사/소/통

|출제 의도| 인수분해를 할 때에는 더 이상 인수분해가 되지 않는 인수들의 곱으로 나타내어야 함을 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 인수분해를 할 때에는 공통인수로 모두 묶어야 하므로 $2x^2+4x=2x(x+2)$와 같이 인수분해하여야 한다.

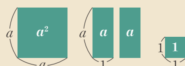
1-2 인수분해 공식

● 곱셈 공식과 인수분해 공식 사이의 관계를 이해하고, 다항식을 인수분해할 수 있다.

$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$은 어떻게 인수분해하는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 넓이가 a^2, a, 1인 세 종류의 대수 타일 4개를 이용하여 물음에 답하여 보자.

●준비물
대수 타일
활동지 1



1 대수 타일 4개의 넓이의 합을 구하여 보자.

2 대수 타일 4개를 모두 붙여서 정사각형으로 만들어 보자.

3 **2**에서 만든 정사각형의 한 변의 길이를 구하고, 이것을 이용하여 정사각형의 넓이를 식으로 나타내어 보자.

4 **1**과 **3**의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

곱셈 공식

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 생각하면

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

으로 인수분해됨을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

인수분해 공식 [1]

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

문제 1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^2+10a+25$　　(2) $a^2-14a+49$

(3) $4x^2+12x+9$　　(4) $9x^2-12x+4$

1-2 인수분해 공식

소단원 지도 목표

① 인수분해 공식과 곱셈 공식 사이의 관계를 이해하게 한다.
② 인수분해 공식을 이해하게 한다.
③ 완전제곱식의 뜻을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 다항식의 곱의 전개와 다항식의 인수분해 사이의 관계를 이해하여 인수분해 공식을 알게 한다.

2. 다항식의 형태를 파악하여 적절한 인수분해 공식을 적용하고, 공식을 충분히 연습할 수 있도록 지도한다.

3. 인수분해 공식을 적용하기 전에 공통으로 들어 있는 인수가 있을 경우, 먼저 그 인수로 묶어 낸 후에 공식을 적용하게 한다.

4. 인수분해는 계수가 정수인 것만 다루고, 인수분해 공식을 이용할 수 있는 간단한 형태를 위주로 다룬다.

5. 인수분해는 이차방정식의 해를 구하는 데 필요한 정도로 다룬다.

새로 나온 용어와 기호

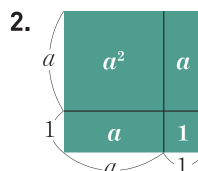
• 완전제곱식(perfect square)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 대수 타일 4개의 넓이의 합과 대수 타일 4개를 모두 붙여 만든 정사각형의 넓이를 비교해 봄으로써 $a^2+2a+1=(a+1)^2$임을 이해하게 하려는 것이다.
준비물 • 대수 타일

1. $a^2+a+a+1=\boldsymbol{a^2+2a+1}$

2.



3. **2**에서 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $\boldsymbol{a+1}$이다.
따라서 정사각형의 넓이는
$(a+1)\times(a+1)=\boldsymbol{(a+1)^2}$

4. 대수 타일 4개의 넓이의 합과 대수 타일 4개를 모두 붙여 만든 정사각형의 넓이는 같으므로
$\boldsymbol{a^2+2a+1=(a+1)^2}$

문제 1

목표| 인수분해 공식 [1]을 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^2+10a+25=a^2+2\times a\times 5+5^2=\boldsymbol{(a+5)^2}$
(2) $a^2-14a+49=a^2-2\times a\times 7+7^2=\boldsymbol{(a-7)^2}$
(3) $4x^2+12x+9=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2=\boldsymbol{(2x+3)^2}$
(4) $9x^2-12x+4=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2=\boldsymbol{(3x-2)^2}$

본문 해설

❶ 완전제곱식은 이후에 이차방정식의 근의 공식이나 이차함수의 그래프에서도 많이 이용된다.

❷ (1) a의 계수의 $\frac{1}{2}$

$a^2+12a+36=(a+6)^2$

a^2　　6^2

제곱 꼴

(2) $x^2-\square x+100$이 완전제곱식이 되도록 하는 $\square$를 구할 때, $x^2+20x+100$과 $x^2-20x+100$의 두 다항식을 모두 생각해야 한다.
여기서 답이 20인 이유는 $\square$ 안의 수가 양수라고 주어졌기 때문이다.

교과서 64 쪽

❶ …, $2(3x-1)^2$과 같이 다항식의 제곱으로 된 식이나 이 식에 상수를 곱한 식을 완전제곱식이라고 한다.

예 제 1 다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $a^2+12a+\square$　　(2) $x^2-\square x+100$

$a^2+2\times a\times b+b^2$ / 제곱 / 제곱 / $a^2-2\times a\times b+b^2$

❷ (1) $a^2+12a+\square=a^2+2\times a\times 6+\square$이므로

$\square=6^2=36$

(2) $x^2-\square x+100=x^2-\square x+10^2$이므로

$\square=2\times 10=20$

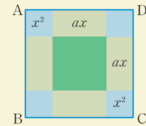
답 ● (1) 36　(2) 20

문제 2 다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $a^2+6a+\square$　　(2) $a^2+\square a+64$

(3) $x^2-10x+\square$　　(4) $x^2-\square x+9$

창의 UP 오른쪽 그림과 같은 정사각형 ABCD의 넓이를 직사각형들의 넓이의 합으로 나타내어라. 또 그림을 이용하여 정사각형 ABCD의 넓이를 완전제곱식으로 나타내어라.



2

목표| 완전제곱식을 이해하고, 다항식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^2+6a+\square=a^2+2\times a\times 3+\square$이므로

$\square=3^2=$**9**

(2) $a^2+\square a+64=a^2+\square a+8^2$이므로

$\square=2\times 8=$**16**

(3) $x^2-10x+\square=x^2-2\times x\times 5+\square$이므로

$\square=5^2=$**25**

(4) $x^2-\square x+9=x^2-\square x+3^2$이므로

$\square=2\times 3=$**6**

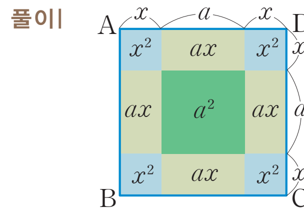
주의| (2) $\square=\pm(2\times 8)=\pm 16$이지만 문제의 조건에 의하여 답은 16이 된다.

(4) $\square=\pm(2\times 3)=\pm 6$이지만 문제의 조건에 의하여 답은 6이 된다.

창의 UP

|출제 의도| 도형 9개의 넓이의 합과 큰 정사각형의 넓이가 같음을 이용하여 인수분해 공식을 이해하게 하기 위한 문제이다.

풀이|



정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 위의 그림과 같이 $2x+a$이므로 넓이는 $(2x+a)^2$이다. 이것은 □ABCD를 나눈 9개의 사각형의 넓이의 합

$4\times x^2+4\times ax+a^2=\mathbf{4x^2+4ax+a^2}$과 같으므로

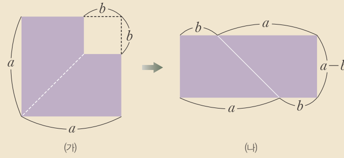
$4x^2+4ax+a^2=\mathbf{(2x+a)^2}$

a^2-b^2은 어떻게 인수분해하는가?

탐구 활동

●준비물
색종이, 가위

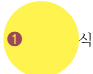
다음 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 색종이에서 한 변의 길이가 b인 정사각형 모양을 잘라 내고 남은 도형으로 직사각형 모양을 만들었다. 물음에 답하여 보자.



1 (가)에서 한 변의 길이가 b인 정사각형 모양을 잘라 내고 남은 도형의 넓이를 두 정사각형의 넓이의 차로 나타내어 보자.

2 (나)에서 직사각형의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 나타내어 보자.

3 1과 2의 결과를 등식으로 나타내어 보자.



❶ 식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 생각하면

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

로 인수분해됨을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$-a^2+b^2$
$=b^2-a^2$
$=(b+a)(b-a)$

❷ 공식 [2]

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

보기 $4a^2-9=(2a)^2-3^2=(2a+3)(2a-3)$

문제 3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) a^2-49 (2) $16x^2-1$
(3) $9a^2-64$ (4) $4x^2-81$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • (가)와 (나)의 도형의 넓이를 비교해 봄으로써 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이해하게 하려는 것이다.
준비물 • 색종이, 가위

1. 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이는 a^2이고, 한 변의 길이가 b인 정사각형의 넓이는 b^2이므로 남은 도형의 넓이는 $\boldsymbol{a^2-b^2}$이다.

2. 직사각형의 가로의 길이는 $a+b$이고, 세로의 길이는 $a-b$이므로 직사각형의 넓이는 $\boldsymbol{(a+b)(a-b)}$이다.

3. (가)와 (나)의 도형의 넓이는 같으므로
$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

본문 해설

❶ 다항식의 곱셈에서 $(a+b)(a-b)$를 전개하면

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$$
$$=a^2-b^2$$

❷ 인수분해 공식 [2]를 이용하려면 주어진 다항식이 부호가 다른 두 개의 항으로 되어 있고, 각 항이 제곱의 꼴이어야 한다.

• $a^2-36=a^2-6^2$
$=(a+6)(a-6)$

• $-49+a^2=a^2-49$
$=a^2-7^2$
$=(a+7)(a-7)$

3

목표 | 인수분해 공식 [2]를 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $a^2-49=a^2-7^2=\boldsymbol{(a+7)(a-7)}$
(2) $16x^2-1=(4x)^2-1^2=\boldsymbol{(4x+1)(4x-1)}$
(3) $9a^2-64=(3a)^2-8^2=\boldsymbol{(3a+8)(3a-8)}$
(4) $4x^2-81=(2x)^2-9^2=\boldsymbol{(2x+9)(2x-9)}$

기/초/력 향상 문제

다음 식을 인수분해하여라.

1 a^2-64

2 $64x^2-25$

3 $4a^2-1$

4 $2x^2-18$

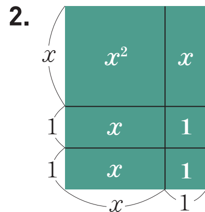
답 **1** $(a+8)(a-8)$ **2** $(8x+5)(8x-5)$
3 $(2a+1)(2a-1)$ **4** $2(x+3)(x-3)$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 대수 타일 6개의 넓이의 합과 대수 타일 6개를 모두 붙여 만든 직사각형의 넓이를 비교해 봄으로써
$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
임을 이해하게 하려는 것이다.
준비물 • 대수 타일

1. $x^2+x+x+x+1+1=\boldsymbol{x^2+3x+2}$

2.



3. 2에서 만든 직사각형의 가로의 길이는 $x+1$이고, 세로의 길이는 $x+2$이다.
따라서 직사각형의 넓이는
$\boldsymbol{(x+1)(x+2)}$

4. 대수 타일 6개의 넓이의 합과 대수 타일 6개를 모두 붙여 만든 직사각형의 넓이는 같으므로 $\boldsymbol{x^2+3x+2=(x+1)(x+2)}$

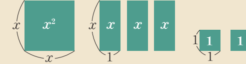
교과서 66 쪽

$x^2+(a+b)x+ab$는 어떻게 인수분해하는가?

탐구 활동

다음 그림과 같이 넓이가 x^2, x, 1인 세 종류의 대수 타일 6개를 이용하여 물음에 답하여 보자.

●준비물
대수 타일
활동지 2



1 대수 타일 6개의 넓이의 합을 구하여 보자.
2 대수 타일 6개를 모두 붙여서 직사각형으로 만들어 보자.
3 2에서 만든 직사각형의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 나타내어 보자.
4 1과 3의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

곱셈 공식

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 생각하면

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

로 인수분해됨을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

인수분해 공식 [3]

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

우리 더하면 5, 곱하면 6이 되지!

❶ x^2+5x+6을 인수분해하여 보자.
인수분해 공식 [3]에서

$$a+b=5,\ ab=6$$

인 두 정수 a, b를 찾으면

$$x^2+5x+6=(x+a)(x+b)$$

로 인수분해할 수 있다.

곱이 6인 두 정수	합
1, 6	7
2, 3	5
−1, −6	−7
−2, −3	−5

따라서 곱이 6인 두 정수 중에서 합이 5가 되는 수는 2와 3이므로 x^2+5x+6을 인수분해하면 다음과 같다.

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

본문 해설

❶ 합이 5가 되는 두 정수를 찾으면 무수히 많이 나온다. 따라서 먼저 곱이 6이 되는 두 정수를 찾은 후에 이 중에서 합이 5가 되는 두 정수를 찾는 것이 편리하다.
곱이 6인 두 정수를 찾을 때, 두 양의 정수뿐만 아니라 두 음의 정수도 생각해야 한다.

지/도/자/료

1. 다항식 x^2-5x-6을 인수분해할 때, 2와 3은 곱하면 6이 되고 더하면 5가 되므로 혼동하여
$x^2-5x-6=(x-2)(x-3)$과 같이 인수분해를 잘못하는 경우가 있다. $x^2+(a+b)x+ab$에서 $a+b$와 ab의 값과 부호에 모두 주의하여 $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$으로 인수분해할 수 있도록 지도한다.

2. A, B, a, b가 모두 정수일 때,
$x^2+Ax+B=(x+a)(x+b)$
에서 A, B의 부호와 a, b의 부호 사이의 관계는 다음과 같다.
(1) $A>0$, $B>0$ ⇨ a, b는 모두 양수
(2) $A>0$, $B<0$ ⇨ a, b 중에서 절댓값이 큰 쪽은 양수, 절댓값이 작은 쪽은 음수
(3) $A<0$, $B>0$ ⇨ a, b는 모두 음수
(4) $A<0$, $B<0$ ⇨ a, b 중에서 절댓값이 큰 쪽은 음수, 절댓값이 작은 쪽은 양수

교과서 67 쪽

예 제 2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2-3x+2 (2) x^2-2x-8

$x^2+\underset{\text{합}}{(a+b)}x+\underset{\text{곱}}{ab}$ $=(x+a)(x+b)$

풀이 (1) 곱이 2인 두 정수 중에서 합이 -3이 되는 수는 -1과 -2이다.
따라서 주어진 식을 인수분해하면
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

곱이 2인 두 정수	합
1, 2	3
-1, -2	-3

(2) 곱이 -8인 두 정수 중에서 합이 -2가 되는 수는 2와 -4이다.
따라서 주어진 식을 인수분해하면
$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

곱이 -8인 두 정수	합
1, -8	-7
2, -4	-2
-1, 8	7
-2, 4	2

답 (1) $(x-1)(x-2)$ (2) $(x+2)(x-4)$

문제 4 다음 □ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $x^2+\square x+6=(x+\square)(x+3)$

(2) $x^2-5x-\square=(x+\square)(x-6)$

문제 5 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2+7x+10$ (2) x^2-4x+3

(3) x^2+x-12 (4) $x^2-2x-35$

문제 6 문제 5와 같이 인수분해 공식 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$를 이용하여 식을 인수분해하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

5

목표| 인수분해 공식 [3]을 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) 곱이 10인 두 정수 중에서 합이 7이 되는 수는 2와 5이므로
$x^2+7x+10=\mathbf{(x+2)(x+5)}$

(2) 곱이 3인 두 정수 중에서 합이 -4가 되는 수는 -1과 -3이므로
$x^2-4x+3=\mathbf{(x-1)(x-3)}$

(3) 곱이 -12인 두 정수 중에서 합이 1이 되는 수는 -3과 4이므로
$x^2+x-12=\mathbf{(x-3)(x+4)}$

(4) 곱이 -35인 두 정수 중에서 합이 -2가 되는 수는 5와 -7이므로
$x^2-2x-35=\mathbf{(x+5)(x-7)}$

4

목표| 인수분해 공식 [3]을 이용하여 □ 안에 알맞은 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2\times3=6$, $2+3=5$이므로
$x^2+\boxed{\mathbf{5}}x+6=(x+\boxed{\mathbf{2}})(x+3)$

(2) $-6+1=-5$, $(-6)\times1=-6$이므로
$x^2-5x-\boxed{\mathbf{6}}=(x+\boxed{\mathbf{1}})(x-6)$

6

|출제 의도| 인수분해 공식 [3]을 이용하여 다항식을 인수분해하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 인수분해 공식 [3]을 익숙하게 하기 위한 문제이다.

예시| 다항식 $x^2-7x-30$을 인수분해하여라.

풀이| 곱이 -30인 두 정수 중에서 합이 -7이 되는 수는 3과 -10이므로
$x^2-7x-30=(x+3)(x-10)$

교과서 68 쪽

본문 해설

❶ 인수분해 공식 [1], [2], [3]은 인수분해 공식 [4]의 특수한 경우로 설명할 수도 있다.
$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
에서

- 인수분해 공식 [1]
  $x^2+4x+4=(x+2)^2$
  ⇨ $a=c=1$, $b=d=2$인 경우
  $x^2-4x+4=(x-2)^2$
  ⇨ $a=c=1$, $b=d=-2$인 경우
- 인수분해 공식 [2]
  $x^2-4=(x+2)(x-2)$
  ⇨ $a=c=1$, $b=2$, $d=-2$인 경우
- 인수분해 공식 [3]
  $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
  ⇨ $a=c=1$, $b=1$, $d=2$인 경우

$acx^2+(ad+bc)x+bd$는 어떻게 인수분해하는가?

곱셈 공식

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

에서 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

❶ **공식 [4]**

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

다항식 $3x^2+16x+5$를 인수분해하여 보자.

인수분해 공식 [4]에서

$$ac=3,\ ad+bc=16,\ bd=5$$

인 네 정수 a, b, c, d를 찾으면

$$3x^2+16x+5=(ax+b)(cx+d)$$

로 인수분해할 수 있다. 이때 보통 a, c는 양의 정수로 한다.

$acx^2+(ad+bc)x+bd$ / $3x^2+16x+5$

먼저 $ac=3$인 양의 정수 a, c와 $bd=5$인 정수 b, d를 구하여 오른쪽과 같이 나열한 후 대각선으로 곱하여 $ad+bc=16$이 되는 네 수를 찾는다.

a ╳ $b \to bc$
c ╳ $d \to ad$
$ad+bc$

즉, 다음과 같이 계산하여 본다.

1	1	→ 3	
3	5	→ 5	8

1	5	→ 15	
3	1	→ 1	16

1	−1	→ −3	
3	−5	→ −5	−8

1	−5	→ −15	
3	−1	→ −1	−16

위의 계산에서 $a=1$, $b=5$, $c=3$, $d=1$이다. 따라서 $3x^2+16x+5$를 인수분해하면

$$3x^2+16x+5=(x+5)(3x+1)$$

이다.

$3x^2+16x+5$
1 ╳ 5 → 15 ⋯ $x+5$
3 ╳ 1 → 1 ⋯ $3x+1$
16

지/도/자/료 인수와 인수분해

인수를 한자로 쓰면 因數이다. 여기서 因은 '인할 인' 자로 '바탕, 원인' 이라는 뜻을 가지고 있다. 따라서 인수란 '바탕이 되는 수' 라는 뜻이다.
수에서 '인수' 라고 하면 '약수' 와 같은 뜻으로 생각해도 된다. 그런데 실제로 이러한 용어가 사용되는 경우를 살펴보면 숫자를 이야기할 때에는 '약수' 라는 용어를 주로 쓰고, 식을 놓고 이야기할 때에는 '인수' 를 많이 사용한다.
인수분해라는 것은 어떤 하나의 식을 그 식에 대한 인수의 곱으로 나타내는 것을 말한다. 따라서 인수분해는 어떤 하나의 식을 그보다 차수가 낮은 여러 개의 식들의 곱으로 나타내는 것이라고 할 수 있다.

읽/기/자/료

프랑스의 수학자 비에타(Viéta, F.: 1540~1603)는 문자를 사용한 식을 도입하여 대수학의 발전에 공헌하여 '대수학의 아버지' 라고 불린다. 비에타는 법률을 전공하여 의회 의원과 궁중 고문관으로 일하다가 정치적인 문제로 관직을 떠난 후, 여가 시간 동안 수학에 관심을 갖고 많은 연구를 하였다. 그는 문자와 새로운 기호를 도입하여 식을 간결하게 나타내고자 하였다. 이를테면 오늘날의 x, x^2, x^3에 해당하는 것을 처음에는 A, A quadratum, A cubum으로 썼으며 나중에는 더 간단히 A, Aq, Ac로 나타내었다.

교과서 69 쪽

예 제 3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2x^2+7x+3$　　(2) $3x^2-10x-8$

● 풀이 (1) 주어진 식은 인수분해 공식 [4]에서
$ac=2,\ ad+bc=7,\ bd=3$
인 경우이므로 이를 만족시키는 정수를 오른쪽과 같이 찾아 인수분해하면
$2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1)$

1	3	6
2	1	1
		7

(2) 주어진 식은 인수분해 공식 [4]에서
$ac=3,\ ad+bc=-10,\ bd=-8$
인 경우이므로 이를 만족시키는 정수를 오른쪽과 같이 찾아 인수분해하면
$3x^2-10x-8=(x-4)(3x+2)$

1	-4	-12
3	2	2
		-10

답 ● (1) $(x+3)(2x+1)$　(2) $(x-4)(3x+2)$

문제 7 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $5x^2+13x+6$　　(2) $4x^2-9x+2$
(3) $2x^2-x-21$　　(4) $10x^2-7x-12$

인수분해할 때 다항식의 각 항에 공통인수가 있으면 먼저 공통인수로 묶어 낸 후 인수분해한다.

예 제 4 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $4x^2+4x-48$　　(2) $2ax^2-8ax+8a$

인수분해를 할 때에는 더 이상 인수분해가 되지 않는 인수들의 곱으로 나타내어야 한다.

● 풀이 (1) $4x^2+4x-48=4(x^2+x-12)=4(x+4)(x-3)$
(2) $2ax^2-8ax+8a=2a(x^2-4x+4)=2a(x-2)^2$

답 ● (1) $4(x+4)(x-3)$　(2) $2a(x-2)^2$

읽/기/자/료　공개 열쇠 암호 체계

공개 열쇠 암호 체계(Public Key Cryptosystem)는 약 20년 전에 소개되었다. 이것은 암호를 만드는 방법을 모두에게 공개하지만 암호를 푸는 방법은 자기만 알고 있는 방법이다. 즉, 자신의 중요한 정보를 암호로 알리게 되지만 이 정보를 도중에 누군가 가로챈다고 하더라도 그 사람이 가로챈 것은 암호일 뿐 암호를 풀 수 없는 것이다.
그런데 암호를 푸는 과정은 암호를 만드는 과정의 반대 과정일 텐데 한쪽의 과정을 알면 그 반대 과정도 알 수 있지 않을까? 하지만 어떤 수들의 곱셈은 쉽지만 다시 그것을 나누는 것은 쉽지 않다는 것을 생각하면 암호를 만드는 방법을 안다고 해서 암호를 푸는 방법을 안다고 할 수 없음을 이해할 수 있다. 예를 들면 103과 151의 곱은 쉽게 계산할 수 있지만 15553의 약수를 쉽게 구할 수는 없다. 이와 같이 암호를 만드는 과정은 쉽지만 그 반대의 과정은 불가능하거나 오랜 시간이 걸리는 이 공개 열쇠 암호 체계는 성공적인 체계이다.

7

목표 | 인수분해 공식 [4]를 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $5x^2+13x+6$
$=(x+2)(5x+3)$

1	2	10
5	3	3
		13

(2) $4x^2-9x+2$
$=(x-2)(4x-1)$

1	-2	-8
4	-1	-1
		-9

(3) $2x^2-x-21$
$=(x+3)(2x-7)$

1	3	6
2	-7	-7
		-1

(4) $10x^2-7x-12$
$=(2x-3)(5x+4)$

2	-3	-15
5	4	8
		-7

기/초/력 향상 문제

다음 식을 인수분해하여라.

1 $2x^2-3x-2$

2 $3x^2+5x-2$

3 $4x^2-8x+3$

4 $6x^2+11x+4$

답 **1** $(x-2)(2x+1)$　**2** $(x+2)(3x-1)$
3 $(2x-1)(2x-3)$　**4** $(2x+1)(3x+4)$

8

목표| 다항식을 공통인수로 묶어 낸 후 인수분해 공식을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3x^2-12x-15=3(x^2-4x-5)$

$=\mathbf{3(x+1)(x-5)}$

(2) $5ax^2-45a=5a(x^2-9)$

$=5a(x^2-3^2)$

$=\mathbf{5a(x+3)(x-3)}$

(3) $9ax^2+6ax+a=a(9x^2+6x+1)$

$=\mathbf{a(3x+1)^2}$

(4) $10x^2-4x-6=2(5x^2-2x-3)$

$=\mathbf{2(x-1)(5x+3)}$

교과서 70 쪽

문제 8 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $3x^2-12x-15$　　(2) $5ax^2-45a$

(3) $9ax^2+6ax+a$　　(4) $10x^2-4x-6$

발전 **문제 9** $4x^2-5x+A=(x-2)(Bx+C)$일 때, $A+B+C$의 값을 구하여라.

(단, A, B, C는 상수)

컴퓨터의 활용　**다항식을 인수분해하여 보자.**

인터넷의 검색 기능은 많은 정보 중 원하는 정보를 쉽게 찾아 주지만 수학 계산에는 적합하지 않다. 그래서 복잡한 수학 계산은 수학 전문 소프트웨어나 계산기를 이용하여 왔다.

영국의 스티븐 울프럼(Stephen Wolfram)은 그가 이미 개발한 수학 계산 프로그램과 검색 기능을 접목하여 새로운 수학 계산 검색 소프트웨어 울프럼알파(http://www.wolframalpha.com)를 개발하였다. 울프럼알파는 복잡한 방정식과 함수, 통계 등의 식을 검색창에 입력하는 것만으로도 수학 계산을 할 수 있다. 또 개인이 보유한 컴퓨터뿐 아니라 스마트폰에서도 매우 쉽고 편리하게 이용 가능하다.

1. 다항식 $3x^2-2x-8$의 인수분해 결과를 알고 싶다면 검색창에 '3x^2−2x−8'이라고 입력한다. 그러면 오른쪽 그림과 같이 인수분해된 결과 $(x-2)(3x+4)$가 나온다.

2. 문제 8의 주어진 식을 울프럼알파를 이용하여 인수분해하여 보자.

9

목표| 인수분해 공식 [4]를 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $4x^2-5x+A=(x-2)(Bx+C)$

$=Bx^2+(C-2B)x-2C$

$B=4$

$C-2B=C-8=-5$에서　$C=3$

$A=-2C=(-2)\times3=-6$

따라서 $A+B+C=(-6)+4+3=\mathbf{1}$이다.

컴퓨터의 활용

2. 문제 8의 주어진 식을 울프럼알파를 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

(1) WolframAlpha

(2) WolframAlpha

(3) WolframAlpha

(4) WolframAlpha

교과서 71 쪽

중 / 단 / 원 기초

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ab-3a$ (2) $15ab+5a$

(3) $-x^2-6x$ (4) $2x^2+4xy$

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

2 다음 □ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $x^2+4x+4=(x+\square)^2$

(2) $x^2-8x+16=(x-\square)^2$

(3) $x^2-81=(x+\square)(x-\square)$

(4) $x^2-25=(x+\square)(x-\square)$

$x^2+(a+b)x+ab$ (합, 곱)
$=(x+a)(x+b)$

3 다음 □ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $x^2+5x+4=(x+\square)(x+\square)$

(2) $x^2-8x+15=(x-\square)(x-\square)$

(3) $x^2+x-12=(x+\square)(x-\square)$

(4) $x^2-3x-54=(x+\square)(x-\square)$

$acx^2+(ad+bc)x+bd$
$=(ax+b)(cx+d)$

4 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $5x^2+12x+4$ (2) $4x^2-4x-3$

(3) $3x^2-5x-2$ (4) $2x^2-5x+3$

중/단/원 기초

1

목표| 다항식을 공통인수로 묶어 내어 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) ab와 $-3a$의 공통인수는 a이므로

$ab-3a=\mathbf{a(b-3)}$

(2) $15ab$와 $5a$의 공통인수는 $5a$이므로

$15ab+5a=\mathbf{5a(3b+1)}$

(3) $-x^2$과 $-6x$의 공통인수는 $-x$이므로

$-x^2-6x=\mathbf{-x(x+6)}$

(4) $2x^2$과 $4xy$의 공통인수는 $2x$이므로

$2x^2+4xy=\mathbf{2x(x+2y)}$

참고| (3) $-x^2-6x=x(-x-6)$으로 인수분해할 수도 있으나 보통 첫 번째 항이 음수인 경우에는 음의 부호까지 공통인수로 묶어 $-x^2-6x=-x(x+6)$으로 인수분해한다.

2

목표| 인수분해 공식 [1], [2]를 이용하여 □ 안에 알맞은 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+4x+4=(x+\boxed{2})^2$

(2) $x^2-8x+16=(x-\boxed{4})^2$

(3) $x^2-81=(x+\boxed{9})(x-\boxed{9})$

(4) $x^2-25=(x+\boxed{5})(x-\boxed{5})$

3

목표| 인수분해 공식 [3]을 이용하여 □ 안에 알맞은 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+5x+4=(x+\boxed{1})(x+\boxed{4})$

(2) $x^2-8x+15=(x-\boxed{3})(x-\boxed{5})$

(3) $x^2+x-12=(x+\boxed{4})(x-\boxed{3})$

(4) $x^2-3x-54=(x+\boxed{6})(x-\boxed{9})$

4

목표| 인수분해 공식 [4]를 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $5x^2+12x+4$

1 ╳ 2 → 10
5 ╳ 2 → 2
합: 12

$5x^2+12x+4=\mathbf{(x+2)(5x+2)}$

(2) $4x^2-4x-3$

2 ╳ 1 → 2
2 ╳ −3 → −6
합: −4

$4x^2-4x-3=\mathbf{(2x+1)(2x-3)}$

(3) $3x^2-5x-2$

1 ╳ −2 → −6
3 ╳ 1 → 1
합: −5

$3x^2-5x-2=\mathbf{(x-2)(3x+1)}$

(4) $2x^2-5x+3$

1 ╳ −1 → −2
2 ╳ −3 → −3
합: −5

$2x^2-5x+3=\mathbf{(x-1)(2x-3)}$

중/단/원 기본

1

목표| 다항식을 공통인수로 묶어 내어 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $aby-bxy=\boldsymbol{by(a-x)}$

(2) $-2x^2-2xy=\boldsymbol{-2x(x+y)}$

(3) $a^2b+ab^2+ab=\boldsymbol{ab(a+b+1)}$

(4) $3ax-bx+2x=\boldsymbol{x(3a-b+2)}$

2

목표| 인수분해 공식을 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2-12x+36=x^2-2\times x\times 6+6^2$
$=\boldsymbol{(x-6)^2}$

(2) $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2$
$=\boldsymbol{(2x+1)^2}$

(3) $a^2-36=a^2-6^2=\boldsymbol{(a+6)(a-6)}$

(4) $-9a^2+4=4-9a^2=2^2-(3a)^2$
$=\boldsymbol{(2+3a)(2-3a)}$

3

목표| 인수분해 공식을 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+x-6=\boldsymbol{(x+3)(x-2)}$

(2) $x^2+2x-35=\boldsymbol{(x+7)(x-5)}$

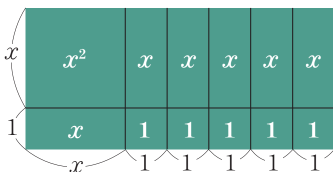
(3) $2x^2-x-10=\boldsymbol{(x+2)(2x-5)}$

(4) $3x^2-5x-2=\boldsymbol{(x-2)(3x+1)}$

4

목표| 도형을 이용하여 인수분해를 이해할 수 있게 한다.

풀이| 직사각형 12개의 넓이의 합은 x^2+6x+5
직사각형 12개를 빈틈없이 겹치지 않게 붙여서 하나의 큰 직사각형을 만들면 다음과 같다.



이 직사각형의 넓이는 $(x+5)(x+1)$이므로
$x^2+6x+5=\boldsymbol{(x+5)(x+1)}$로 인수분해할 수 있다.

교과서 72 쪽

중/단/원 기본

인수분해의 뜻

1 다음 식을 인수분해하여라.
(1) $aby-bxy$　(2) $-2x^2-2xy$
(3) a^2b+ab^2+ab　(4) $3ax-bx+2x$

인수분해 공식

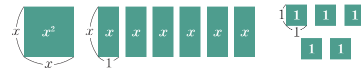
2 다음 식을 인수분해하여라.
(1) $x^2-12x+36$　(2) $4x^2+4x+1$
(3) a^2-36　(4) $-9a^2+4$

인수분해 공식

3 다음 식을 인수분해하여라.
(1) x^2+x-6　(2) $x^2+2x-35$
(3) $2x^2-x-10$　(4) $3x^2-5x-2$

인수분해 공식

4 다음 그림의 직사각형 12개를 빈틈없이 겹치지 않게 붙여서 하나의 큰 직사각형을 만들 때, 큰 직사각형의 넓이를 나타내는 식을 인수분해하여라.



인수분해 공식

5 다항식 $9x^2+42x+8k+1$이 완전제곱식일 때, k의 값을 구하여라.

5

목표| 다항식이 완전제곱공식이 되는 조건을 이해하게 한다.

풀이| $9x^2+42x+8k+1=(3x)^2+2\times 3x\times 7+8k+1$
$=(3x+7)^2$

이 되어야 하므로
$8k+1=7^2=49$, $8k=48$
따라서 $\boldsymbol{k=6}$이다.

교과서 73 쪽

중 / 단 / 원 실력

1 $x-1$이 $8x^2-13x+a$의 인수일 때, a의 값을 구하여라.

• 인수분해를 이용하여 $2^{16}-1$을 곱의 형태로 나타내어 본다.

2 $2^{16}-1$은 10과 20 사이의 어떤 자연수로 나누어떨어진다. 이 수를 모두 구하여라.

• 인수분해를 이용하여 주어진 다항식을 정리하여 본다.

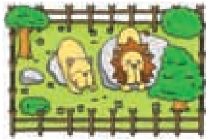
3 $a+b=5$일 때, $a^2+ab+b^2+(a-1)(b-1)$의 값을 구하여라.

4 인수분해를 이용하여 다음을 계산하여라.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2$$

• 넓이를 인수분해하여 가로의 길이를 찾는다.

5 오른쪽 그림과 같이 넓이가 $6a^2+11a-10$인 직사각형 모양의 동물원이 있다. 이 동물원의 세로의 길이가 $3a-2$일 때, 둘레의 길이를 구하여라.



6 윤수와 미영이는 어떤 이차식을 인수분해하는데 각각 일차항의 계수와 상수항을 잘못 보고 $(x-2)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$으로 인수분해하였다. 처음 이차식을 바르게 인수분해하여라.

중/단/원 실력

1

목표| 인수의 의미를 알고, 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $8x^2-13x+a=(x-1)(Ax+B)$로 인수분해되므로 $8x^2-13x+a=Ax^2+(B-A)x-B$

따라서 $A=8$이고, $B-A=-13$이므로 $B=-5$이다.

$a=-B=$ **5**

2

목표| 인수분해를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $2^{16}-1=(2^8+1)(2^8-1)=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\times17\times5\times3\times1$

따라서 $2^{16}-1$은 10과 20 사이의 자연수인 **15, 17**로 나누어떨어진다.

3

목표| 인수분해를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^2+ab+b^2+(a-1)(b-1)$

$=a^2+ab+b^2+ab-a-b+1$

$=a^2+2ab+b^2-a-b+1$

$=(a+b)^2-(a+b)+1$

$=25-5+1=$ **21**

4

목표| 인수분해를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하면

$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+(7^2-8^2)+(9^2-10^2)$

$=(1+2)\times(1-2)+(3+4)\times(3-4)+\cdots+(9+10)\times(9-10)$

$=(-1)\times(1+2+3+4+\cdots+9+10)$

$=-1\times55=$ **−55**

5

목표| 인수분해를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $6a^2+11a-10=(3a-2)(2a+5)$이므로 동물원의 가로의 길이는 $2a+5$이다. 따라서

(동물원의 둘레의 길이)$=2\{(2a+5)+(3a-2)\}$

$=2(5a+3)$

$=$ **$10a+6$**

6

목표| 인수분해를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 윤수가 인수분해한 식 $(x-2)(x+3)$을 전개하면 x^2+x-6이고 일차항의 계수를 잘못 본 것이므로 이차항의 계수와 상수항은 옳다.

미영이가 인수분해한 식 $(x+2)(x+3)$을 전개하면 x^2+5x+6이고 상수항을 잘못 본 것이므로 이차항의 계수와 일차항의 계수는 옳다.

따라서 처음 이차식은 x^2+5x-6이고 이를 인수분해하면 **$(x+6)(x-1)$**이다.

2 이차방정식

중단원을 시작하며

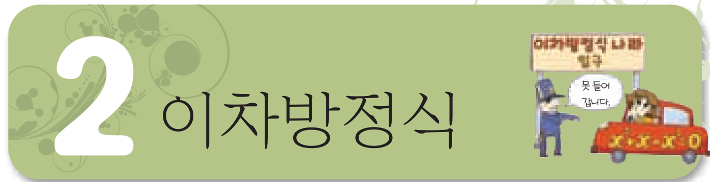
이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 이차방정식과 그 해의 의미를 이해하게 한다.
② 인수분해, 제곱근, 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
③ 근의 공식을 이해하고, 이를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
④ 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
2-1 이차방정식과 그 해	이차방정식의 뜻
	이차방정식의 해
2-2 이차방정식의 풀이	인수분해를 이용한 풀이
	중근의 뜻
	제곱근을 이용한 풀이
	완전제곱식을 이용한 풀이
	근의 공식의 뜻과 이를 이용한 풀이
2-3 이차방정식의 활용	이차방정식의 활용
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 74 쪽



준 | 비 | 학 | 습

일차방정식의 풀이
주어진 일차방정식을
$ax=b$
의 꼴로 만들어 해를 구한다.

1 다음 일차방정식을 풀어라.

(1) $x+7=4$ (2) $4x-1=6x-7$
(3) $\frac{1}{3}x=-2$ (4) $2x+3(x-2)=4$

제곱근
$x^2=a\ (a\geq 0)$일 때,
x를 a의 제곱근이라고 한다.

2 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 9 (2) 10
(3) 15 (4) 36

인수분해
x^2+5x+6
인수분해 ↓↑ 전개
$(x+2)(x+3)$
인수

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2-10x+25$ (2) $9x^2-25$
(3) x^2-x-6 (4) $3x^2-x-2$

일차방정식
방정식의 모든 항을 좌변으로 이항한 식이
(일차식)$=0$
의 꼴로 변형되는 방정식을 일차방정식이라고 한다.

4 다음에서 어떤 수를 x로 놓고, 방정식을 세워라.

(1) 어떤 수에 9를 더하면 그 수의 4배와 같다.
(2) 어떤 수를 3배 한 수는 그 수보다 8만큼 작다.

준비 학습의 해설

1

목표| 일차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x+7=4$에서 $x=4-7$이므로 $\boldsymbol{x=-3}$
(2) $4x-1=6x-7$에서 $-2x=-6$이므로 $\boldsymbol{x=3}$
(3) $\frac{1}{3}x=-2$에서 $x=-2\times 3$이므로 $\boldsymbol{x=-6}$
(4) $2x+3(x-2)=4$에서 $5x=10$이므로 $\boldsymbol{x=2}$

2

목표| 제곱근의 뜻을 알고, 제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{+3,\ -3}$ (2) $\boldsymbol{+\sqrt{10},\ -\sqrt{10}}$
(3) $\boldsymbol{+\sqrt{15},\ -\sqrt{15}}$ (4) $\boldsymbol{+6,\ -6}$

3

목표| 인수분해 공식을 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{(x-5)^2}$ (2) $\boldsymbol{(3x+5)(3x-5)}$
(3) $\boldsymbol{(x+2)(x-3)}$ (4) $\boldsymbol{(3x+2)(x-1)}$

4

목표| 문제의 뜻에 맞는 일차방정식을 세울 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{x+9=4x}$ (2) $\boldsymbol{3x=x-8}$

교과서 75 쪽

2-1 이차방정식과 그 해

● 이차방정식과 그 해의 의미를 이해한다.

이차방정식이란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 도심지 한가운데에 있는 직사각형 모양의 옥상 정원이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1 옥상 정원의 넓이가 1800 m^2일 때, 이것을 등식으로 나타내어 보자.

2 1의 등식을 (x에 관한 식)=0의 꼴로 나타내어 보자. 이때 좌변은 x에 관한 몇 차식인가?

$x^2+5x=x+7$에서 우변의 $x+7$을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$x^2+4x-7=0$$

이다.

이와 같이 방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

$$(x\text{에 관한 이차식})=0$$

의 꼴로 변형되는 방정식을 x에 관한 **이차방정식**이라고 한다.

$a\neq0$이고 a, b, c는 상수일 때
- ax^2+bx+c ⇨ 이차식
- $ax^2+bx+c=0$ ⇨ 이차방정식

일반적으로 x에 관한 이차방정식은

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0,\ a,\ b,\ c\text{는 상수})$$

과 같이 나타낼 수 있다.

문제 1 다음 중에서 이차방정식을 모두 찾아라.

ㄱ $x^2-x=0$ ㄴ $2x-6=3x$
ㄷ $(x+3)^2=x^2+4x$ ㄹ $x(x-5)=2x^2-1$

2-1 이차방정식과 그 해

소단원 지도 목표

① 이차방정식의 뜻을 이해하게 한다.
② 이차방정식의 해의 의미를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차방정식의 의미는 다양한 상황을 통해 도입한다.

2. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a\neq0$임을 유의하게 한다.

3. x에 대한 이차항이 있는 등식이 모두 이차방정식인 것은 아님에 유의하게 한다.

4. x에 대한 이차방정식에서 미지수 x에 대하여 특별한 조건이 주어지지 않으면 x는 실수 전체의 범위에서 생각하도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 이차방정식(二次方程式, quadratic equation)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직사각형의 넓이를 이용하여 방정식을 만들고, (x에 관한 이차식)=0의 꼴로 나타내어 봄으로써 이차방정식의 뜻을 알게 하려는 것이다.

1. $x(x+20)=1800$

2. $x(x+20)=1800$에서 $x^2+20x=1800$
우변의 1800을 좌변으로 이항하여 정리하면 $x^2+20x-1800=0$
이때 좌변은 x에 관한 **이차식**이다.

1

목표| 이차방정식의 뜻을 알고, 이차방정식을 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㄱ $x^2-x=0$ ⇨ 이차방정식
ㄴ $2x-6=3x$에서 $2x-6-3x=0$
$-x-6=0$ ⇨ 일차방정식
ㄷ $(x+3)^2=x^2+4x$에서 $x^2+6x+9=x^2+4x$
$x^2+6x+9-x^2-4x=0$, $2x+9=0$
⇨ 일차방정식
ㄹ $x(x-5)=2x^2-1$에서 $x^2-5x=2x^2-1$
$x^2-5x-2x^2+1=0$, $-x^2-5x+1=0$
⇨ 이차방정식
따라서 이차방정식인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

읽/기/자/료 옥상 정원

건물의 옥상에 정원을 만들면 방음 효과와 함께 신선한 공기를 얻을 수 있고, 에너지 효율도 높아지게 된다. 환경친화적인 건물을 만드는 것으로 유명한 건축가 켄 양(Ken Yeang)은 자연이 만든 환경과 인간이 만든 환경의 융합을 중요하게 생각하여 친환경적인 마천루를 위해 건물에 정원을 만든 것으로도 유명하다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • x에 주어진 수를 대입하여 식의 값을 알아보고 식의 값이 0이 되게 하는 x를 찾아봄으로써 이차방정식의 해의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1.

x	-2	-1	0	1	2
x^2+x-2	**0**	**-2**	**-2**	**0**	**4**

2. **-2, 1**

본문 해설

❶ 어떤 수를 방정식에 대입하면 그 수가 방정식의 해인지 아닌지를 확인할 수 있다.

교과서 76 쪽

이차방정식의 해란 무엇인가?

탐구 활동 **이차방정식 $x^2+x-2=0$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 다음 표를 완성하여 보자.

x	-2	-1	0	1	2
x^2+x-2					

2 **1**에서 이차방정식 $x^2+x-2=0$을 참이 되게 하는 x의 값을 모두 말하여 보자.

x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 이차방정식

$$x^2+x-2=0$$

을 [illegible] 되게 하는 x의 값을 찾아보자.

❶ [illegible] x^2+x-2에서 x 대신에 -2, -1, 0, 1, 2를 대입하면 다음과 같은 표를 [illegible] 있다.

x의 값	x^2+x-2의 값	$x^2+x-2=0$
-2	$(-2)^2+(-2)-2=0$	참
-1	$(-1)^2+(-1)-2=-2$	거짓
0	$0^2+0-2=-2$	거짓
1	$1^2+1-2=0$	참
2	$2^2+2-2=4$	거짓

이 표에서 이차방정식 $x^2+x-2=0$은 $x=-2$ 또는 $x=1$일 때에만 참임을 알 수 있다.

이와 같이 미지수 x에 관한 이차방정식을 참이 되게 하는 x의 값을 이 이차방정식의 해 또는 근이라 하고, 해를 모두 구하는 것을 이차방정식을 푼다고 한다.

특별한 언급이 없을 경우 미지수 x값의 범위는 실수 전체로 생각한다.

문제 2 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 다음 이차방정식의 해를 모두 구하여라.

(1) $x^2-2x=0$　　(2) $x^2-x-2=0$

2

목표 | 주어진 x의 값 중에서 이차방정식의 해를 찾을 수 있게 한다.

풀이

(1)

x의 값	x^2-2x의 값	$x^2-2x=0$
-2	$(-2)^2-2\times(-2)=8$	거짓
-1	$(-1)^2-2\times(-1)=3$	거짓
0	$0^2-2\times0=0$	참
1	$1^2-2\times1=-1$	거짓
2	$2^2-2\times2=0$	참

따라서 주어진 이차방정식의 해는 **$x=0$ 또는 $x=2$**

(2)

x의 값	x^2-x-2의 값	$x^2-x-2=0$
-2	$(-2)^2-(-2)-2=4$	거짓
-1	$(-1)^2-(-1)-2=0$	참
0	$0^2-0-2=-2$	거짓
1	$1^2-1-2=-2$	거짓
2	$2^2-2-2=0$	참

따라서 주어진 이차방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=2$

읽/기/자/료 이차방정식을 다룬 수학 문헌

고대 동양 수학을 집대성한 “구장산술”은 실제 생활에서 발생하는 여러 문제 상황과 그에 대한 풀이를 제시하고 있는데 문제 상황에 따라 9개의 장으로 구성되어 있다. 제8장의 ‘방정(方程)’은 연립일차방정식의 계산 문제를 가감법으로 푸는 방법을 다루고 있으며, 제9장의 ‘구고(句股)’는 직각삼각형에 관한 문제로 이차방정식 문제도 다루고 있다.

한편 3세기 후반에 알렉산드리아에서 활약하였던 디오판토스(Diophantos: ?200∼?284)의 저서 “산수론”에서는 방정식 문제와 그 해법을 다루고 있다.

아라비아의 수학자 알콰리즈미(Al−Khwarizmi: ?780∼?850)는 이차방정식의 해법을 연구하였는데, 그의 대수학 저서인 “복원과 대비의 계산”에 일차방정식과 이차방정식의 해법이 실려 있다. 천문학자이면서 지리학자이기도 하였던 알콰리즈미는 중세 수학에 커다란 영향을 미쳤다고 한다.

교과서 77 쪽

2-2 이차방정식의 풀이

● 여러 가지 방법을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

인수분해를 이용하여 이차방정식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동 다음 그림을 보고 물음에 답하여 보자.

1 두 수 a, b에 대하여 $ab=0$이 되는 경우를 모두 말하여 보자.

2 $(x+3)(x-2)=0$이 되는 경우를 모두 말하여 보자.

두 수 또는 두 식 A, B에 대하여

$$A=0 \text{ 또는 } B=0\text{이면 } \quad AB=0$$

이다. 또

$$AB=0\text{이면 } \quad A=0 \text{ 또는 } B=0$$

이다.

이 사실을 이용하여 이차방정식을 풀어 보자.

예를 들어 이차방정식 $(x-3)(x-5)=0$에서

$$x-3=0 \text{ 또는 } x-5=0$$

이므로 주어진 이차방정식의 해는

$$x=3 \text{ 또는 } x=5$$

이다.

일반적으로 이차방정식 $(x-a)(x-b)=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=b$이다.

2-2 이차방정식의 풀이

소단원 지도 목표

① 두 인수의 곱이 0이 되는 등식의 성질을 이해하게 한다.
② 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
③ 중근의 뜻을 알게 한다.
④ 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
⑤ 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.
⑥ 근의 공식을 이해하고, 이를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 두 수 또는 두 식 a, b에 대하여 '$ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$' 이고 '$a=0$ 또는 $b=0$이면 $ab=0$' 임을 알게 하고, 이로부터 '$ab=0$' 과 '$a=0$ 또는 $b=0$' 은 같은 뜻임을 이해하게 한다.

2. 이차방정식이 중근을 가질 때, 그 해는 하나로 나타내지만 서로 같은 두 개의 근임을 이해하게 한다.

3. 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 푸는 방법은 근의 공식을 유도하는 데 기초가 되므로 그 풀이 과정을 이해하여 근의 공식에 적용하고 비교하도록 지도한다.

4. 이차방정식은 해가 실수인 경우만 다룬다.

5. 이차방정식에서 자신의 풀이 방법을 설명할 수 있게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 중근(重根, multiple root)
• 근의 공식(quadratic formula)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 수의 곱이 0이면 두 수 중 적어도 하나는 0임을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있음을 알게 하려는 것이다.

1. $ab=0$이 되는 경우는
(1) $a=0$, $b=0$
(2) $a=0$, $b\neq0$
(3) $a\neq0$, $b=0$
즉, a와 b 중에서 적어도 하나는 0이어야 한다.
따라서 $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이다.

2. $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이므로
$(x+3)(x-2)=0$이면 $x+3=0$ 또는 $x-2=0$이다.
$\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

기/초/력 향상 문제

다음 이차방정식을 풀어라.

1 $(x+3)(x+4)=0$

2 $(x-5)(x-6)=0$

3 $(x+1)(x-5)=0$

4 $(x+3)(x-4)=0$

답 **1** $x=-3$ 또는 $x=-4$ **2** $x=5$ 또는 $x=6$
3 $x=-1$ 또는 $x=5$ **4** $x=-3$ 또는 $x=4$

1

목표| $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+2)(x-3)=0$에서

$x+2=0$ 또는 $x-3=0$

$\mathbf{x=-2}$ **또는** $\mathbf{x=3}$

(2) $x(x+6)=0$에서

$x=0$ 또는 $x+6=0$

$\mathbf{x=0}$ **또는** $\mathbf{x=-6}$

(3) $(x-4)(5x+1)=0$에서

$x-4=0$ 또는 $5x+1=0$

$\mathbf{x=4}$ **또는** $\mathbf{x=-\frac{1}{5}}$

(4) $4(3x-2)(x-8)=0$에서

$3x-2=0$ 또는 $x-8=0$

$\mathbf{x=\frac{2}{3}}$ **또는** $\mathbf{x=8}$

교과서 78 쪽

예제 1 이차방정식 $(x+4)(2x-1)=0$을 풀어라.

풀이 $(x+4)(2x-1)=0$에서 $x+4=0$ 또는 $2x-1=0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

답 $x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

문제 1 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x+2)(x-3)=0$ (2) $x(x+6)=0$

(3) $(x-4)(5x+1)=0$ (4) $4(3x-2)(x-8)=0$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변을 인수분해할 수 있는 경우에는 그 식을 인수분해하여 이차방정식을 풀 수 있다.

예제 2 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+2x-35=0$ (2) $x^2-36=0$

풀이 (1) $x^2+2x-35=0$에서 좌변을 인수분해하면 $(x+7)(x-5)=0$

$x+7=0$ 또는 $x-5=0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-7$ 또는 $x=5$

(2) $x^2-36=0$에서 좌변을 인수분해하면 $(x+6)(x-6)=0$

$x+6=0$ 또는 $x-6=0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-6$ 또는 $x=6$

답 (1) $x=-7$ 또는 $x=5$ (2) $x=-6$ 또는 $x=6$

문제 2 다음 이차방정식을 풀어라.

식을 정리하여 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 만들어 인수분해한다.

(1) $x^2-5x-14=0$ (2) $x^2+4x=5$

(3) $x(x+3)=10$ (4) $x^2+7x=5(x+3)$

2

목표| 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2-5x-14=0$에서 $(x+2)(x-7)=0$

$\mathbf{x=-2}$ **또는** $\mathbf{x=7}$

(2) $x^2+4x=5$에서 $x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$\mathbf{x=-5}$ **또는** $\mathbf{x=1}$

(3) $x(x+3)=10$에서 $x^2+3x=10$

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$\mathbf{x=-5}$ **또는** $\mathbf{x=2}$

(4) $x^2+7x=5(x+3)$에서 $x^2+7x=5x+15$

$x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\mathbf{x=-5}$ **또는** $\mathbf{x=3}$

지/도/자/료

$a\neq0$, $b\neq0$일 때, 일반적으로 $(x-a)(x-b)=0$ 꼴의 이차방정식의 해는 $x=a$ 또는 $x=b$임을 쉽게 생각하지만 간혹 $x(x-a)=0$ 꼴의 이차방정식의 해를 $x=a$로만 구하는 경우가 있다.

이는 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 때, $(x-a)(x-b)=0$ $(a\neq0,\ b\neq0)$의 꼴을 주로 접하고 또한 이 꼴에서 괄호 안의 일차식을 0이라고 하여 해를 구하는 것에 익숙하기 때문이다. 따라서 $x(x-a)$는 $x\times(x-a)$임을 강조하고 $x\times(x-a)=0$의 좌변은 x와 $x-a$의 두 식으로 인수분해한 것이므로 그 해를 $x=0$ 또는 $x=a$로 구할 수 있도록 지도한다.

교과서 79 쪽

중근이란 무엇인가?

이차방정식 $x^2-6x+9=0$의 좌변을 인수분해하면

$$(x-3)^2=0$$

이다. 즉,

$$(x-3)(x-3)=0$$

이므로 주어진 이차방정식의 근은

$$x=3 \text{ 또는 } x=3$$

이다. 여기서 두 근은 서로 같으므로 이차방정식 $x^2-6x+9=0$의 근은

$$x=3$$

이다.

이와 같이 이차방정식의 두 근이 중복되어 있을 때, 이 근을 주어진 이차방정식의 **중근**이라고 한다.

예 제 3 이차방정식 $x^2+7x-1=3x-5$를 풀어라.

● 풀이 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하면

$$x^2+7x-1-3x+5=0$$
$$x^2+4x+4=0$$
$$(x+2)^2=0$$

따라서 주어진 이차방정식의 해는

$$x=-2(\text{중근})$$

답 ● $x=-2$(중근)

문제 3 다음 이차방정식을 풀고, 중근을 가지는 것을 모두 찾아라.

(1) $x^2-14x+49=0$　(2) $x^2-3x+9=5x-7$

(3) $(x-2)^2=x$　(4) $2(3-2x)=2-x^2$

(완전제곱식)=0의 꼴로 나타내어지면 그 이차방정식은 중근을 가진다.

지/도/자/료

1. 주어진 이차방정식을 (이차식)=0의 꼴로 정리하여 좌변을 인수분해하였을 때

(완전제곱식)=0

의 꼴이 되는 이차방정식은 중근을 갖는다.

즉, 이차방정식 $(ax+b)^2=0$은

$(ax+b)(ax+b)=0$과 같으므로

$ax+b=0$ 또는 $ax+b=0$

$x=-\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=-\dfrac{b}{a}$

따라서 두 근이 서로 같으므로 이차방정식 $(ax+b)^2=0$의 근은

$$x=-\frac{b}{a}(\text{중근})$$

2. 중근을 가지는 이차방정식의 근은 한 개라고 잘못 생각하는 경우가 있다.

즉, $(x-3)^2=0$의 해를 $x=3$의 한 개로 생각하는 경우이다.

그러나 일반적으로 이차방정식의 근은 두 개이고, 중근은 서로 같은 두 근임을 알 수 있도록 지도한다.

3

목표| 중근의 뜻을 알고, 중근을 가지는 이차방정식을 찾을 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2-14x+49=0$에서 $(x-7)^2=0$

$x=7$(중근)

(2) $x^2-3x+9=5x-7$에서 $x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

$x=4$(중근)

(3) $(x-2)^2=x$에서 $x^2-4x+4=x$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$

(4) $2(3-2x)=2-x^2$에서 $6-4x=2-x^2$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$(중근)

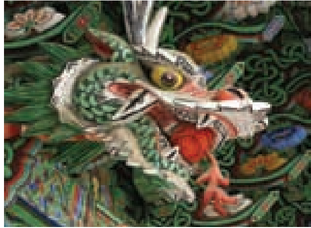
따라서 중근을 가지는 것은 (1), (2), (4)이다.

읽/기/자/료

노르웨이의 수학자 아벨(Abel, N. H. : 1802~1829)은 1823년 크리스티아니아 대학을 졸업하고, 1825년 베를린으로 유학을 간 후 1827년 귀국하여 타원함수론, 적분방정식과 오차방정식의 대수적 불능 문제를 연구하고, 대수함수론의 기본 정리인 '아벨의 정리'를 발표하였다. 그러나 그의 연구는 살아서는 인정을 받지 못하다가 죽은 후에 그 가치가 인정되어, 대수학의 발전에 큰 영향을 주었다. 그의 이름은 '아벨 적분', '아벨의 정리', '아벨 방정식', '아벨 군' 등 오늘날 사용되고 있는 많은 수학 용어 속에 살아 있어, 수학계 불후의 인물로 기억되고 있다.

창의력 기르기 참/고/자/료

전통 문양에는 상징이나 바람이 담겨 있는 경우가 많이 있다. 용은 왕의 권위를 상징하고, 연꽃은 속세를 떠난 깨끗함을 상징하며 도깨비는 악귀를 물리치는 의미로 그려졌다.



교과서 80 쪽

제곱근을 이용하여 이차방정식을 어떻게 푸는가?

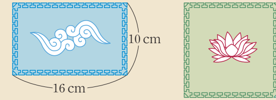
창의력 기르기

전통 문양

우리나라의 옛날 건축물이나 생활용품에서 용 문양이나 연꽃 문양, 도깨비 문양 등과 같이 다양하고 아름다운 전통 문양을 발견할 수 있는데, 이러한 문양은 오늘날에도 다양하게 활용되고 있다.

탐구 활동

다음 그림과 같이 문양을 그려 넣은 직사각형 모양과 정사각형 모양의 타일이 있다. 두 타일의 넓이가 같을 때, 물음에 답하여 보자.



1 직사각형 모양의 타일의 넓이를 구하여 보자.

2 정사각형 모양의 타일의 한 변의 길이를 x cm로 놓고, 넓이에 관한 방정식을 세운 후 x의 값을 구하여 보자.

제곱근을 이용하여 이차방정식 $x^2-5=0$을 풀어 보자.

이차방정식 $x^2-5=0$에서 -5를 우변으로 이항하면

$$x^2=5$$

이므로 이 식을 참이 되게 하는 x의 값은 5의 제곱근이다.

따라서 이차방정식 $x^2-5=0$의 근은

$$x=\sqrt{5} \text{ 또는 } x=-\sqrt{5}$$

이다.

$x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$를 간단히 $x=\pm\sqrt{5}$로 나타내기도 한다.

일반적으로 다음이 성립한다.

> $a>0$일 때, 이차방정식 $x^2=a$의 근은
> $x=\sqrt{a}$ 또는 $x=-\sqrt{a}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 타일의 넓이가 같음을 이용하여 이차방정식을 세우고, x의 값을 구해 봄으로써 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있음을 알게 하려는 것이다.

1. $16\times10=\mathbf{160(cm^2)}$

2. 정사각형 모양의 타일의 한 변의 길이를 x cm로 놓으면 타일의 넓이는 x^2 cm^{2}이고, 두 타일의 넓이가 같으므로 $\mathbf{x^2=160}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{160}=\mathbf{4\sqrt{10}}$

지/도/자/료

중학교 교육과정에서 인수분해는 유리수의 범위에서 다루므로 이차방정식 $x^2=5$를

$$x^2-5=0$$
$$x^2-(\sqrt{5})^2=0$$
$$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$$
$$x=-\sqrt{5} \text{ 또는 } x=\sqrt{5}$$

와 같이 인수분해하여 푸는 것보다는 제곱근을 이용하여 풀도록 지도한다.

교과서 81 쪽

예 제 4 이차방정식 $4x^2-7=0$을 풀어라.

● 풀이 $4x^2-7=0$에서 -7을 우변으로 이항하면

$$4x^2=7$$

양변을 4로 나누면

$$x^2=\frac{7}{4}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

답 ● $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

문제 4 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $9x^2-2=0$　　(2) $2x^2-10=0$

(3) $16x^2=4$　　(4) $27x^2=9$

예 제 5 제곱근을 이용하여 이차방정식 $(x-1)^2=5$를 풀어라.

$x=1\pm\sqrt{5}$는 $x=1+\sqrt{5}$ 또는 $x=1-\sqrt{5}$를 나타낸다.

● 풀이 $(x-1)^2=5$에서 $x-1$은 5의 제곱근이므로

$$x-1=\pm\sqrt{5}$$

좌변의 -1을 우변으로 이항하면

$$x=1\pm\sqrt{5}$$

답 ● $x=1\pm\sqrt{5}$

문제 5 제곱근을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(x-3)^2=25$　　(2) $(x+1)^2=12$

(3) $4(x+5)^2-8=0$　　(4) $9(x-2)^2=7$

5

목표 | 제곱근을 이용하여 $a(x+p)^2=q$ $(a\neq0,\ aq>0)$의 꼴인 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이 | (1) $(x-3)^2=25$에서　$x-3=\pm5$

$x=3\pm5$

$x=8$ 또는 $x=-2$

(2) $(x+1)^2=12$에서　$x+1=\pm2\sqrt{3}$

$x=-1\pm2\sqrt{3}$

(3) $4(x+5)^2-8=0$에서　$4(x+5)^2=8$

$(x+5)^2=2$, $x+5=\pm\sqrt{2}$

$x=-5\pm\sqrt{2}$

(4) $9(x-2)^2=7$에서　$(x-2)^2=\frac{7}{9}$

$x-2=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

$x=2\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

4

목표 | 제곱근을 이용하여 $ax^2=q$ $(a\neq0,\ aq>0)$의 꼴인 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이 | (1) $9x^2-2=0$에서　$9x^2=2$, $x^2=\frac{2}{9}$

$x=\pm\sqrt{\frac{2}{9}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

(2) $2x^2-10=0$에서　$2x^2=10$, $x^2=5$

$x=\pm\sqrt{5}$

(3) $16x^2=4$에서　$x^2=\frac{1}{4}$

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$

(4) $27x^2=9$에서　$x^2=\frac{1}{3}$

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

지/도/자/료

제곱근을 이용하여 이차방정식을 푸는 방법을 다음과 같이 난이도를 단계적으로 구분하여 지도할 수 있다.

1단계　$q>0$일 때,

$x^2=q$

$x=\pm\sqrt{q}$

2단계　$a\neq0$, $aq>0$일 때,

$ax^2=q$, $x^2=\frac{q}{a}$

$x=\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

3단계　$q>0$일 때,

$(x+p)^2=q$, $x+p=\pm\sqrt{q}$

$x=-p\pm\sqrt{q}$

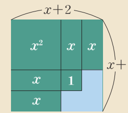
4단계　$a\neq0$, $aq>0$일 때,

$a(x+p)^2=q$, $(x+p)^2=\frac{q}{a}$, $x+p=\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

$x=-p\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 세 종류의 대수 타일로 정사각형 모양의 바닥을 겹치지 않게 모두 덮는 과정을 통하여 완전제곱식을 만드는 과정을 이해하고 완전제곱식을 만들 수 있게 하려는 것이다.

1.  ⇨ 3개

2. 1에서와 같이 대수 타일 을 3개 더 덮으면 타일이 덮인 부분은 한 변의 길이가 $x+2$인 정사각형이 되므로 정사각형의 넓이는 $x^2+4x+1+\boxed{3}=(x+2)^2$

교과서 82 쪽

완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 $x+2$인 정사각형 모양의 바닥을 넓이가 x^2, x, 1인 대수 타일로 덮으려고 한다. 물음에 답하여 보자.

1 정사각형을 모두 덮으려면 대수 타일 1 은 몇 개가 더 필요한가?

2 1의 결과를 다음과 같이 식으로 나타내었을 때, □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$x^2+4x+1+\square=(x+2)^2$$

다항식의 제곱으로 된 식이나 이 식에 상수를 곱한 식을 완전제곱식이라고 한다.

완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $x^2+6x+1=0$을 풀어 보자.

이차방정식 $x^2+6x+1=0$에서 1을 우변으로 이항하면

$$x^2+6x=-1$$

이다.

이제 좌변을 완전제곱식으로 만들기 위하여 x의 계수 6의 $\frac{1}{2}$인 3을 제곱한 값 9를 양변에 더하면

$$x^2+6x+9=-1+9$$

이므로 좌변을 완전제곱식으로 나타내면

$$(x+3)^2=8$$

이다. 따라서 제곱근을 이용하면

$$x+3=\pm2\sqrt{2}$$

이므로 구하는 이차방정식의 근은

$$x=-3\pm2\sqrt{2}$$

이다.

지/도/자/료

이차방정식을 풀 때에는 먼저 주어진 방정식을 유리수의 범위에서 인수분해하여 풀 수 있는지 확인하고, 인수분해를 이용할 것인지 완전제곱식을 이용할 것인지를 판단하도록 지도한다.

• 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 좌변은 인수분해가 되므로 다음과 같이 인수분해를 이용하여 푸는 것이 편리하다.

$x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

• 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 좌변은 유리수의 범위에서 인수분해가 되지 않으므로 완전제곱식을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

$x^2-4x-2=0$

$x^2-4x=2$

$x^2-4x+4=2+4$

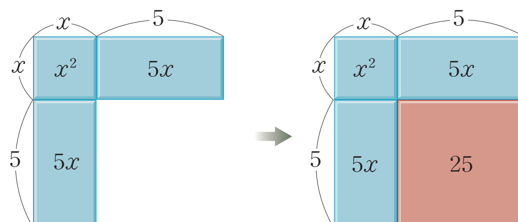
$(x-2)^2=6$

$x-2=\pm\sqrt{6}$

$x=2\pm\sqrt{6}$

읽/기/자/료 알콰리즈미의 이차방정식 풀이

이차방정식에 대한 해법을 체계적으로 연구한 사람은 아라비아의 수학자 알콰리즈미(Al−Khwarizmi: ?780∼?850)이다. 그는 이차방정식 $x^2+10x=56$의 해를 다음과 같은 방법으로 구하였다.



$$x^2+10x+25=56+25$$
$$(x+5)^2=81$$
$$x+5=9$$
$$x=4$$

한편 알콰리즈미는 음수의 존재를 부정하였기 때문에 음수의 근은 인정하지 않았다.

교과서 83 쪽

문제 6 다음은 주어진 이차방정식을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 만드는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $x^2+4x=2$

$x^2+4x+\square=2+\square$

$(x+\square)^2=\square$

(2) $x^2-x=1$

$x^2-x+\square=1+\square$

$(x-\square)^2=\square$

예제 6 완전제곱식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-8x+6=0$　　(2) $x^2+3x+1=0$

좌변을 완전제곱식으로 만든다.

풀이 (1) $x^2-8x+6=0$
$x^2-8x=-6$ ← 상수항을 우변으로 이항한다.
$x^2-8x+16=-6+16$ ← $\left(-8\times\frac{1}{2}\right)^2=16$을 양변에 더한다.
$(x-4)^2=10$ ← 좌변을 완전제곱식으로 고친다.
$x-4=\pm\sqrt{10}$ ← 제곱근을 구한다.
$x=4\pm\sqrt{10}$ ← 이차방정식의 근을 구한다.

(2) $x^2+3x+1=0$
$x^2+3x=-1$ ← 상수항을 우변으로 이항한다.
$x^2+3x+\frac{9}{4}=-1+\frac{9}{4}$ ← $\left(3\times\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$를 양변에 더한다.
$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ ← 좌변을 완전제곱식으로 고친다.
$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ ← 제곱근을 구한다.
$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ ← 이차방정식의 근을 구한다.

답 (1) $x=4\pm\sqrt{10}$　(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

문제 7 완전제곱식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+4x-3=0$　　(2) $x^2-6x+1=0$

(3) $x^2-10x+20=0$　　(4) $x^2+x-3=0$

6

목표| 이차방정식을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 고칠 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+4x=2$의 양변에 $\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$를 더하면

$x^2+4x+\boxed{4}=2+\boxed{4}$

$(x+\boxed{2})^2=\boxed{6}$

(2) $x^2-x=1$의 양변에 $\left(\frac{-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$을 더하면

$x^2-x+\boxed{\frac{1}{4}}=1+\boxed{\frac{1}{4}}$

$\left(x-\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2=\boxed{\frac{5}{4}}$

7

목표| 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+4x-3=0$에서 $x^2+4x=3$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$를 양변에 더하면

$x^2+4x+4=3+4$

$(x+2)^2=7$, $x+2=\pm\sqrt{7}$

$\boldsymbol{x=-2\pm\sqrt{7}}$

(2) $x^2-6x+1=0$에서 $x^2-6x=-1$

$\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$를 양변에 더하면

$x^2-6x+9=-1+9$

$(x-3)^2=8$, $x-3=\pm2\sqrt{2}$

$\boldsymbol{x=3\pm2\sqrt{2}}$

(3) $x^2-10x+20=0$에서 $x^2-10x=-20$

$\left(\frac{-10}{2}\right)^2=25$를 양변에 더하면

$x^2-10x+25=-20+25$

$(x-5)^2=5$, $x-5=\pm\sqrt{5}$

$\boldsymbol{x=5\pm\sqrt{5}}$

(4) $x^2+x-3=0$에서 $x^2+x=3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$을 양변에 더하면

$x^2+x+\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$, $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\boldsymbol{x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}}$

기/초/력 향상 문제

다음 이차방정식을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타내어라.

1 $x^2-2x-5=0$

2 $x^2+4x+1=0$

3 $2x^2-8x+5=0$

4 $3x^2+4x-1=0$

답 **1** $(x-1)^2=6$　**2** $(x+2)^2=3$　**3** $(x-2)^2=\frac{3}{2}$　**4** $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 이차방정식을 완전제곱식으로 변형하는 과정을 생각해 봄으로써 근의 공식을 유도하는 과정을 이해하게 하려는 것이다.

1. 이차방정식 $2x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2의 계수 2로 나누면

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

2. $x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$에서 상수항을 우변으로 이항하면

$$x^2+\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$$

양변에 $\left(\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{16}$를 더하면

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=-\frac{1}{2}+\frac{25}{16}$$

좌변을 완전제곱식으로 나타내고, 우변을 정리하면

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$$

교과서 84 쪽

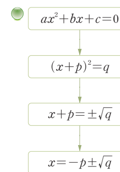
이차방정식의 근의 공식이란 무엇인가?

탐 구 활 동 이차방정식 $2x^2+5x+1=0$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1 방정식의 양변을 적당한 수로 나누어 x^2의 계수가 1이 되도록 고쳐 보자.

2 1에서 고친 방정식을 $(x+\square)^2=$(수)의 꼴로 고치는 방법을 말하여 보자.

❶ [illegible]정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 해는 완전제곱식을 이용하여 다음과 같[illegible] 수 있다.



❶ 양변을 x^2의 계수 a로 나눈다. $\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

❷ 상수항을 우변으로 이항한다. $\quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

❸ x의 계수 $\frac{b}{a}$의 $\frac{1}{2}$의 제곱인 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$을 양변에 더하여 좌변을 완전제곱식으로 고친다.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

❹ 제곱근을 구한다. (단, $b^2-4ac\geq0$) $\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

❺ 이차방정식의 근을 구한다.

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이상에서 다음과 같은 이차방정식의 **근의 공식**을 얻을 수 있다.

근의 공식에서 $b^2-4ac<0$ 이면 제곱근을 구할 수 없으므로 근이 없게 된다.

❷ [illegible]식의 근의 공식

[illegible]한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (\text{단, } b^2-4ac\geq0)$$

본문 해설

❶ 문자를 계수로 가지는 이차방정식에서 근의 공식을 유도하는 것은 복잡하고 어렵다. 따라서 계수가 정수인 이차방정식을 완전제곱식으로 고쳐서 푸는 방법과 서로 비교하면서 식을 변형하여 근의 공식을 유도해 보고 그 과정을 이해하는 것이 쉽다.

❷ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$에서 $b^2-4ac\geq0$인 경우에만 근의 공식을 이용할 수 있음에 유의한다.

• $b^2-4ac>0$이면

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 또는 } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

인 두 개의 근을 가진다.

• $b^2-4ac=0$이면

$$x=\frac{-b\pm0}{2a}=-\frac{b}{2a}$$

인 중근을 가진다.

읽/기/자/료 근의 공식

근의 공식은 이차방정식을 푸는 만병통치약과 같다.

인수분해가 이차방정식을 푸는 데에 유용하긴 하지만 모든 다항식이 유리수의 범위에서 인수분해되지는 않는다. 반면 이차방정식의 근의 공식은 이차식이 인수분해되든 안 되든 상관없을 뿐만 아니라 근을 구하기 위해 식을 완전제곱식의 꼴로 어렵게 변형시킬 필요가 없다.

이런 이유 때문에 옛부터 사람들은 삼차방정식, 사차방정식, 오차방정식 등의 근의 공식을 찾으려고 많은 시간과 노력을 쏟았다.

예제 7 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2+2x-5=0$을 풀어라.

풀이 근의 공식에 $a=1$, $b=2$, $c=-5$를 대입하면

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{2}=-1\pm\sqrt{6}$$

답 $x=-1\pm\sqrt{6}$

문제 8 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+3x-5=0$ (2) $5x^2-8x+1=0$

예제 8 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{3}=0$을 풀어라.

계수가 분수나 소수인 이차방정식을 풀 때에는 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친 후 근의 공식을 이용하면 편리하다.

풀이 $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{3}=0$의 양변에 6을 곱하면

$$3x^2+6x-2=0$$

근의 공식에 $a=3$, $b=6$, $c=-2$를 대입하면

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3}=\frac{-6\pm\sqrt{60}}{6}=\frac{-6\pm2\sqrt{15}}{6}=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{3}$$

답 $x=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{3}$

문제 9 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$ (2) $0.3x^2-x=-0.6$

8

목표| 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) 근의 공식에 $a=1$, $b=3$, $c=-5$를 대입하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+20}}{2}=\mathbf{\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}}$$

(2) 근의 공식에 $a=5$, $b=-8$, $c=1$을 대입하면

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times5\times1}}{2\times5}=\frac{8\pm\sqrt{64-20}}{10}=\frac{8\pm\sqrt{44}}{10}=\frac{8\pm2\sqrt{11}}{10}=\mathbf{\frac{4\pm\sqrt{11}}{5}}$$

9

목표| 근의 공식을 이용하여 계수가 분수나 소수인 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$에서

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}=0$$

양변에 4를 곱하면 $4x^2+2x-3=0$

근의 공식에 $a=4$, $b=2$, $c=-3$을 대입하면

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times4\times(-3)}}{2\times4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{52}}{8}=\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{8}=\mathbf{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}}$$

(2) $0.3x^2-x=-0.6$에서 $0.3x^2-x+0.6=0$

양변에 10을 곱하면 $3x^2-10x+6=0$

근의 공식에 $a=3$, $b=-10$, $c=6$을 대입하면

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times3\times6}}{2\times3}=\frac{10\pm\sqrt{100-72}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{10\pm2\sqrt{7}}{6}=\mathbf{\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}}$$

지/도/자/료

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 일차항의 계수 b가 짝수인 경우에는 $b=2b'$으로 놓고 근의 공식을 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

이와 같이 일차항의 계수가 짝수일 때 위와 같은 공식을 사용하면 매번 약분하는 번거로움을 피할 수 있다.

2-3 이차방정식의 활용

소단원 지도 목표

① 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차방정식의 활용 문제는 계산 과정이 지나치게 복잡한 경우는 피하고, 실생활과 관련된 간단한 문제를 다룬다.
2. 문제의 해결에 앞서 그 문제가 가지고 있는 의미를 이해할 수 있게 한다.
3. 이차방정식의 활용 문제는 그 문제의 답보다 풀이 과정에 소홀함이 없게 하여 다양한 상황에서 문제 해결력을 높이도록 한다.
4. 구한 해 중에서 문제의 의도에 맞는 것만을 답으로 택할 수 있게 한다.

교과서 86 쪽

2-3 이차방정식의 활용

● 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

이차방정식을 어떻게 활용하는가?

창의력 기르기 거북선

거북선은 고려 시대에 발달한 화포 기술과 조선 시대에 새로 완성된 판옥선 등을 더욱 발전시켜 만든 바다의 탱크라고 할 수 있다. 당시 해전은 배를 적의 전함에 접근시켜 수군이 그 안으로 뛰어들어 배를 장악하는 방식이었는데, 거북선의 윗부분은 송곳 같은 침이 촘촘히 박혀 있어서 적들이 배로 들어올 수가 없었다.

탐구 활동 오른쪽 그림과 같은 거북선 모형을 만들기 위하여 압정을 준비하였다. 다음 물음에 답하여 보자.

1 압정 48개를 가로로 x줄, 세로로 $(x-2)$줄이 되도록 배열하려고 할 때, 이것을 방정식으로 나타내어 보자.

2 1의 방정식을 풀어서 얻은 값 중에서 문제의 뜻에 맞는 것은 어느 것인가?

일차방정식에서와 같이 이차방정식을 활용하면 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

예를 들어 연속한 두 홀수의 제곱의 합이 34일 때, 이 두 홀수를 구하는 문제를 다음과 같은 순서로 이차방정식을 세워서 풀어 보자.

먼저 작은 홀수를 x로 놓는다. ← ❶ 구하고자 하는 것을 미지수 x로 놓는다.

연속한 두 홀수는 x, $x+2$이고, 이 두 홀수의 제곱의 합이 34이므로

$$x^2+(x+2)^2=34$$

이다. ← ❷ 문제의 뜻에 알맞게 이차방정식을 세운다.

창의력 기르기 참/고/자/료

임진왜란 당시 일본 전함의 밑바닥은 'V' 자형으로 원양 항해에는 유리하였으나 전투시 급히 방향을 바꾸기가 힘들었다. 반면에 거북선은 크고 견고하였으며 밑바닥이 'U' 자형이어서 기동력이 뛰어났다. 거북선은 바닷물 속에서 녹이 슬지 않는 나무 못을 사용하여 충격에 강하고, 두께가 12 cm 이상의 강도 높은 소나무로 만들어졌다. 이와 같은 장점 때문에 거북선은 좌충우돌하며 상대방의 전함과 부딪쳐 침몰시키는 저돌적인 전술을 사용할 수 있었다.
거북선에 대한 보다 자세한 자료는 거북선과 이순신 홈페이지(http://www.gbsun.com)에서 찾아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이차방정식을 활용하여 여러 가지 실생활 문제를 해결할 수 있음을 알게 하려는 것이다.

1. $x(x-2)=48$
2. $x(x-2)=48$에서
   $x^2-2x=48$
   $x^2-2x-48=0$
   $(x+6)(x-8)=0$
   $x=-6$ 또는 $x=8$
   그런데 $x>0$이어야 하므로 문제의 뜻에 맞는 것은 $x=8$이다.

교과서 87 쪽

즉,

$$2x^2+4x-30=0$$

이므로 이 방정식을 풀면

$$x=-5 \text{ 또는 } x=3$$

이다.

이때 x는 홀수이므로 $x=3$이다.

따라서 연속한 두 홀수는 3, 5이다.

한편 $3^2+5^2=34$이므로 연속한 두 홀수 3, 5는 문제의 뜻에 맞는다.

$2x^2+4x-30=0$에서
$x^2+2x-15=0$
$(x+5)(x-3)=0$
$x=-5$ 또는 $x=3$

③ 이차방정식을 푼다.
④ 답을 구한다.
⑤ 구한 답이 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

일반적으로 이차방정식을 활용하여 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 푼다.

이차방정식을 활용한 문제 해결 순서

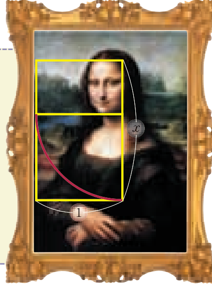
① 문제의 뜻을 파악하고, 구하고자 하는 것을 미지수 x로 놓는다.
② 문제의 뜻에 알맞게 이차방정식을 세운다.
③ 이차방정식을 푼다.
④ 이차방정식의 해로부터 문제의 뜻에 맞는 답을 구한다.
⑤ 구한 답이 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

문제 | 다음 내용에서 수학 책의 몇 쪽을 펼쳐야 읽을거리를 볼 수 있는지 구하여라.

"수학 책을 펼쳤을 때, 두 면의 쪽수의 곱이 156인 곳에 읽을거리가 있어."

창의 UP

가장 안정적이고 이상적인 비로 알려진 황금비는 레오나르도 다빈치의 작품인 모나리자에서도 찾아볼 수 있다. 오른쪽 그림의 직사각형에서 가장 크게 정사각형을 도려내고 남은 부분이 처음 직사각형과 닮은꼴이 되어 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 황금비가 된다. 이를 이용하여 x의 값을 구하는 방법을 설명하여라.



목표| 이차방정식을 활용하여 수에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 펼친 두 면의 쪽수는 연속한 두 자연수이므로 x, $x+1$이라고 하면

$x(x+1)=156$

$x^2+x=156$

$x^2+x-156=0$

$(x+13)(x-12)=0$

$x=-13$ 또는 $x=12$

x는 자연수이므로 $x=12$

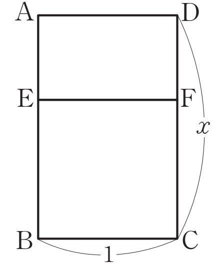
따라서 두 면의 쪽수는 **12쪽**과 **13쪽**이다.

한편 $12\times13=156$이므로 읽을거리가 있는 12쪽과 13쪽은 문제의 뜻에 맞는다.

창의 UP

|출제 의도| 생활 주변에서 접할 수 있는 황금비를 이용하여 이차방정식을 만들고 풀어 봄으로써 이차방정식을 실생활에 활용할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 사각형 BCFE가 정사각형이 되도록 점 E와 점 F를 표시하면 직사각형 ABCD와 직사각형 DAEF는 닮은 도형이다.



$\overline{DC}=x$, $\overline{BC}=1$, $\overline{FE}=1$, $\overline{AE}=x-1$이므로 닮은 두 직사각형에서 가로의 길이와 세로의 길이를 이용하여 비례식으로 나타내면

$\overline{DC} : \overline{BC}=\overline{FE} : \overline{AE}$

$x : 1=1 : (x-1)$

$x(x-1)=1$, $x^2-x-1=0$

근의 공식에 의하여 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

읽/기/자/료 가장 조화로운 비 – 황금비

황금비는 약 1 : 1.618이며 그림을 그리거나 조각 작품, 건축물 등을 만들 때 안정감 있고 균형 잡힌 비로 많이 이용되었다.

- 밀로의 비너스
  이 조각상은 신체 각 부분의 비율이 정확히 황금비를 이루고 있어 당시의 이상적인 아름다움을 반영하고 있다.
- 이집트의 피라미드
  피라미드의 밑면은 정사각형, 옆면은 이등변삼각형으로 이루어져 있는데, 옆면의 높이와 밑면의 한 변의 길이의 반은 황금비를 이룬다.
- 파르테논 신전
  각 부분이 황금비를 이루도록 안정적으로 설계되어 고대 그리스의 아름다움을 상징적으로 나타내고 있다.

교과서 88 쪽

예 제 1 지면에서 초속 34.3 m로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이가 $(34.3t-4.9t^2)$ m일 때, 이 물체가 처음으로 49 m의 높이에 이르는 시간은 몇 초 후인지 구하여라.

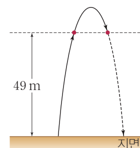
● 풀이 쏘아 올린 지 t초 후의 높이가 49 m라고 하면

$$34.3t-4.9t^2=49$$

이므로 이 식을 정리하여 풀면

$$-49t^2+343t-490=0$$
$$t^2-7t+10=0$$
$$(t-2)(t-5)=0$$
$$t=2 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 이 물체의 높이가 49 m인 순간은 물체를 쏘아 올린 지 2초 후와 5초 후이므로 처음으로 49 m의 높이에 이르는 시간은 2초 후이다.



쏘아 올린 물체의 2초 후의 높이는 $34.3\times2-4.9\times2^2=49(\text{m})$ 이므로 문제의 뜻에 맞는다.

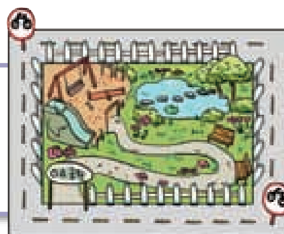
답 ● 2초 후

문제 2 지면에서 초속 49 m로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이가 $(49t-4.9t^2)$ m일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 이 물체의 높이가 102.9 m인 순간은 물체를 쏘아 올린 지 몇 초 후인가?
(2) 이 물체가 지면으로 떨어지는 순간은 물체를 쏘아 올린 지 몇 초 후인가?

발전 **문제 3** 지면으로부터 높이가 2500 m인 어느 화산이 폭발하여 초속 150 m로 용암이 분출되었다. 분출물의 t초 후의 높이가 $(-5t^2+150t+2500)$ m일 때, 분출물의 높이가 3500 m 이상인 것은 몇 초 동안인지 구하여라.

문제해결 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 세로의 길이보다 12 m만큼 긴 직사각형 모양의 공원의 주위에 폭이 6 m인 자전거 도로를 만들었다. 공원의 넓이와 자전거 도로의 넓이가 같을 때, 공원의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구하여 보자.



2

목표| 이차방정식을 활용하여 높이에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) 물체를 쏘아 올린 지 t초 후의 높이가 102.9 m라고 하면

$49t-4.9t^2=102.9$, $49t^2-490t+1029=0$

$t^2-10t+21=0$, $(t-3)(t-7)=0$

$t=3$ 또는 $t=7$

따라서 이 물체의 높이가 102.9 m인 순간은 쏘아 올린 지 **3초 후**와 **7초 후**이다.

한편 쏘아 올린 물체의 3초 후와 7초 후의 높이는 각각

$49\times3-4.9\times3^2=147-44.1=102.9(\text{m})$

$49\times7-4.9\times7^2=343-240.1=102.9(\text{m})$

이므로 문제의 뜻에 맞는다.

(2) 물체가 지면으로 떨어지면 높이가 0 m이므로

$49t-4.9t^2=0$, $49t^2-490t=0$

$t^2-10t=0$, $t(t-10)=0$

$t=0$ 또는 $t=10$

따라서 이 물체가 지면으로 떨어지는 순간은 쏘아 올린 지 **10초 후**이다.

한편 쏘아 올린 물체의 10초 후의 높이는

$49\times10-4.9\times10^2=490-490=0(\text{m})$

이므로 문제의 뜻에 맞는다.

3

목표| 이차방정식을 활용하여 높이에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

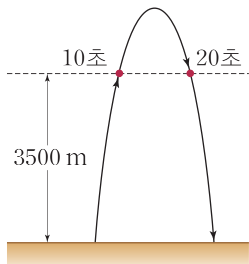
풀이| 분출물의 t초 후의 높이가 3500 m라고 하면

$-5t^2+150t+2500=3500$

$t^2-30t+200=0$

$(t-10)(t-20)=0$

$t=10$ 또는 $t=20$



따라서 분출물의 높이가 3500 m 이상인 것은 10초부터 20초까지이므로 **10초 동안**이다.

한편 분출물의 10초 후와 20초 후의 높이는 각각

$-5\times10^2+150\times10+2500=3500(\text{m})$

$-5\times20^2+150\times20+2500=3500(\text{m})$

이므로 문제의 뜻에 맞는다.

문/제/해/결

|출제 의도| 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있음을 알게 하기 위한 문제이다.

풀이| 공원의 세로의 길이를 x m라고 하면 가로의 길이는 $(x+12)$ m이다.

(공원의 넓이)$=x(x+12)=x^2+12x(\text{m}^2)$

(자전거 도로의 넓이)$=(x+12+12)(x+12)-(x^2+12x)$
$=24x+288(\text{m}^2)$

$x^2+12x=24x+288$이므로 $(x+12)(x-24)=0$

$x=-12$ 또는 $x=24$

$x>0$이므로 $x=24$

따라서 공원의 세로의 길이는 **24 m**이고 가로의 길이는 **36 m**이다.

한편 공원의 세로와 가로의 길이가 각각 24 m, 36 m일 때, 공원의 넓이 $24\times36=864(\text{m}^2)$와 자전거 도로의 넓이 $36\times48-24\times36=864(\text{m}^2)$는 같으므로 문제의 뜻에 맞는다.

교과서 89 쪽

중/단/원 기초

x에 관한 이차방정식은 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)과 같이 나타낼 수 있다.

1 다음 중에서 이차방정식을 모두 찾아라.

㉠ $x^2+3x-4=0$　㉡ $4x=7+x$
㉢ $2x^2+x=x$　㉣ $x(x-5)=x^2$

2 다음 중에서 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해인 것을 모두 찾아라.

㉠ $x^2-2x-8=0$ [4]　㉡ $x^2-5=0$ [5]
㉢ $2x^2-x+1=0$ [1]　㉣ $x(x-3)=0$ [3]

3 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+4x+3=0$　(2) $x^2-4=0$
(3) $x^2-6x+9=0$　(4) $(x+2)^2=9$

x에 관한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근은 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)

4 다음은 이차방정식 $x^2-5x+2=0$을 푸는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

근의 공식에 $a=1$, $b=$□, $c=$□를 대입하면

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{\square-4\times\square\times\square}}{2\times1}$$

따라서 $x=$□이다.

5 n각형의 대각선의 총수는 $\frac{n(n-3)}{2}$개이다. 이때 대각선의 총수가 35개인 다각형을 이차방정식을 이용하여 구하여라.

중/단/원 기초

1

목표| 이차방정식의 뜻을 알고, 이차방정식을 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $x^2+3x-4=0$ ⇨ 이차방정식
㉡ $4x=7+x$에서　$3x-7=0$ ⇨ 일차방정식
㉢ $2x^2+x=x$에서　$2x^2=0$ ⇨ 이차방정식
㉣ $x(x-5)=x^2$에서　$-5x=0$ ⇨ 일차방정식
따라서 이차방정식인 것은 ㉠, ㉢이다.

2

목표| [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해인지 판별할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $x=4$를 $x^2-2x-8=0$에 대입하면
$4^2-2\times4-8=0$이 성립한다.
따라서 $x=4$는 $x^2-2x-8=0$의 해이다.
㉣ $x=3$을 $x(x-3)=0$에 대입하면
$3\times(3-3)=0$이 성립한다.
따라서 $x=3$은 $x(x-3)=0$의 해이다.
따라서 해인 것은 ㉠, ㉣이다.

3

목표| 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+4x+3=0$에서
$(x+1)(x+3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=-3$
(2) $x^2-4=0$에서　$x^2=4$
$x=\pm2$
(3) $x^2-6x+9=0$에서　$(x-3)^2=0$
$x=3$(중근)
(4) $(x+2)^2=9$에서　$x+2=\pm3$
$x=1$ 또는 $x=-5$

4

목표| 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| 근의 공식에 $a=1$, $b=$ **-5**, $c=$ **2** 를 대입하면

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{\mathbf{(-5)^2}-4\times\mathbf{1}\times\mathbf{2}}}{2\times1}$$

따라서 $x=$ $\mathbf{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$ 이다.

5

목표| 이차방정식을 활용하여 수에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 대각선이 모두 35개인 다각형을 x각형이라고 하면
$\frac{x(x-3)}{2}=35$에서　$x^2-3x-70=0$
$(x+7)(x-10)=0$
$x=-7$ 또는 $x=10$
그런데 $x>0$이므로　$x=10$
따라서 대각선이 모두 35개인 다각형은 **십각형**이다.

중/단/원 기본

1

목표| 이차방정식의 한 해를 알 때, 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+ax-6=0$에 $x=-2$를 대입하면
$(-2)^2+a\times(-2)-6=0$
$-2a-2=0$, $-2a=2$
$\mathbf{a=-1}$

2

목표| 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $2x^2-x-3=0$에서
$(x+1)(2x-3)=0$
$\mathbf{x=-1}$ **또는** $\mathbf{x=\frac{3}{2}}$

(2) $x^2-6x=5-2x$에서 $x^2-4x-5=0$
$(x+1)(x-5)=0$
$\mathbf{x=-1}$ **또는** $\mathbf{x=5}$

(3) $(2x+1)^2=8$에서 $2x+1=\pm2\sqrt{2}$
$\mathbf{x=\frac{-1\pm2\sqrt{2}}{2}}$

(4) $2x^2-2x=3$에서 $2x^2-2x-3=0$
근의 공식을 이용하면 $x=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{4}=\mathbf{\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}}$

(5) $\frac{1}{2}x^2=3x-2$에서 $x^2-6x+4=0$
근의 공식을 이용하면 $x=\frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2}=\mathbf{3\pm\sqrt{5}}$

(6) $0.3x^2+0.1=x$에서 $3x^2-10x+1=0$
근의 공식을 이용하면
$x=\frac{10\pm\sqrt{100-12}}{6}=\mathbf{\frac{5\pm\sqrt{22}}{3}}$

3

목표| 이차방정식이 중근을 가질 때, 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-8x+2a-3=0$이 중근을 가지므로
$2a-3=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=16$
$\mathbf{a=\frac{19}{2}}$

교과서 90 쪽

중 / 단 / 원 기본

이차방정식과 그 해

1 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 한 해가 $x=-2$일 때, a의 값을 구하여라.

이차방정식의 풀이

2 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $2x^2-x-3=0$
(2) $x^2-6x=5-2x$
(3) $(2x+1)^2=8$
(4) $2x^2-2x=3$
(5) $\frac{1}{2}x^2=3x-2$
(6) $0.3x^2+0.1=x$

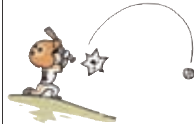
이차방정식의 풀이

3 이차방정식 $x^2-8x+2a-3=0$이 중근을 가질 때, a의 값을 구하여라.

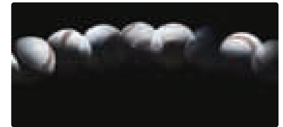
이차방정식의 활용

4 연속하는 세 자연수가 있다. 작은 두 수의 곱이 세 수의 합과 같을 때, 이 세 수를 구하여라.

이차방정식의 활용



5 야구 경기에서 어떤 타자가 친 야구공의 x초 후의 높이는 $(-4x^2+20x+1)$ m이다. 야구공의 높이가 25 m인 순간은 타자가 야구공을 친 지 몇 초 후인지 구하여라.



4

목표| 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라고 하면
$x(x-1)=(x-1)+x+(x+1)$이므로
$x^2-x=3x$, $x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$
$x=0$ 또는 $x=4$
x는 자연수이므로 $x=4$
따라서 연속하는 세 자연수는 **3, 4, 5**이다.

5

목표| 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 야구공의 t초 후의 높이가 25 m라고 하면
$-4t^2+20t+1=25$에서
$-4t^2+20t-24=0$, $t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$
$t=2$ 또는 $t=3$
따라서 야구공의 높이가 25 m인 순간은 타자가 야구공을 친 지 **2초 후**와 **3초 후**이다.

중/단/원 실력

수준별

1 이차방정식 $ax^2+bx-4=0$의 해가 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때, a, b의 값을 구하여라.

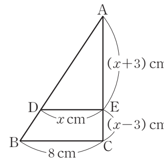
2 이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 근을 $x=p$ 또는 $x=q$라고 할 때, p^2+q^2의 값을 구하여라.

• 주어진 이차방정식에 두 근을 각각 대입하여 본다.

3 이차방정식 $3x^2+px-q=0$의 근이 $x=2$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$일 때, 이차방정식 $x^2+qx+p=0$의 두 근의 차를 구하여라.

• 닮음인 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 일정하다.

4 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{DE}/\!/\overline{BC}$이고 $\overline{DE}=x$ cm, $\overline{AE}=(x+3)$cm, $\overline{BC}=8$ cm, $\overline{EC}=(x-3)$cm 일 때, x의 값을 구하여라.



5 직사각형 모양의 농구 코트에서 세로의 길이는 가로의 길이의 $\frac{1}{2}$보다 1 m가 길다. 농구 코트의 넓이가 420 m²일 때, 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구하여라.

중/단/원 실력

1

목표| 이차방정식의 해의 의미를 알고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $ax^2+bx-4=0$에 $x=-1$을 대입하면

$a-b-4=0$ ······ ①

$ax^2+bx-4=0$에 $x=2$를 대입하면

$4a+2b-4=0$ ······ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=2,\ b=-2}$

2

목표| 이차방정식을 풀고 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+2x-6=0$의 근은

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+24}}{2}=-1\pm\sqrt{7}$

$p^2+q^2=(-1+\sqrt{7})^2+(-1-\sqrt{7})^2$

$=1-2\sqrt{7}+7+1+2\sqrt{7}+7=\mathbf{16}$

3

목표| 이차방정식의 해의 의미를 알고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $3x^2+px-q=0$에 $x=2$를 대입하면

$12+2p-q=0$ ······①

$3x^2+px-q=0$에 $x=-\dfrac{2}{3}$를 대입하면

$\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}p-q=0$ ······②

①, ②를 연립하여 풀면 $p=-4,\ q=4$

$x^2+qx+p=0$에서 $x^2+4x-4=0$의 근은

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+16}}{2}=-2\pm2\sqrt{2}$

따라서 구하는 두 근의 차는 $\mathbf{4\sqrt{2}}$

4

목표| 이차방정식을 활용하여 도형에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$이므로

$\overline{DE} : \overline{BC}=\overline{AE} : \overline{AC}$

$x : 8=x+3 : (x+3)+(x-3)$

$x : 8=x+3 : 2x,\ 2x^2=8(x+3)$

$2x^2-8x-24=0,\ x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x=-2$ 또는 $x=6$

$x>0$이므로 $\boldsymbol{x=6}$

5

목표| 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 농구 코트의 가로의 길이를 x m라고 하면 세로의 길이는 $\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$m이므로

$x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)=420,\ \dfrac{1}{2}x^2+x=420$

$x^2+2x-840=0,\ (x+30)(x-28)=0$

$x=-30$ 또는 $x=28$

$x>0$이므로 $x=28$

따라서 농구 코트의 가로의 길이는 **28 m**이고 세로의 길이는 $\dfrac{1}{2}\times28+1=\mathbf{15(m)}$이다.

수행 과제

수행 과제 의도

이 수행 과제는 이차방정식을 실생활에 활용하여 수에 관련된 문제를 해결함으로써 이차방정식에 관한 내용을 정리하기 위한 것이다.

과제 1 _예시

맨 아래 줄에 놓인 통나무의 개수는 1단계에는 1개, 2단계에는 2개, 3단계에는 3개, ⋯이므로 x단계에 맨 아래 줄에 놓인 통나무의 개수는 x개이다.
따라서 맨 아래 줄에 놓인 통나무의 개수가 25개이면 25단계이므로 전체 통나무의 개수는

$$\frac{25(25+1)}{2}=\frac{25\times26}{2}=\mathbf{325(개)}이다.$$

교과서 92 쪽

수행 과제

방정식으로 구한 통나무의 개수

다음 그림과 같이 통나무를 삼각형 모양으로 단계별로 쌓는다고 할 때, n단계에는 $\frac{n(n+1)}{2}$개의 통나무가 필요하다고 한다. 즉, 1단계에는 1개, 2단계에는 3개, 3단계에는 6개, ⋯의 통나무가 필요하다.

민영이네는 전통 목조 주택을 짓기 위해 통나무를 구입하여 삼각형 모양으로 단계별로 쌓았다. 민영이가 맨 아래 줄에 놓인 통나무를 25개, 전체 통나무를 300개로 세었다고 한다. 맨 아래 줄 또는 전체 통나무의 개수를 잘못 세었다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

과제 1 맨 아래 줄에 놓인 통나무의 개수가 옳을 때, 전체 통나무의 개수를 구하여 보자.

과제 2 전체 통나무의 개수가 옳을 때, 맨 아래 줄에 놓인 통나무의 개수를 구하여 보자.

교과서 93 쪽

학습에 대한 자/기/평/가

이름: ____________

	점검 항목			
학습 내용	인수분해의 뜻을 아는가?			
	곱셈 공식과 인수분해 공식 사이의 관계를 이해하고, 다항식을 인수분해할 수 있는가?			
	이차방정식과 그 해의 의미를 이해하였는가?			
	여러 가지 방법을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있는가?			
	이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는가?			
학습 태도	학습 준비물을 잘 준비하였는가?			
	수업 시간에 적극적으로 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			

재미있었거나 어려웠던 내용 적어 보기

더 알고 싶거나 궁금한 점 적어 보기

스스로 평가하기

선생님 의견

과제 2 _예시

x단계에 전체 통나무의 개수가 300개라고 하면

$$\frac{x(x+1)}{2}=300$$

$$x^2+x-600=0$$

$$(x-24)(x+25)=0$$

$$x=24 \text{ 또는 } x=-25$$

$$x>0\text{이므로 } \quad x=24$$

따라서 24단계에 맨 아래 줄에 놓인 통나무의 개수는 **24개**이다.

교과서 94 쪽

대단원 핵심 한눈에 보기

① 다항식의 인수분해

인수분해	(1) 인수분해: 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수들의 곱으로 나타내는 것 $x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+2)$ (2) 다항식에 공통인수가 있을 때에는 분배법칙을 이용하여 공통인수로 묶어 내어 인수분해한다. $ma+mb=m(a+b)$
인수분해 공식	(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ (2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (3) $x^2+(a+b)x+ab$ $=(x+a)(x+b)$ (4) $acx^2+(ad+bc)x+bd$ $=(ax+b)(cx+d)$

② 이차방정식

이차방정식	(1) 이차방정식: 방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (x에 관한 이차식)$=0$ 의 꼴로 변형되는 방정식 (2) x에 관한 이차방정식은 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수) 과 같이 나타낼 수 있다.
이차방정식의 해	(1) 미지수 x에 관한 이차방정식을 참이 되게 하는 x의 값을 이 이차방정식의 해 또는 근이라고 한다. (2) 이차방정식의 해를 모두 구하는 것을 이차방정식을 푼다고 한다.

③ 이차방정식의 풀이

인수분해를 이용한 풀이	(1) 인수분해를 이용한 풀이 ❶ 주어진 이차방정식을 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 나타낸다. ❷ 좌변을 인수분해한다. ❸ $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용하여 근을 구한다. (2) 중근: 이차방정식의 두 근이 중복되어 있을 때, 이 근을 주어진 이차방정식의 중근이라고 한다. (3) (완전제곱식)$=0$의 꼴로 나타내어지는 이차방정식은 중근을 가진다.
제곱근을 이용한 풀이	(1) $x^2=k$ $(k>0)$의 꼴로 나타내어지는 이차방정식의 근은 $x=\pm\sqrt{k}$이다. (2) $(x+p)^2=q$ $(q>0)$의 꼴로 나타내어지는 이차방정식의 근은 $x=-p\pm\sqrt{q}$이다.
근의 공식	x에 관한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근은 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)

④ 이차방정식의 활용

이차방정식을 활용한 문제 해결 순서	❶ 문제의 뜻을 파악하고, 구하고자 하는 것을 미지수 x로 놓는다. ❷ 문제의 뜻에 알맞게 이차방정식을 세운다. ❸ 이차방정식을 푼다. ❹ 이차방정식의 해로부터 문제의 뜻에 맞는 답을 구한다. ❺ 구한 답이 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

이번 단원에서 배운 용어와 기호

• 인수, 인수분해, 완전제곱식, 이차방정식, 중근, 근의 공식

지도 내용

1. 인수, 인수분해, 완전제곱식의 뜻을 알고, 다양한 인수분해 공식을 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있도록 한다.

2. 이차방정식과 그 해의 의미를 알고, 이차방정식의 풀이 방법을 이해하여 그 해를 구할 수 있도록 한다. 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있도록 한다.

교과서 95 쪽

만화로 보는 수학 이야기

생각 키/우/기 | a, b, c, d에 적당한 정수를 넣어 인수분해 도술을 부려 보자.

만화로 보는 수학 이야기

만화에서는 인수분해 공식과 곱셈 공식이 서로 반대의 과정임을 보여 주고 있다. 인수분해 공식은 그 결과가 곱의 모양으로, 곱셈 공식은 그 결과가 합의 모양으로 나타내어진다.

생각 키/우/기

$a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$라고 할 때, $x+2$와 $3x+4$에 곱셈 도술을 부리면 $3x^2+10x+8$이 되고, 다시 $3x^2+10x+8$에 인수분해 도술을 부리면 $x+2$와 $3x+4$로 분리된다.

대/단/원 평가 문제

교과서 96 쪽

대/단/원 평가 문제

선/택/형

1 다음 중에서 인수분해가 바르게 된 것은?

① $2a^2-2=2(a^2-1)$
② $4x^2+9=(2x+3)^2$
③ $x^2-10x+25=(x+5)^2$
④ $5x^2-30x+25=5(x-2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x+6)-8=(x+7)(x-2)$

2 다항식 $16x^2+ax+9$가 완전제곱식이 될 때, a의 값으로 알맞은 수를 모두 찾으면? (정답 2개)

① -24 ② -12 ③ 0
④ 12 ⑤ 24

3 다음 중에서 이차방정식은?

① $x^2+6=x^2$
② $(2x-1)^2=2x^2$
③ $x(x^2-4)=5x^2-x$
④ $6(3x-1)=7+4x$
⑤ $x^2+x=(x-3)(x+8)$

4 다음 중에서 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해가 되는 것은?

① $x^2-3x=0$ $[-3]$
② $x^2=4$ $[\sqrt{2}]$
③ $x^2-2x+3=0$ $[1]$
④ $2x^2-x-6=0$ $\left[\frac{1}{2}\right]$
⑤ $3x^2-10x+3=0$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

5 이차방정식 $x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$의 근을 모두 찾으면? (정답 2개)

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ 1 ⑤ 3

6 이차방정식 $x^2-6x+2a-3=0$이 중근을 가질 때, a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

7 이차방정식 $x^2+3ax-2a+4=0$의 한 근이 $x=4$일 때, 다른 한 근은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 8

8 정사각형 모양의 광장이 있다. 이 광장의 넓이가 $9a^2-12a+4$일 때, 광장의 둘레의 길이는?

① $12a-8$ ② $12a+8$
③ $12a+6$ ④ $3a-2$
⑤ $3a+2$

1

목표 | 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이 | ① $2a^2-2=2(a^2-1)=2(a^2-1^2)$
$=2(a+1)(a-1)$
② $4x^2+9$는 더 이상 인수분해되지 않는다.
③ $x^2-10x+25=(x-5)^2$
④ $5x^2-30x+25=5(x^2-6x+5)$
$=5(x-1)(x-5)$
⑤ $(x-1)(x+6)-8=x^2+5x-6-8$
$=x^2+5x-14$
$=(x+7)(x-2)$

답 ⑤

2

목표 | 다항식이 완전제곱식이 되는 조건을 이해하게 한다.

풀이 | $16x^2+ax+9=(4x)^2+ax+3^2$
따라서 $a=\pm(2\times4\times3)=\pm24$이다.

답 ①, ⑤

3

목표 | 이차방정식의 뜻을 알고, 이차방정식을 찾을 수 있게 한다.

풀이 | ① $x^2+6=x^2$을 정리하면 $6=0$
② $(2x-1)^2=2x^2$을 정리하면 $2x^2-4x+1=0$
③ $x(x^2-4)=5x^2-x$를 정리하면 $x^3-5x^2-3x=0$
④ $6(3x-1)=7+4x$를 정리하면 $14x-13=0$
⑤ $x^2+x=(x-3)(x+8)$을 정리하면 $-4x+24=0$

답 ②

4

목표 | [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해인지 판별할 수 있게 한다.

풀이 | ① $(-3)^2-3\times(-3)=18\neq0$
② $(\sqrt{2})^2=2\neq4$
③ $1^2-2\times1+3=2\neq0$
④ $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-6=-6\neq0$
⑤ $3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-10\times\frac{1}{3}+3=0$

답 ⑤

5

목표 | 계수가 분수인 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이 | $x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$에서 $3x^2-2x-1=0$
$(x-1)(3x+1)=0$
$x=1$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$

답 ②, ④

6

목표 | 이차방정식이 중근을 가질 때, 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $x^2-6x+2a-3=0$이 중근을 가지므로
$x^2-6x+2a-3$이 완전제곱식이 되어야 한다.
따라서 $2a-3=\left(\frac{-6}{2}\right)^2$이므로
$2a=12$, $a=6$

답 ⑤

9 지면에서 초속 60 m로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이가 $(60t-5t^2)$ m일 때, 이 물체의 높이가 160 m인 순간은 물체를 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? (정답 2개)

① 4초 후 ② 6초 후 ③ 8초 후
④ 10초 후 ⑤ 12초 후

10 연속하는 두 자연수의 곱이 506일 때, 이 두 자연수의 제곱의 차는?

① 12 ② 28 ③ 32
④ 45 ⑤ 54

서/답/형

11 인수분해를 이용하여 다음을 계산하여라.

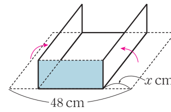
$7.5^2\times3-2.5^2\times3$

12 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}$을 풀어라.

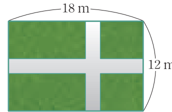
13 이차방정식 $(x-3)(x+5)=48$의 두 근의 차를 구하여라.

14 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 근이 $x=-1$ 또는 $x=4$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

|서술형|
15 다음 그림과 같이 폭이 48 cm인 철판의 양쪽을 x cm만큼 직각으로 접어 올려 물받이를 만들려고 한다. 색칠한 부분의 넓이가 288 cm²일 때, x의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서술형|
16 다음 그림과 같이 가로의 길이가 18 m이고, 세로의 길이가 12 m인 직사각형 모양의 잔디밭에 폭이 일정한 산책로를 만들려고 한다. 잔디밭의 넓이가 160 m²가 되도록 할 때, 산책로의 폭을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



7

목표 | 이차방정식의 한 근을 알 때, 다른 한 근을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 한 근이 $x=4$이므로 $16+12a-2a+4=0$
$10a=-20$, $a=-2$
주어진 이차방정식은 $x^2-6x+8=0$이므로
$(x-4)(x-2)=0$
$x=4$ 또는 $x=2$
따라서 구하는 다른 한 근은 $x=2$이다.

답 ④

8

목표 | 인수분해를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | $9a^2-12a+4=(3a-2)^2$
따라서 광장의 한 변의 길이가 $3a-2$이므로 광장의 둘레의 길이는
$4(3a-2)=12a-8$

답 ①

9

목표 | 이차방정식을 활용하여 높이에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | $60t-5t^2=160$에서
$-5t^2+60t-160=0$
$t^2-12t+32=0$, $(t-4)(t-8)=0$
$t=4$ 또는 $t=8$
따라서 물체의 높이가 160 m인 순간은 물체를 쏘아 올린 지 4초 후와 8초 후이다.

답 ①, ③

10

목표 | 이차방정식을 활용하여 수에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 연속하는 두 자연수를 x, $x+1$이라고 하면 $x(x+1)=506$이므로
$x^2+x-506=0$, $(x+23)(x-22)=0$
$x=-23$ 또는 $x=22$
x는 자연수이므로 $x=22$
따라서 연속하는 두 자연수는 22, 23이므로 이 두 자연수의 제곱의 차는
$23^2-22^2=(23+22)(23-22)=45$

답 ④

11

목표 | 인수분해를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $7.5^2\times3-2.5^2\times3=3\times(7.5^2-2.5^2)$
$=3\times(7.5+2.5)\times(7.5-2.5)$
$=3\times10\times5$
$=150$

답 150

12

목표 | 계수가 분수인 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이 | $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}$의 양변에 12를 곱하면

$3x^2-4x=6$

$3x^2-4x-6=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16+72}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}$

답 $x=\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}$

13

목표 | 이차방정식을 풀고 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | $(x-3)(x+5)=48$에서 $x^2+2x-15=48$

$x^2+2x-63=0$

$(x+9)(x-7)=0$

$x=-9$ 또는 $x=7$

따라서 두 근의 차는 $7-(-9)=16$이다.

답 16

14

목표 | 이차방정식의 해의 뜻을 알고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | $2x^2+ax+b=0$에 $x=-1$을 대입하면

$2-a+b=0$ ······①

$2x^2+ax+b=0$에 $x=4$를 대입하면

$32+4a+b=0$ ······②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-8$

따라서 $a+b=-14$이다.

답 -14

15

목표 | 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 색칠한 직사각형의 세로의 길이는 x cm이므로 가로의 길이는 $(48-2x)$ cm이다. ···㉠

색칠한 직사각형의 넓이가 288 cm^2이므로

$x(48-2x)=288$

$2x^2-48x+288=0$

$x^2-24x+144=0$ ···㉡

$(x-12)^2=0$

$x=12$(중근) ···㉢

답 12

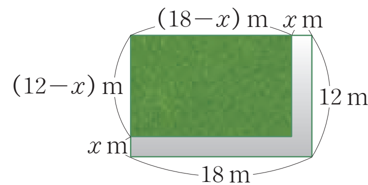
채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	가로의 길이를 x에 관한 식으로 나타내기	㉠	30%
	이차방정식 세우기	㉡	40%
답 구하기	x의 값 구하기	㉢	30%

16

목표 | 이차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 |



산책로의 폭을 x m라고 하면 잔디밭의 넓이는 위의 그림과 같이 가로의 길이가 $(18-x)$ m, 세로의 길이가 $(12-x)$ m인 직사각형의 넓이와 같으므로

$(18-x)(12-x)=160$

$x^2-30x+56=0$ ···㉠

$(x-2)(x-28)=0$

$x=2$ 또는 $x=28$ ···㉡

$0<x<12$이므로 $x=2$

따라서 구하는 산책로의 폭은 2 m이다. ···㉢

답 2 m

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	이차방정식 세우기	㉠	40%
	이차방정식 풀기	㉡	40%
답 구하기	산책로의 폭 구하기	㉢	20%

교과서 98 쪽

수학 산책

인수분해의 마술

인수분해를 이용하면 수에 관한 여러 가지 흥미로운 사실들을 알아낼 수 있다. 그중에서 몇 가지를 살펴보자.

먼저 연속하는 네 자연수를 곱하여 1을 더하면 결과는 완전제곱수가 된다. 예를 들어

$$1\times2\times3\times4+1=25(=5^2)$$
$$2\times3\times4\times5+1=121(=11^2)$$
$$3\times4\times5\times6+1=361(=19^2)$$
$$4\times5\times6\times7+1=841(=29^2)$$

이다.

일반적으로 연속하는 네 자연수에서 제일 작은 수를 a라고 하면 다른 세 수는 각각 $a+1$, $a+2$, $a+3$이므로 이들을 곱하여 1을 더하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}a(a+1)(a+2)(a+3)+1&=a(a+3)(a+1)(a+2)+1\\&=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1\\&=(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1\\&=(a^2+3a+1)^2\end{aligned}$$

여기서 a가 자연수이므로 a^2+3a+1도 자연수가 되고, 이 수의 제곱인 $(a^2+3a+1)^2$은 분명히 완전제곱수이다.

교과서 99 쪽

한편 이 계산을 통해서 $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$이 완전제곱수라는 것을 알 수 있을 뿐만 아니라 그것이 어떤 수의 완전제곱수인지도 계산할 수 있다. 예를 들어

$$5\times6\times7\times8+1=\square^2$$

이라고 하면 연속하는 네 자연수에서 제일 작은 수는 5이므로

$$\square=a^2+3a+1=5^2+3\times5+1=41$$

이다. 따라서

$$5\times6\times7\times8+1=41^2$$

임을 알 수 있다.

또한 연속하는 네 짝수(혹은 홀수)의 곱에 16을 더한 결과도 인수분해를 이용하면 완전제곱수라는 것을 알 수 있다.

인수분해를 이용하여 수에 관한 또 다른 사실을 알아보자.

연속하는 두 자연수의 제곱의 차는 두 수의 합과 같다. 예를 들어

$$5^2-4^2=25-16=9(=5+4)$$
$$7^2-6^2=49-36=13(=7+6)$$
$$12^2-11^2=144-121=23(=12+11)$$

이다.

일반적으로 $a-b=1$인 두 자연수 a, b에 대하여 두 수의 제곱의 차를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}a^2-b^2&=(a+b)(a-b)\\&=a+b\end{aligned}$$

따라서 이 두 수 a, b의 제곱의 차는 두 수의 합과 같음을 알 수 있다.

선/택/형

1 $ax^2-6x+1=(bx-1)^2$일 때, $a+b$의 값은? [6점]

① -3 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

2 다음 두 다항식의 공통인수는? [5점]

$x^2-3x-4,\quad 2x^2-9x+4$

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$
④ $x+4$ ⑤ $x-4$

3 $a=\sqrt{5}+2$, $b=\sqrt{5}-2$일 때, a^2-b^2의 값은? [6점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$
④ 18 ⑤ 20

4 이차방정식 $x^2+mx+m=0$이 중근을 가질 때, m의 값은? (단, $m\neq0$) [6점]

① -4 ② -2 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

5 이차방정식 $x^2+10x+10=0$을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 고칠 때, $p+q$의 값은? [5점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

6 이차방정식 $(x-3)^2=8$의 두 근의 차는? [5점]

① 0 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{6}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

7 이차방정식 $2x^2+5x+k-2=0$의 한 근이 -2일 때, 다른 한 근은? [6점]

① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 4

8 이차방정식 $4x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{4}$, -3일 때, $a+b$의 값은? [5점]

① -4 ② -2 ③ 5
④ 8 ⑤ 12

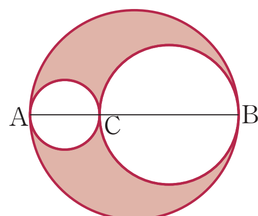
9 이차방정식 $(x-1)^2+(x-6)-7=0$의 해는? [6점]

① $x=2$ 또는 $x=3$
② $x=0$ 또는 $x=-7$
③ $x=-1$ 또는 $x=7$
④ $x=-3$ 또는 $x=4$
⑤ $x=-4$ 또는 $x=4$

10 이차방정식 $\frac{x^2}{3}=\frac{x+1}{2}$의 두 근을 a, b라고 할 때, a^2+b^2+2ab의 값은? [7점]

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{11}{4}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

11 오른쪽 그림과 같이 원의 지름 AB 위에 한 점 C를 잡아 $\overline{AC}$, $\overline{CB}$를 각각 지름으로 하는 원을 그렸다. $\overline{AB}=6$ cm이고 색칠한 부분의 넓이가 4π cm^2 일 때, $\overline{AC}$의 길이는? (단, $\overline{AC}<\overline{CB}$) [7점]



① $\frac{1}{2}$ cm ② $\frac{3}{4}$ cm ③ 1 cm
④ $\frac{3}{2}$ cm ⑤ 2 cm

서/답/형

12 넓이가 $16x^2+24x+9$인 정사각형의 둘레의 길이를 구하여라. [8점]

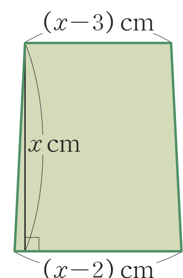
13 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-2x+1=0$을 풀어라. [8점]

|서술형|

14 x에 관한 이차방정식 $x^2+px+q=0$을 푸는데 서영이는 x의 계수를 잘못 보고 풀어서 -4, 2를 해로 구하였고, 준우는 상수항을 잘못 보고 풀어서 -9, 2를 해로 구하였다. 이 이차방정식의 해를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [10점]

|서술형|

15 오른쪽 사다리꼴의 넓이가 75 cm^{2}일 때, x의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [10점]



60점 미만이면 **하 · 수준** 문제를, 60점 이상 80점 미만이면 **중 · 수준** 문제를, 80점 이상이면 **상 · 수준** 문제를 풀어 보세요.

하·수준

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $ax+bx$

(2) a^2-2a

(3) x^2y+xy^2

(4) $2ab-8b^2$

(5) $abx-bxy$

(6) $8x^2y+12xy^2$

2 다음 □ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $a^2-10a+25=(a-\square)^2$

(2) $x^2-6x+9=(x-\square)^2$

(3) $4a^2-1=(\square a+1)(\square a-1)$

(4) $x^2-36=(x+\square)(x-\square)$

3 다음 중에서 이차방정식을 모두 찾아라.

㉠ x^2+3x	㉡ $6x^2=3x-7$
㉢ $(x-7)^2=9$	㉣ $(x+1)^2=(x-6)^2$

4 이차방정식 $x^2-x-2=0$을 풀어라.

5 다음은 이차방정식 $(x+2)^2-6=0$을 푸는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$(x+2)^2-6=0$에서

$(x+2)^2=\square$

$x+2=\square$

$x=\square$

중·수준

1 다음 중에서 다항식 $3x^2-9xy$의 인수를 모두 찾아라.

㉠ $3x$	㉡ $3y$
㉢ $x-3y$	㉣ $x-y$

2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2-x-12
(2) x^2-2x-3
(3) $8x^2+14x+5$
(4) $4x^2-11x-3$

3 다음 다항식이 완전제곱식이 될 때, a의 값을 구하여라.

(1) $x^2-8x+a+3$
(2) $-2x^2+12x+a-1$

4 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(3x-1)^2=5$
(2) $2x^2+4=7x$
(3) $\frac{1}{10}x^2=\frac{1}{5}x-\frac{1}{10}$
(4) $0.3x^2+0.7x=2$

5 한 리듬 체조 선수가 던져 올린 공의 t초 후의 높이가 $(-5t^2+12t+1)$ m일 때, 이 공의 높이가 8 m인 순간은 공을 던져 올린 지 몇 초 후인가?

상·수준

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $4x^2-9x^2z^2$

(2) $18x^2y+12xy+2y$

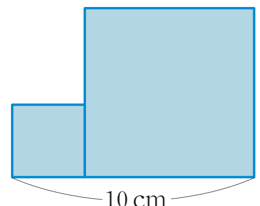
2 $-1<a<3$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

$$\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-6a+9}$$

3 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 한 해가 $x=-3$일 때, a의 값을 구하여라.

4 이차방정식 $3x^2+px+q=0$의 근이 $x=3$ 또는 $x=\frac{4}{3}$일 때, 이차방정식 $x^2+qx+p=0$의 두 근의 차를 구하여라.

5 오른쪽 그림과 같이 길이가 10 cm인 선분 위에 두 개의 정사각형을 이어서 그렸다. 두 정사각형의 넓이의 합이 58 cm^2 일 때, 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



1 목표| 인수분해 공식을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $ax^2-6x+1=(bx-1)^2=b^2x^2-2bx+1$
이므로 $a=b^2$, $-6=-2b$
$-6=-2b$에서 $b=3$
$a=b^2$에서 $a=3^2=9$
따라서 $a+b=9+3=12$이다. 답 ⑤

2 목표| 공통인수의 뜻을 알고, 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$
$2x^2-9x+4=(x-4)(2x-1)$
따라서 공통인수는 $x-4$이다. 답 ⑤

3 목표| 인수분해를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$=2\sqrt{5}\times4=8\sqrt{5}$ 답 ③

4 목표| 이차방정식이 중근을 가질 때, 미지수의 값을 알게 한다.

풀이| $x^2+mx+m=0$이 중근을 가지므로
$\left(\frac{m}{2}\right)^2=m$, $\frac{m^2}{4}=m$, $m^2-4m=0$, $m(m-4)=0$
$m=0$ 또는 $m=4$
그런데 $m\neq0$이므로 $m=4$ 답 ⑤

5 목표| 이차방정식을 완전제곱식의 꼴로 고칠 수 있게 한다.

풀이| $x^2+10x+10=0$에서 $x^2+10x=-10$
양변에 $\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$를 더하면
$x^2+10x+25=-10+25$, $(x+5)^2=15$
$p=5$, $q=15$이므로 $p+q=20$ 답 ④

6 목표| 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $(x-3)^2=8$에서 $x-3=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$
$x=3\pm2\sqrt{2}$
따라서 두 근의 차는
$(3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
답 ④

7 목표| 이차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 다른 한 근을 구할 수 있게 한다.

풀이| $2x^2+5x+k-2=0$에 $x=-2$를 대입하면
$2\times(-2)^2+5\times(-2)+k-2=0$, $k=4$
$2x^2+5x+4-2=0$, $(x+2)(2x+1)=0$
$x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$
따라서 다른 한 근은 $x=-\frac{1}{2}$이다. 답 ③

8 목표| 이차방정식의 두 근을 알 때, 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $4x^2+ax+b=0$에 $x=\frac{1}{4}$, $x=-3$을 대입하면
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a+b=0$, $36-3a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=-3$
따라서 $a+b=11-3=8$이다. 답 ④

9 목표| 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $(x-1)^2+(x-6)-7=0$, $x^2-x-12=0$
$(x+3)(x-4)=0$, $x=-3$ 또는 $x=4$ 답 ④

10 목표| 이차방정식을 풀고 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{x^2}{3}=\frac{x+1}{2}$에서 $2x^2-3x-3=0$
$x=\frac{3\pm\sqrt{9+24}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{33}}{4}$
$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=\left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}+\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)^2$
$=\left(\frac{6}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ 답 ②

11 목표| 도형에서 이차방정식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AC}=x$ cm라고 하면 $\overline{CB}=(6-x)$ cm이므로
색칠한 부분의 넓이는
$\pi\times3^2-\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{6-x}{2}\right)^2=4\pi$
$9-\frac{x^2}{4}-\frac{36-12x+x^2}{4}=4$, $x^2-6x+8=0$
$(x-2)(x-4)=0$, $x=2$ 또는 $x=4$
그런데 $\overline{AC}<\overline{CB}$이므로 $\overline{AC}=2$(cm) 답 ⑤

12 목표| 인수분해를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $16x^2+24x+9=(4x+3)^2$이므로 정사각형의 한 변의 길이는 $4x+3$이다. 따라서 정사각형의 둘레의 길이는 $4(4x+3)=16x+12$이다.

답 $16x+12$

13 목표| 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $\frac{1}{2}x^2-2x+1=0$에서 $x^2-4x+2=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

답 $2\pm\sqrt{2}$

14 목표| 올바른 이차방정식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서영이가 구한 해는 -4, 2이므로

$(x+4)(x-2)=0$에서 $x^2+2x-8=0$

$q=-8$ …㉠

준우가 구한 해는 -9, 2이므로

$(x+9)(x-2)=0$에서 $x^2+7x-18=0$

$p=7$ …㉡

$x^2+px+q=0$에서 $x^2+7x-8=0$

$(x-1)(x+8)=0$, $x=1$ 또는 $x=-8$ …㉢

답 $x=1$ 또는 $x=-8$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	q의 값 구하기	㉠	4점
	p의 값 구하기	㉡	4점
답 구하기	이차방정식 풀기	㉢	2점

15 목표| 도형에서 이차방정식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 사다리꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{(x-3)+(x-2)\}\times x=75$ …㉠

$2x^2-5x-150=0$, $(x-10)(2x+15)=0$

$x=10$ 또는 $x=-\frac{15}{2}$ …㉡

$x>0$이므로 $x=10$ …㉢

답 10

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	이차방정식 세우기	㉠	4점
	이차방정식 풀기	㉡	4점
답 구하기	x의 값 구하기	㉢	2점

하·수준

1 목표| 다항식을 공통인수로 묶어 내어 인수분해할 수 있게 한다.

답 (1) $x(a+b)$ (2) $a(a-2)$ (3) $xy(x+y)$ (4) $2b(a-4b)$ (5) $bx(a-y)$ (6) $4xy(2x+3y)$

2 목표| 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^2-10a+25=(a-\boxed{5})^2$

(2) $x^2-6x+9=(x-\boxed{3})^2$

(3) $4a^2-1=(2a)^2-1^2=(\boxed{2}a+1)(\boxed{2}a-1)$

(4) $x^2-36=x^2-6^2=(x+\boxed{6})(x-\boxed{6})$

답 (1) 5 (2) 3 (3) 2, 2 (4) 6, 6

3 목표| 이차방정식의 뜻을 알고, 이차방정식을 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠ x^2+3x ⇨ 이차식

㉡ $6x^2=3x-7$에서 $6x^2-3x+7=0$

⇨ 이차방정식

㉢ $(x-7)^2=9$에서 $x^2-14x+40=0$

⇨ 이차방정식

㉣ $(x+1)^2=(x-6)^2$에서 $14x-35=0$

⇨ 일차방정식

답 ㉡, ㉢

4 목표| 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$

5 목표| 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $(x+2)^2-6=0$에서

$(x+2)^2=\boxed{6}$

$x+2=\boxed{\pm\sqrt{6}}$

$x=\boxed{-2\pm\sqrt{6}}$

답 6, $\pm\sqrt{6}$, $-2\pm\sqrt{6}$

중·수준

1 목표| 다항식에서 인수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| $3x^2-9xy=3x(x-3y)$

답 ㉠, ㉢

2 목표| 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

답 (1) $(x+3)(x-4)$ (2) $(x+1)(x-3)$
(3) $(2x+1)(4x+5)$ (4) $(x-3)(4x+1)$

3 목표| 다항식이 완전제곱식이 되는 조건을 알게 한다.

풀이| (1) $a+3=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=16$, $a=13$

(2) $-2x^2+12x+a-1=-2\left(x^2-6x-\frac{a-1}{2}\right)$

$-\frac{a-1}{2}=\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$, $a=-17$

답 (1) 13 (2) -17

4 목표| 이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3x-1)^2=5$에서 $3x-1=\pm\sqrt{5}$

$3x=1\pm\sqrt{5}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{3}$

(2) $2x^2+4=7x$에서 $2x^2-7x+4=0$

$x=\frac{7\pm\sqrt{49-32}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

(3) $\frac{1}{10}x^2=\frac{1}{5}x-\frac{1}{10}$에서 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$, $x=1$(중근)

(4) $0.3x^2+0.7x=2$에서 $3x^2+7x-20=0$

$(3x-5)(x+4)=0$, $x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=-4$

답 (1) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{3}$ (2) $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

(3) $x=1$(중근) (4) $x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=-4$

5 목표| 이차방정식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| 공의 t초 후의 높이가 8 m라고 하면

$-5t^2+12t+1=8$에서 $5t^2-12t+7=0$

$(t-1)(5t-7)=0$, $t=1$ 또는 $t=\frac{7}{5}$

따라서 공의 높이가 8 m인 순간은 공을 던져 올린 지 1초 후와 $\frac{7}{5}$초 후이다.

답 1초 후와 $\frac{7}{5}$초 후

상·수준

1 목표| 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $4x^2-9x^2z^2=x^2(4-9z^2)$

$=x^2\{2^2-(3z)^2\}$

$=x^2(2+3z)(2-3z)$

(2) $18x^2y+12xy+2y=2y(9x^2+6x+1)$

$=2y(3x+1)^2$

답 (1) $x^2(2+3z)(2-3z)$ (2) $2y(3x+1)^2$

2 목표| 인수분해를 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $a+1>0$이므로

$\sqrt{a^2+2a+1}=\sqrt{(a+1)^2}=a+1$

$a-3<0$이므로

$\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=-(a-3)=3-a$

$\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-6a+9}=(a+1)-(3-a)$

$=2a-2$

답 $2a-2$

3 목표| 이차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+x+a=0$에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^2-3+a=0$이므로 $a=-6$

답 -6

4 목표| 이차방정식의 두 근이 주어졌을 때, 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $3x^2+px+q=0$에 $x=3$, $x=\frac{4}{3}$를 대입하면

$27+3p+q=0$, $\frac{16}{3}+\frac{4}{3}p+q=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=-13$, $q=12$

$x^2+qx+p=0$에서 $x^2+12x-13=0$

$(x-1)(x+13)=0$, $x=1$ 또는 $x=-13$

따라서 구하는 두 근의 차는

$1-(-13)=14$

답 14

5 목표| 도형에서 이차방정식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| 큰 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면 두 정사각형의 넓이의 합은

$x^2+(10-x)^2=58(\text{cm}^2)$

$(x-3)(x-7)=0$, $x=3$ 또는 $x=7$

따라서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 7 cm이다.

답 7 cm

이차방정식 빙고

2명 또는 3명이 다음과 같은 게임을 하여 보아라.

준비물

게임 판, 주사위, 색연필

〈게임 판〉

$x^2-6x=0$	$x^2-5x+6=0$	$x^2-3x+2=0$	$x^2-25=0$
$x^2-2x=0$	$x^2=16$	$x^2-4x=0$	$(x-4)(x-3)=0$
$x^2-5x+4=0$	$(x-2)^2=0$	$x^2-2x+1=0$	$x^2-9=0$
$x^2=3x$	$x^2-36=0$	$(x-4)^2=0$	$x^2-6x+9=0$

게임 규칙

① 1에서 6까지의 자연수 중에서 적어도 하나의 수를 해로 가지는 이차방정식을 위와 같이 게임 판의 각 칸에 쓴다.

② 게임 순서를 정하고, 차례로 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 해로 가지는 이차방정식이 적힌 칸을 찾아 그 중에서 하나의 칸에 색연필로 자신만의 표시를 한다.

③ 주사위의 눈의 수를 해로 가지는 칸이 모두 표시되어 있으면 표시할 수 없다.

④ 가로, 세로, 대각선 방향으로 연속된 4개의 칸을 먼저 표시한 사람이 이긴다.

삼고초려(三顧草廬)와 수 철학

우리는 여러 숫자 가운데서 유독 '3'을 많이 사용한다. 동양, 특히 우리나라는 문화적으로 3이라는 숫자를 좋아하여 '삼세번', '삼판이승'과 같은 말이 흔히 사용된다. 또 역사적으로 고조선이 멸망한 뒤 우리 민족은 흩어지지 않고 고구려, 백제, 신라라는 세 나라를 세워 삼국 시대를 열었다. 한 민족이 세 나라로 갈라졌던 것은 중국에서도 있었는데, 후한이 무너진 뒤, 위, 촉, 오의 세 나라가 세워져 소설 "삼국지"의 무대가 되기도 하였다.

"삼국지"에서도 유명한 3이 등장하는데, '삼고초려(三顧草廬)'가 그것이다. 삼고초려는 '초가집에 세 번 찾아간다.'는 뜻으로 사람을 맞이함에 있어 진심으로 예를 다하는 경우를 비유해서 이르는 말이다.

그렇다면 수학에서 3은 과연 어떤 의미가 있을까? 단순하게 생각하면 3은 $2^1+1=3$으로 첫 번째 페르마 소수이자, $2^2-1=3$으로 첫 번째 메르센 소수이다. 또 1을 제외하면 $3!=3\cdot2\cdot1=6=1+2+3$으로 팩토리얼과 합이 같게 되는 유일한 자연수이며, 이전 두 자연수의 합 $1+2$와 같은 유일한 자연수이고, $3^2+4^2=5^2$이므로 처음으로 나오는 피타고라스 3쌍이다. 이외에도 많은 특별한 성질이 있지만, 여기서 알아볼 것은 수를 철학적으로 보았을 때의 3이다. 우선 고대 그리스 수학자들이 수에 어떤 의미를 부여했는지 간단히 알아보자.

고대 그리스 수학자들은 1은 근본적으로 창조와 일치한다고 생각하였다. 그래서 그들은 숫자 1을 존재라는 의미의 '우시아(Ousia)'라고 불렀고, 우주에서 영속성의 원천이고 모든 것의 기원이라고 생각하였다. 그들은 1이라는 수를 원을 사용하여 나타냈는데, 그 이유는 원이 그 다음에 잇따르는 모든 기하학적 모양의 원천이라고 믿었기 때문이다. 원으로 표현되는 1의 철학적 원리를 그리스어로 '모나드(Monad)'라고 하는데, 그 어원은 '안전하다'는 뜻의 menein과 '단일성'이라는 뜻의 monas에서 유래하였다. 고대 그리스 수학자들은 점이나 원으로 표현되는 모나드는 수가 아니라 모든 수의 부모로 간주하였다. 그리고 단일성을 나타내기 때문에 우주를 기하학적으로 작도하는 기초가 된다고 생각하였다.

모나드로부터 변화된 첫 번째 창조의 과정은 2인 '디아드(Dyad)'로 표현된다. 즉, 하나의 원이 분열하여 2개의 원을 이루는 이원성을 갖게 된다. 따라서 디아드는 분열성, 반대성, 분기성, 불평등성, 가분성, 그리고 변하기 쉬운 성질 등을 나타낸다. 고대 그리스 수학자들에게 디아드는 반대 개념의 원천인 동시에 1과 함께 다른 모든 수들의 부모라고 생각했기 때문에 2도 수로 여기지 않았다.

고대 그리스 수학자들은 1과 2를 수들의 '부모'로 여겼기 때문에 그 사이에서 처음으로 태어난 3은 최초의 수이자 가장 오래된 수이다. 이것은 정삼각형으로 표현된다.

고대 그리스 수학자들은 수에 특별한 의미를 부여하고 신성하게 여겼다. 특히 3을 중요하게 여겼는데, 이는 동양에서도 마찬가지였다. 동양에서 3을 특별한 수로 여겼다는 증거 가운데 하나는 많은 고사에서 3이 등장하고 있다는 것이다.

삼고초려(三顧草廬) 三(석 삼), 顧(돌아볼 고), 草(풀 초), 廬(오두막집 려)

III 이차함수

이 단원의 |학|습|목|표|

1. 이차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.
2. 이차함수의 그래프의 성질을 이해한다.

1. 이차함수와 그래프

불꽃놀이는 공중으로 화포를 쏘아 올려 생긴 불꽃을 구경하는 놀이로 고대 중국에서 경축 행사를 위해 특별히 군용 화포를 개량하여 폭죽을 쏜 것에서 유래하였다.

오늘날에도 세계 각국에서는 경축 행사가 있으면 불꽃놀이를 빼놓지 않으며, 매년 여러 나라들이 참가하여 불꽃의 화려함과 웅장함을 선보이는 불꽃 축제를 열기도 한다.

불꽃놀이에서 중요한 것은 폭죽을 하늘로 쏘아 올린 후 적당한 높이가 되었을 때 터지게 해야 아름다운 불꽃을 오래 볼 수 있다는 것이다. 따라서 폭죽을 발사한 후 시간에 따른 그것의 높이를 알아야 하는데, 이것은 시간에 관한 이차함수로 나타내어 알 수 있다.

단원을 시작하기 전에

지금부터 약 400여 년 전 갈릴레이는 피사의 사탑에서의 실험을 통하여 낙하하는 물체의 시간 x와 거리 y 사이에 $y=ax^2(a\neq0)$의 관계가 있음을 알았다. 이와 같은 함수를 이차함수라고 하는데 이차함수를 이용하면 여러 가지 현상을 수학적으로 설명하고 표현할 수 있다. 이 단원에서는 이차함수를 식과 그래프로 나타내는 방법에 대하여 지도한다.

단원의 지도 목표

1. 이차함수와 그래프

① 이차함수의 의미를 이해하게 한다.

② 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

③ 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

④ 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

⑤ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

⑥ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

⑦ 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

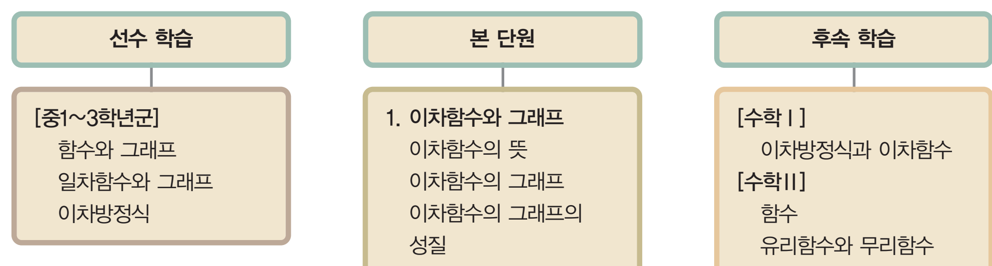
교수 · 학습상의 유의점

① 다양한 상황을 이용하여 이차함수의 의미를 다룬다.

② 이차함수에서 최댓값과 최솟값은 x값의 범위가 실수 전체인 경우만 다룬다.

③ 공학적 도구를 활용하여, 함수의 그래프를 그리고 다양한 상황을 해석할 수 있게 한다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관			100~101	• 단원의 개관	
1. 이차함수와 그래프	**준비 학습**		102	• 함수 • 함수의 그래프 • 일차함수 • 일차함수의 그래프	
	1-1 이차함수의 뜻	1~2	103~105	• 이차함수의 뜻	이차함수
	1-2 이차함수 $y=ax^2$의 그래프	3~5	106~110	• 이차함수 $y=ax^2$의 그래프	포물선, 축, 꼭짓점
	1-3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프	6~8	111~116	• 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프 • 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프 • 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프	
	1-4 이차함수의 그래프의 성질	9~11	117~122	• 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 • 이차함수의 식 구하기 • 이차함수의 최댓값과 최솟값	최댓값, 최솟값
	수준별 학습	12	123~125	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		13~14	126~135	• 수행 과제 • 학습에 대한 자기 평가 • 대단원 핵심 한눈에 보기 • 만화로 보는 수학 이야기 • 대단원 평가 문제 • 컴퓨터의 활용 • 수학 산책	

학습 지도 계획 수립 시 차시별 지도 계획을 바탕으로 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도에 따라 적절히 조정할 수 있다.

1. 갈릴레이의 비례

함수의 개념에 대한 자각은 대체로 여러 가지 운동을 연구하는 것으로부터 시작되었다. 갈릴레이(Galilei, G.: 1564~1642)는 '함수'라는 용어를 최초로 사용한 것은 아니지만 '비례'라는 단어를 사용해서 함수의 개념을 표현하였다. 갈릴레이는 변하는 물리적인 실재, 즉 변수들 사이의 어떤 수학적 관계를 찾고자 변수에 수치를 관련시킴으로써 함수의 개념을 산술화하려고 노력하였다.

그런데 함수의 개념을 산술화하기 위해서는 먼저 그것의 물리적인 실재가 측정 가능해야만 하였다. 이러한 입장에서 갈릴레이는 자연 현상에서 측정 가능한 측면을 분리하고자 노력하였고, 그러한 목적을 위해 시간과 공간 속에서 움직이는 물체에 주목하였다. 그 결과 갈릴레이는 측정 가능하고 그래서 수학적인 식으로 나타낼 수 있는 운동 중인 물체의 특성으로 시간, 무게, 속력, 가속도, 관성, 힘 그리고 운동량 등을 선택하였다. 이와 같은 것들이 수학적인 식에서 변수가 된다.

갈릴레이의 관찰에 따르면 높이가 같고 기울기가 다른 경사면을 따라 어떤 물체가 내려올 때 걸리는 시간은 경사면의 길이에 비례한다. 또 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리는 그 거리까지 움직이는 데 걸린 시간의 제곱에 비례한다.

2. 함수

라이프니츠

함수라는 용어는 라이프니츠(Leibniz, G. W.: 1646~1716)가 처음으로 사용하였다. 그는 처음에는 함수를 명확하게 정의하지 않고 곡선 위의 변화하는 점이 일정한 규칙으로 변하는 길이, 예를 들면 가로 좌표, 세로 좌표, 접선, 법선 등을 나타내는 데 이 말을 사용하였다. 그 후 1694년 발표한 논문 중에서 '함수란 방정식에 의하여 나타내어지는 사실이다.'라고 말하였다.

함수는 영어로 function이라고 하는데, 본래의 의미는 기능 또는 작용이다. 라이프니츠가 함수의 표현을 기능이라고 한 것은 함수의 기능적인 가치를 인정하였기 때문이다. 그는 1687년 10월 9일 친구인 아르노(Arnauld, A.: 1612~1694)에게 실측도를 나타내는 원근법적인 투영도를 예를 들어 다음과 같이 설명하였다.

'한쪽에 대하여 말하는 것과 다른 쪽에 대하여 말하는 것 사이에 항상적, 규칙적 관계가 존재할 때, 한쪽이 다른 쪽으로 나타내어진다.'

여기에서 그가 항상적, 규칙적 관계라고 말한 것은 한쪽과 다른 쪽을 대응하는 기능을 말한 것이다.

라이프니츠가 명명한 함수는 이후의 수학사에서 수학의 갈 길을 밝혀 주는 등불이 되었다. 그러나 그의 포괄적인 함수의 개념은 그것의 외연과 내포가 명확하게 밝혀지기까지 많은 곡절을 겪어야 했다. 그는 함수 관계를 도형이나 식으로 나타내어도 좋다고 보았고, 그의 초기 함수 개념도 도형을 매개로 하여 쓰여졌다.

한편 그는 다음과 같이 변수와 상수를 처음으로 정의하고 있는데 함수를 이들과 대비하지는 않았다.

'연속적으로 증가 또는 감소하는 양을 변수라 부르

고, 그것과 반대로 다른 양이 변하는 사이에 같은 상태로 있는 양을 상수라고 한다.'

1687년 이래 라이프니츠와의 교신 중에 미적분학을 진전시킨 베르누이 형제도 처음에는 라이프니츠와 같은 의미로 함수라는 용어를 사용하였다. 그러나 동생 요한 베르누이(Bernoulli, J.: 1654~1705)는 1718년의 저서 중에 다음과 같이 함수를 정의하고 있다.

요한 베르누이

'변수와 상수를 어떻게 합성하더라도 그 양을 그 변수의 함수라고 한다.'

이 정의를 라이프니츠의 것과 비교할 때, 양을 상수, 변수, 함수의 세 종류로 구별하려는 의도가 있는 것으로 볼 수 있다. 이와 같이 그는 함수를 식으로 표현하는 것 이외에 대수함수와 초월함수를 최초로 구별하였다.

우리가 사용하고 있는 함수 기호 $f(x)$를 처음 사용한 사람으로 알려져 있는 오일러(Euler, L.: 1707~1783)는 라이프니츠보다 함수의 개념을 더욱 분명히 하였다. 그는 '함수란 변수와 상수로 나타내어진 하나의 해석적인 식이다.'라고 정의하여 곡선과 함수의 개념을 분리하려고 하였다. 그는 해석적인 식의 본보기로서

$$a+3x,\ ax+b\sqrt{a^2+4x^2},\ c^x$$

등을 예로 들고 있지만 명확한 정의는 하지 않고 있다. 그는 일반적인 함수는 $a+bx+cx^2+\cdots$의 형태의 무한급수로 전개된다고 생각하였다.

오일러 이후 테일러(Taylor, B.: 1685~1731), 매클로린(Maclaurin, C.: 1698~1746), 코시(Cauchy, A. L.: 1789~1857) 등에 의하여 함수는 급수와 동의어는 아니고 하나에서 하나로 기계적으로 도출되는 급수의 모임을 의미하는 것으로 변하였다.

코시는 독립변수와 함수를 다음과 같이 정의하였다.

코시

'몇 개의 변수 사이에 어떤 관계가 있어서 그중 한 값을 주면 다른 변수의 값이 정해지는 것은 통상 그 한 변수에 의하여 다른 변수를 나타낸다고 생각한다. 이때 그 한 변수를 독립변수, 다른 수를 그의 함수라고 한다.'

코시의 함수 개념은 오일러의 개념과는 달리 '해석적인 식으로 표현된다.'는 조건이 없고 변수 사이의 관계를 단순하게 규정한 것이다.

그는 또 무한소의 개념은 0을 극한으로 가지는 변수라고 규정하여 함수의 연속성을 '주어진 한계 내에서 x가 무한소만큼 변할 때, 그에 대응하는 함수 $f(x)$의 값의 변화도 무한소이며, 함수 $f(x)$는 이 한계 속에서 연속이라고 한다.'고 설명하였다. 이와 같은 과정을 거쳐 현대적인 함수 개념이 확립되었다.

교수 · 학습 과정안 (기초)

대단원		Ⅲ. 이차함수	쪽수	교과서 117~119쪽
소단원		1. 이차함수와 그래프 1-4 이차함수의 그래프의 성질	차시	9/14
학습 목표		이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프를 이해한다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있는지 질문한다. ◎ 학습 목표를 제시한다. • 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프를 이해한다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프** (1) $y=ax^2+bx+c$의 꼴을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어서 그린 그래프와 같다. 예 $y=x^2+2x+2$의 그래프 그리기 (2) y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, c)$이다. (3) $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구할 수 있다. • 꼭짓점의 좌표: (p, q) • 축의 방정식: $x=p$ ◎ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 이차함수 $y=x^2+6x+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 좌표를 구하여라. 답 꼭짓점의 좌표: $(-3, -8)$, y축과 만나는 점의 좌표: $(0, 1)$ ◎ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본)를 과제로 선택하도록 한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 이차함수의 식을 구할 수 있다.		

수준별 학습지 (기초)

대단원	Ⅲ. 이차함수	쪽수	교과서 117~119쪽
소단원	1. 이차함수와 그래프 1-4 이차함수의 그래프의 성질	차시	9/14
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 다음은 이차함수 $y=x^2+4x+5$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치는 과정이다. □ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

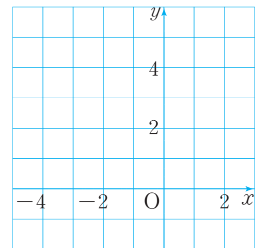
$$y=x^2+4x+5=(x^2+4x+\square-\square)+5$$
$$=(x+\square)^2-\square+5=(x+\square)^2+\square$$

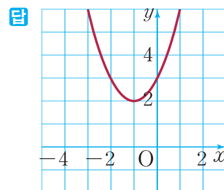
답 4, 4, 2, 4, 2, 1

2 이차함수 $y=2x^2+8x+3$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내었을 때, $a+p-q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 상수)

답 5

3 오른쪽 좌표평면 위에 이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프를 그려라.



답


4 다음 중에서 이차함수 $y=x^2-4x-9$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. $x=2$를 축으로 하는 포물선이다.
ㄴ. $x=-4$를 축으로 하는 포물선이다.
ㄷ. 점 $(2,\ -9)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
ㄹ. 점 $(2,\ -13)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
ㅁ. y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ -9)$이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

교수・학습 과정안(기본)

대단원	Ⅲ. 이차함수	쪽수	교과서 117~119쪽
소단원	1. 이차함수와 그래프　1-4 이차함수의 그래프의 성질	차시	9/14
학습 목표	이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프를 이해한다.		

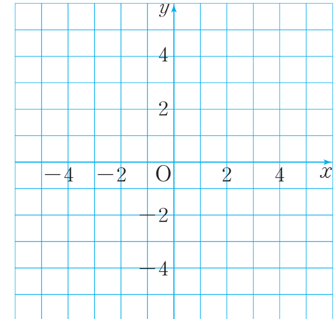
단계	학습 과정	교수・학습 활동	교수・학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◆ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◆ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있는지 질문한다. ◆ 학습 목표를 제시한다. • 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프를 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◆ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◆ 학습 내용 설명 **이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프** (1) $y=ax^2+bx+c$의 꼴을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어서 그린 그래프와 같다. 예 $y=x^2+2x+2$의 그래프 그리기 (2) y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ c)$이다. (3) $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구할 수 있다. • 꼭짓점의 좌표: $(p,\ q)$　• 축의 방정식: $x=p$ ◆ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◆ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◆ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2-4x+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 좌표를 구하여라. 답 꼭짓점의 좌표: $(3,\ -5)$, y축과 만나는 점의 좌표: $(0,\ 1)$ ◆ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◆ 다음 차시를 예고한다. • 이차함수의 식을 구할 수 있다.	

수준별 학습지 (기본)

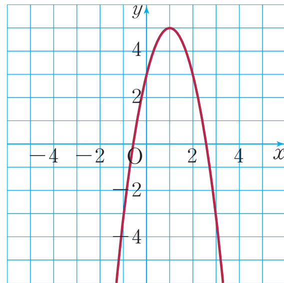
대단원	Ⅲ. 이차함수	쪽수	교과서 117~119쪽
소단원	1. 이차함수와 그래프 1-4 이차함수의 그래프의 성질	차시	9/14

(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:

1 오른쪽 좌표평면 위에 이차함수 $y=-2x^2+4x+3$의 그래프를 그려라.



답



2 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+k-2$의 그래프의 꼭짓점이 x축 위에 있을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

답 4

3 이차함수 $y=3x^2-12x+2$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 말하여라.

답 제3사분면

4 다음 중에서 이차함수 $y=-3x^2-6x-1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. $x>-1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -1)$이다.
ㄷ. y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, -1)$이다.

답 ㄱ, ㄷ

교수 · 학습 과정안 (실력)

대단원		Ⅲ. 이차함수	쪽수	교과서 117~119쪽
소단원		1. 이차함수와 그래프　1-4 이차함수의 그래프의 성질	차시	9/14
학습 목표		이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프를 이해한다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있는지 질문한다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프를 이해한다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프** (1) $y=ax^2+bx+c$의 꼴을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어서 그린 그래프와 같다. 예 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+2$의 그래프 그리기 (2) y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ c)$이다. (3) $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구할 수 있다. • 꼭짓점의 좌표: $(p,\ q)$　　• 축의 방정식: $x=p$ ◐ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 이차함수 $y=-2x^2+bx-1$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-1$일 때, b의 값을 구하여라. 답 -4 ◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 이차함수의 식을 구할 수 있다.		

수준별 학습지 (실력)

대단원	Ⅲ. 이차함수	쪽수	교과서 117~119쪽
소단원	1. 이차함수와 그래프　1-4 이차함수의 그래프의 성질	차시	9/14

(　　　)학년 (　　　)반 (　　　)번　　이름:

1 이차함수 $y=-x^2-2ax+4a^2-2b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 3)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

답 0

2 이차함수 $y=x^2+4x+2m-1$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $2x+y=7$ 위에 있을 때, 상수 m의 값을 구하여라.

답 8

3 이차함수 $y=x^2-6kx+9k^2+6k+3$의 그래프의 꼭짓점이 제2사분면 위에 있을 때, 상수 k값의 범위를 구하여라.

답 $-\frac{1}{2}<k<0$

4 이차함수 $y=x^2+4x$의 그래프의 꼭짓점을 A라 하고, 이 그래프와 직선 $y=12$의 교점을 각각 B, C라고 할 때, $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.

답 64

1 이차함수와 그래프

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 이차함수의 의미를 이해하게 한다.

② 이차함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

③ 함수의 최댓값과 최솟값의 의미를 이해하고, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
1-1 이차함수의 뜻	이차함수의 뜻
1-2 이차함수 $y=ax^2$의 그래프	이차함수 $y=ax^2$의 그래프
1-3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프	이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프
	이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프
	이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프
1-4 이차함수의 그래프의 성질	이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프
	이차함수의 식 구하기
	이차함수의 최댓값과 최솟값
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 102 쪽

1 이차함수와 그래프

준 | 비 | 학 | 습

함수
두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지면 y의 값도 단 하나로 정해지는 관계가 있을 때, y는 x의 함수라고 한다.

함수의 그래프
함수 $y=f(x)$에서 각 x의 값을 x좌표로 하고, x의 값에 대한 함숫값을 y좌표로 하는 순서쌍 (x, y)를 모두 좌표평면 위에 나타낸 것을 그 함수의 그래프라고 한다.

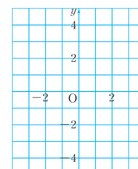
일차함수
함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식 $y=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)로 나타내어질 때, 이 함수 $y=f(x)$를 일차함수라고 한다.

일차함수의 그래프
일차함수 $y=ax+b$ $(a\neq0)$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.

1 다음에서 x와 y 사이의 관계식을 구하고, y가 x의 함수인지 말하여라.

> 한 권에 500원 하는 공책 x권의 값은 y원이다.

2 함수 $y=2x$의 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 오른쪽 좌표평면 위에 그 그래프를 그려라.

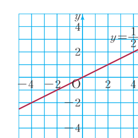


3 다음 중에서 일차함수를 모두 찾아라.

> ㉠ $y=2x+1$　　㉡ $y=x(x-1)$
> ㉢ $y=\frac{1}{2}x$　　㉣ $y=\frac{2}{x}$

4 오른쪽 그림은 일차함수 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\frac{1}{2}x+2$　　(2) $y=\frac{1}{2}x-3$



준비 학습의 해설

1

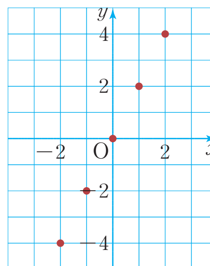
목표| 두 변수 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내고, 함수인지 판단할 수 있게 한다.

풀이| x와 y 사이의 관계식은 $\boldsymbol{y=500x}$이고, x의 값이 정해지면 y의 값도 단 하나로 정해지므로 **y는 x의 함수이다.**

2

목표| 주어진 x의 값에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이|



3

목표| 일차함수의 의미를 이해하고, 일차함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉡ $y=x(x-1)$에서 $y=x^2-x$

따라서 일차함수인 것은 ㉠, ㉢이다.

교과서 103 쪽

1-1 이차함수의 뜻

● 이차함수의 의미를 이해한다.

이차함수란 무엇인가?

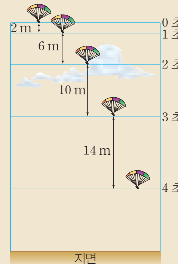
창의력 기르기

스카이다이빙

스카이다이빙은 고도 900~4000 m의 상공에서 뛰어내려 낙하산을 펴지 않고 여러 가지 기술을 보이거나 균형을 유지하며 낙하하다가 지상 가까이에서 낙하산을 펴서 착지하는 스포츠이다. 경기 종목으로는 공중에서 정해진 동작을 빠르고, 정확하게 하는 선수가 우승하는 스타일 강하와 목표 지점에 가장 가까이 착지하는 선수가 우승하는 정밀 강하 등이 있다.

탐구 활동

오른쪽 그림은 지상 1500 m 높이에서 낙하한 스카이다이버가 지상 1000 m 높이에서 낙하산을 펴서 내려오는 모습을 1초 간격으로 촬영하여 그 내려간 거리를 나타낸 것이다. 스카이다이버가 낙하산을 편 지 x초 후의 높이를 y m라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1 다음 표를 완성하여 보자.

x(초)	0	1	2	3	4
y(m)	1000		992		

2 y가 x의 함수인지 말하여 보자.

탐구 활동에서 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지면 y의 값이 단 하나로 [illegible]므로 y는 x의 함수이다.

❶ [illegible] y 사이의 관계식은

$$y=-2x^2+1000$$

으로 나타낼 수 있고, y는 x에 관한 이차식이 된다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 다양한 상황을 이용하여 이차함수의 의미를 다룬다.
2. 이차함수를 도입할 때 제한된 x값의 범위로 설명하였더라도 이차함수의 의미를 다룰 때에는 실수 전체를 x값의 범위로 하여 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 이차함수(二次函數, quadratic function)

창의력 기르기 참/고/자/료

스카이다이빙에 대한 보다 자세한 자료는 한국스카이다이빙협회 홈페이지(http://www.kpa.or.kr)에서 찾아볼 수 있다.

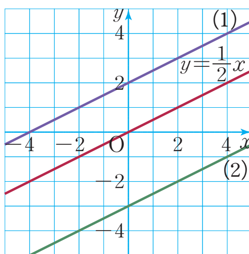
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 실생활에서 두 변수 사이의 관계를 표를 이용하여 알아봄으로써 이차함수의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

4

목표| 일차함수의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있게 한다.

풀이|



1-1 이차함수의 뜻

소단원 지도 목표

① 이차함수의 의미를 이해하게 한다.
② 이차함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

1. 낙하산을 편 지 1초 후의 높이는 $1000-2=998$(m)
낙하산을 편 지 3초 후의 높이는
$1000-(2+6+10)=982$(m)
낙하산을 편 지 4초 후의 높이는
$1000-(2+6+10+14)=968$(m)

x(초)	0	1	2	3	4
y(m)	1000	**998**	992	**982**	**968**

2. 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지면 y의 값도 단 하나로 정해지므로 **y는 x의 함수이다.**

본문 해설

❶ $x=1$일 때, $y=1000-2=1000-2\times1^2=998$
$x=2$일 때, $y=1000-8=1000-2\times2^2=992$
$x=3$일 때, $y=1000-18=1000-2\times3^2=982$
$x=4$일 때, $y=1000-32=1000-2\times4^2=968$
따라서 x와 y 사이의 관계식은 $y=-2x^2+1000$이다.

본문 해설

❶ 함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $a\neq0$이면 이차함수이다. 즉, $y=-2x^2+3$과 같이 $b=0$ 또는 $c=0$일 때에도 $a\neq0$이면 y는 이차함수이다.
한편 $y=ax^2+bx+c$에서 $a=0$이고 $b\neq0$이면 y는 일차함수이다.

교과서 104 쪽

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 이차식

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0,\ a,\ b,\ c\text{는 상수})$$

로 나타내어질 때, 이 함수 ❶)를 **이차함수**라고 한다.

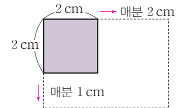
y는 x에 관한 이차함수
⇨ $y=$(x에 관한 이차식)

예 함수 $y=x^2+2x-4$ ... $+3$, $y=\frac{1}{3}x^2$은 y가 x에 관한 이차식으로 나타내어지므로 모두 이차함수이다.

참고 이차함수의 x값과 y값의 범위가 주어지지 않았을 때에는 이를 실수 전체로 생각한다.

예제 1

한 변의 길이가 2 cm인 정사각형에서 가로의 길이는 매분 2 cm씩, 세로의 길이는 매분 1 cm씩 동시에 늘어난다고 한다. x분 후 직사각형의 넓이를 y cm²라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.
(2) y는 x에 관한 이차함수인가?

풀이 (1) x분 후 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $(2+2x)$ cm, $(2+x)$ cm이므로 직사각형의 넓이는 $y=(2+2x)(2+x)$이다.
따라서 $y=2x^2+6x+4$이다.
(2) y가 x에 관한 이차식으로 나타내어지므로 y는 x에 관한 이차함수이다.

답 (1) $y=2x^2+6x+4$ (2) 이차함수이다.

문제

다음에서 y를 x에 관한 식으로 나타내고, 이차함수인 것을 모두 찾아라.

(1) 둘레의 길이가 12 cm인 직사각형의 가로의 길이는 x cm이고, 넓이는 y cm²이다.
(2) 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 부피는 y cm³이다.
(3) 시속 3 km로 걸어서 x시간 동안 간 거리는 y km이다.
(4) 반지름의 길이가 x cm인 구의 겉넓이는 y cm²이다.

목표| 실생활에서 두 변수 사이의 관계를 식으로 나타내고, 이차함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| (1) 둘레의 길이가 12 cm이므로
(가로의 길이)+(세로의 길이)=6(cm)
가로의 길이가 x cm일 때, 세로의 길이는 $(6-x)$ cm이므로 $y=x(6-x)$
따라서 $\boldsymbol{y=-x^2+6x}$이다.
(2) (정육면체의 부피)=(한 모서리의 길이)³
이므로 $\boldsymbol{y=x^3}$
(3) (거리)=(평균 속력)×(시간)이므로 $\boldsymbol{y=3x}$
(4) (구의 겉넓이)=$4\times\pi\times$(반지름의 길이)²
이므로 $\boldsymbol{y=4\pi x^2}$
따라서 이차함수인 것은 (1), (4)이다.

기/초/력 향상 문제

다음 중에서 이차함수를 모두 찾아라.

㉠ $y=2x-3$	㉡ $y=2x(x-1)$
㉢ $y=(x+2)^2$	㉣ $y=x^3+2x-1$
㉤ $y=9-x^2$	㉥ $y=\frac{5}{x^2}$

답 ㉡, ㉢, ㉤

지/도/자/료

1. y를 x에 관한 식으로 나타낼 때, 함수 $y=f(x)$의 우변을 정리하여 y가 x에 관한 이차식으로 나타나는 경우에만 이차함수임을 알게 한다.

2. a, b, c는 상수이고, $a\neq0$일 때
(1) ax^2+bx+c ⇨ 이차식
(2) $ax^2+bx+c=0$ ⇨ 이차방정식
(3) $y=ax^2+bx+c$ ⇨ 이차함수

교과서 105 쪽

예제 2 이차함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=x^2-x-2$라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $f(-3)$ (2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

풀이 (1) $f(-3)=(-3)^2-(-3)-2$
$=9+3-2=10$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2$
$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2=-\frac{9}{4}$

답 (1) 10 (2) $-\frac{9}{4}$

문제 2 이차함수 $y=-4x^2+2x+1$에서 x의 값이 0, 1, 2, 3일 때, 각 x의 값에 대한 함숫값을 구하여라.

문제 3 이차함수 $y=2x^2+bx+c$에 대하여 $x=1$일 때 $y=0$이고, $x=2$일 때 $y=9$라고 한다. $x=0$일 때 y의 값을 구하여라.

발전 문제 4 이차함수 $f(x)=3x^2+a$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(a)=10$을 만족시키는 a의 값을 모두 구하여라.

(2) x의 값이 -1, 0, 1일 때, 각 x의 값에 대한 함숫값의 총합을 9라고 하자. 이때 a의 값을 구하여라.

의사소통 문제 1과 같이 y를 x에 관한 식으로 나타내면 이차함수가 되는 예를 찾아 말하여 보자.

4

목표| 이차함수의 함숫값이 주어졌을 때 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(a)=3a^2+a=10$이므로

이차방정식 $3a^2+a-10=0$을 풀면

$(3a-5)(a+2)=0$

$\boldsymbol{a=\frac{5}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{a=-2}$

(2) $f(-1)=3\times(-1)^2+a=3+a$

$f(0)=3\times0^2+a=a$

$f(1)=3\times1^2+a=3+a$

이때 각 x의 값에 대한 함숫값의 총합이 9이므로 $(3+a)+a+(3+a)=9$

$\boldsymbol{a=1}$

2

목표| 이차함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x=0$일 때, $y=-4\times0^2+2\times0+1=\mathbf{1}$

$x=1$일 때, $y=-4\times1^2+2\times1+1=\mathbf{-1}$

$x=2$일 때, $y=-4\times2^2+2\times2+1=\mathbf{-11}$

$x=3$일 때, $y=-4\times3^2+2\times3+1=\mathbf{-29}$

3

목표| 이차함수의 식을 완성하고 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x=1$일 때 $y=0$이므로 $0=2+b+c$ ……①

$x=2$일 때 $y=9$이므로 $9=8+2b+c$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $b=3$, $c=-5$

따라서 이차함수 $y=2x^2+3x-5$이므로

$x=0$일 때 $y=2\times0^2+3\times0-5=\mathbf{-5}$

의/사/소/통

|출제 의도| 실생활에서 일어나는 이차함수로 나타낼 수 있는 예를 찾아봄으로써 이차함수의 의미를 확실히 이해하게 하기 위한 문제이다.

풀이|
- 한 변의 길이가 x m인 정사각형 모양의 밭의 넓이를 y m^{2}라고 하면 $y=x^2$인 관계가 성립한다.
- 윗변의 길이가 x m, 아랫변의 길이가 $3x$ m, 높이가 x m인 사다리꼴의 넓이를 y m^{2}라고 하면 $y=\frac{1}{2}(x+3x)x=2x^2$인 관계가 성립한다.
- 중력 가속도를 g라고 할 때, 자유 낙하시킨 물체의 x초 후의 이동 거리를 y m라고 하면 $y=\frac{1}{2}gx^2$인 관계가 성립한다.

1-2 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

소단원 지도 목표

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.
② 포물선, 축, 꼭짓점의 의미를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. $y=x^2$의 그래프를 그릴 때, x값의 간격을 점점 좁혀서 점의 개수를 늘려 x값의 범위가 수 전체가 되면 매끈한 곡선이 됨을 알게 한다.

2. $y=ax^2$에서 a의 부호에 따른 그래프의 특징과 a의 절댓값의 크기에 따른 그래프의 특징을 알게 한다.

3. 포물선의 엄밀한 뜻은 다루지 않는다.

교과서 106 쪽

1-2 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

● 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그릴 수 있다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 어떻게 그리는가?

탐 구 활 동

●준비물
모눈종이

활동지 3

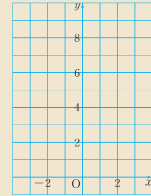
이차함수 $y=x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1 다음 표를 완성하여 보자.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

2 **1**에서 구한 순서쌍 $(x,\ y)$를 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.

3 x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 어떤 모양이 될지 추측하여 보자.



탐구 활동에서 x의 값이 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프에 대하여 알아보았다.

이제 x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그려 보자.
먼저 이차함수 $y=x^2$에서 x의 값이

$$-3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$$

일 때, x의 값에 대한 y의 값을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9

이 표에서 얻어지는 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내면 〈그림 1〉과 같다.
또 x의 값이 -3에서 3까지 0.25의 간격으로 변해 갈 때, 그 각각에 대응하는 y의 값을 구하여 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내면 〈그림 2〉와 같다.

새로 나온 용어와 기호

• 포물선(抛物線, parabola)
• 축(軸, axis)
• 꼭짓점(vertex)

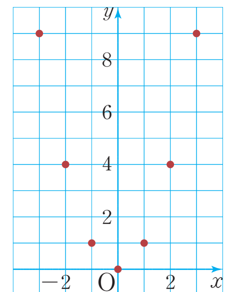
탐구 활동의 이해

활동 목표 • x와 y 사이의 관계를 나타내는 표를 완성하고 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내어 봄으로써 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 모양을 알게 하려는 것이다.
준비물 • 모눈종이

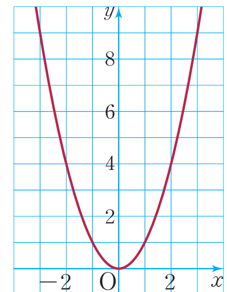
1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**

2. $(-3,\ 9)$, $(-2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 9)$이므로 이 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

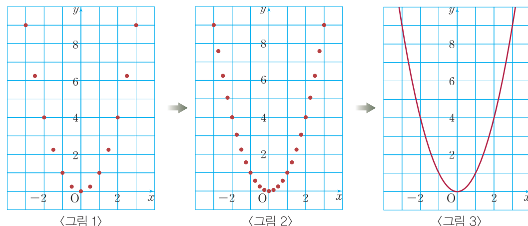


3. 오른쪽 그림과 같이 **2**에서 나타낸 점들을 곡선으로 연결한 모양이 된다.



이와 같은 방법으로 x값의 간격을 좁혀서 더 많은 점을 표시해 나가면 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 〈그림 3〉과 같이 매끈한 곡선으로 나타난다.

이차함수의 그래프는 두 점만으로는 그래프를 그리기 힘들다. 따라서 여러 개의 점을 찾아 이를 최대한 매끄러운 곡선으로 잇는다.



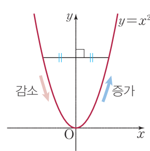
〈그림 1〉 〈그림 2〉 〈그림 3〉

위의 그림에서 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 원점을 지나고, 아래로 볼록하다.

또 x의 값이 -1과 1처럼 절댓값이 같고 부호가 반대일 때, 각각에 대응하는 y의 값은 같다. 즉, 이 그래프는 y축에 대칭임을 알 수 있다.

y축에 대칭이라는 말은 y축을 중심으로 그래프를 접었을 때, 그래프가 완전히 포개어진다는 말이다.

한편 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x의 값이 음수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, x의 값이 양수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가함을 알 수 있다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프

(1) 원점을 지나고, 아래로 볼록하다.
(2) y축에 대칭이다.
(3) $x<0$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고,
$x>0$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

❶ 이차함수 $y=x^2$의 그래프에서 원점 이외의 부분은 모두 x축보다 위쪽에 있다.

본문 해설

❶ 이차함수 $y=x^2$의 그래프에서 x값의 범위는 실수 전체이므로 $y=x^2\geq0$이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 y의 값은 음수가 될 수 없으므로 $y=x^2$의 그래프는 x축보다 아래쪽에는 나타나지 않는다.
이처럼 이차함수는 일차함수의 그래프와는 다르게 y값의 범위가 실수 전체가 되지 않는다.

주의| 모든 이차함수의 y값의 범위가 실수 전체는 아니지만 모두 $y\geq0$인 것은 아니다.

지/도/자/료

1. 이차함수에서 x의 값에 대한 함숫값의 증감을 일차함수와 동일하게 일정하다고 생각하는 학생들이 있다. $y=x^2$의 그래프를 그려 x값의 범위에 따라 증가하는 부분과 감소하는 부분이 있다는 것을 이해하도록 지도한다.

2. 함수를 나타낼 때,

$$y=x^2,\ f(x)=x^2$$

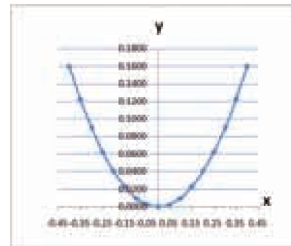
과 같이 두 가지의 표현을 사용함으로써 학생들에게 혼란을 가져다줄 수 있으므로 의미를 주의하여 지도한다.
$y=x^2$과 같이 표시하면 x의 값이 변할 때, y의 값이 변한다는 것이 쉽게 나타나지만 x의 값을 x^2의 값에 대응시키는 규칙을 명확하게 지시할 수 없다. 반면 $f(x)$는 x의 값에 대응하는 함숫값을 명확하게 지시하는 특성을 갖는다.

3. 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그릴 때, x의 값을 세분화하여 함숫값을 구하는 것은 많은 시간이 필요할 뿐만 아니라 좌표평면 위에 점을 정확하게 나타내기가 어렵다. 이러한 이유로 컴퓨터 프로그램이나 그래픽 계산기가 많이 활용되고 있는데, 다음은 스프레드시트 프로그램을 이용하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그리는 과정이다.

➊ 스프레드시트 프로그램을 실행한다.
➋ A1 셀에 'x', B1 셀에 'y', A2 셀에 '-0.4', A3 셀에 '-0.35'를 입력한다.
➌ A2 셀과 A3 셀을 블록으로 잡고 채우기 핸들을 이용하여 A18 셀까지 드래그한다.
➍ B2 셀에 '=A2^2'를 입력하고 B2 셀을 블록으로 잡고 채우기 핸들을 이용하여 B18 셀까지 드래그한다.

	A	B
1	x	y
2	-0.40	0.1600
3	-0.35	0.1225
4	-0.30	0.0900
5	-0.25	0.0625
6	-0.20	0.0400
7	-0.15	0.0225
8	-0.10	0.0100
9	-0.05	0.0025
10	0.00	0.0000
11	0.05	0.0025
12	0.10	0.0100
13	0.15	0.0225
14	0.20	0.0400
15	0.25	0.0625
16	0.30	0.0900
17	0.35	0.1225
18	0.40	0.1600

➎ A1 셀부터 B18 셀까지 블록으로 잡고 [삽입] – [차트] – [분산형] – [곡선 및 표식이 있는 분산형]을 선택하면 이차함수 $y=x^2$의 그래프가 그려진다.



교과서 108 쪽

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=ax^2\ (a>0)$의 그래프를 그릴 수 있다.

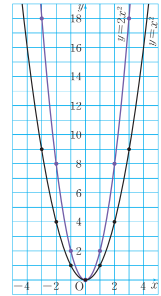
예 제 1 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 그려라.

이차함수 $y=ax^2\ (a>0)$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 a배로 하는 점을 잡아 그리면 된다.

풀이 x의 여러 가지 값에 대응하는 x^2, $2x^2$의 값을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$

위의 표에서 x의 각 값에 대하여 $2x^2$의 값은 항상 x^2의 값의 2배임을 알 수 있다. 따라서 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점의 y좌표를 2배로 하는 점을 잡아서 그리면 된다.
이때 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점을 지나고 아래로 볼록하며, y축에 대칭인 매끈한 곡선이 된다.

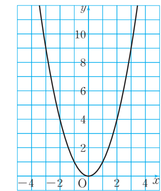


문 제 1 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2$의 그래프이다. 이것을 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$

(2) $y=3x^2$

(3) $y=\frac{1}{4}x^2$



문 제 2 문제 1에서 그래프의 폭이 좁은 것부터 차례로 나열하여라.

1

목표| 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 $y=ax^2\ (a>0)$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1)

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$\frac{1}{2}x^2$	$\cdots$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\cdots$

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점의 y좌표를 $\frac{1}{2}$배로 하는 점을 찍어 연결하여 그린다.

(2)

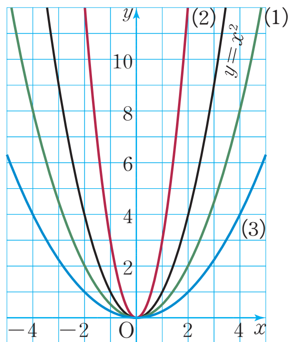
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$3x^2$	$\cdots$	27	12	3	0	3	12	27	$\cdots$

이차함수 $y=3x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점의 y좌표를 3배로 하는 점을 찍어 연결하여 그린다.

(3)

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$\frac{1}{4}x^2$	$\cdots$	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	$\cdots$

이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점의 y좌표를 $\frac{1}{4}$배로 하는 점을 찍어 연결하여 그린다.



2

목표| 이차함수의 그래프를 보고 그래프의 폭을 비교할 수 있게 한다.

풀이| 그래프의 폭이 좁은 것부터 차례로 나열하면 (2), (1), (3)이다.

참고| 이차함수 $y=ax^2\ (a>0)$의 그래프는 a의 값이 클수록 폭이 좁아진다.

이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-ax^2$ $(a>0)$의 그래프를 그릴 수 있다.

예 제 2 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 그려라.

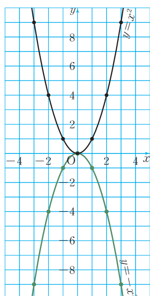
이차함수 $y=-ax^2$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프를 그리면 된다.

풀이 x의 여러 가지 값에 대응하는 x^2, $-x^2$의 값을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$

위의 표에서 x의 각 값에 대하여 $-x^2$의 값은 항상 x^2의 값과 절댓값이 같고 부호가 반대임을 알 수 있다. 따라서 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 …와 x축에 대칭인 그래프를 그리면 된다.

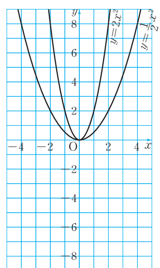
❶ …차함수 $y=-x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 …원점을 지나고 위로 볼록하며, y축에 대칭인 매끈한 곡선이 된다.



문제 3 오른쪽 그림은 이차함수 $y=2x^2$과 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프이다. 이것을 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=-2x^2$

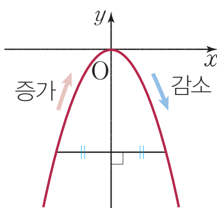
(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$



본문 해설

❶ 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는

- 위로 볼록하다.
- 원점을 지나며 그 점에서 가장 볼록하다.
- y축에 대칭이다. 즉, y축을 중심으로 접었을 때 완전히 포개어진다.
- $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
  $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



- 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.

3

목표| 이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프를 이용하여 $y=-ax^2$ $(a>0)$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1)

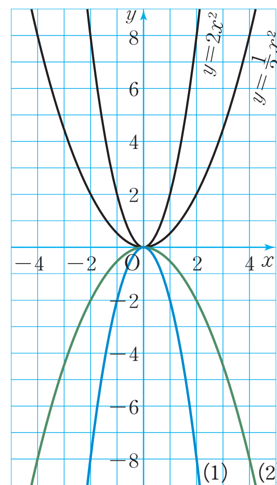
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$
$-2x^2$	$\cdots$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	$\cdots$

이차함수 $y=-2x^2$의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프이다.

(2)

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$\frac{1}{2}x^2$	$\cdots$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	$\cdots$
$-\frac{1}{2}x^2$	$\cdots$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	$\cdots$

이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프이다.



참고| 그래프의 폭이 좁은 것부터 나열하면 (1), (2)이다. 이때 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이므로 그래프의 폭이 같다.

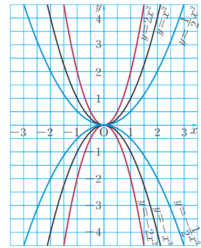
본문 해설

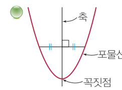
❶ 이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 a배로 하는 점을 잡아 그린 것이므로 a의 값이 커질수록 그래프의 폭이 좁아진다. 그리고 이차함수 $y=-ax^2$ $(a>0)$의 그래프는 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프와 x축에 대칭이므로 a의 값이 커질수록 그래프의 폭이 좁아진다.
따라서 이차함수 $y=ax^2$ $(a\neq0)$의 그래프는 a의 절댓값이 커질수록 그래프의 폭이 좁아진다.

❷ 이차함수 $y=ax^2$ $(a\neq0)$의 그래프는 절댓값이 같은 x의 값에 대하여 y의 값이 같으므로 y축에 대칭이 된다. 따라서 y축을 축으로 하는 포물선이고, y축과의 교점은 원점이므로 원점을 꼭짓점으로 한다.

교과서 110 쪽

오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$일 때에는 아래로 볼록하고, [illegible] 때에는 위로 볼록한 곡선이다.
❶ [illegible] 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아지고, [illegible] y축에 대칭이다.
한편 이차함수 $y=ax^2$과 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 서로 대칭이다.





이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 한다. 포물선은 한 직선에 대칭인 도형으로 그 직선을 포물선의 **축**이라 하고, 포물선과 축의 교점을 [illegible]선의 **꼭짓점**이라고 한다.
❷ [illegible] 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 y축을 축으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 [illegible]선이다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

이차함수 $y=ax^2$ $(a\neq0)$의 그래프
(1) 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.
(2) $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.
(3) a의 절댓값이 클수록 포물선의 폭이 좁아진다.
(4) $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.

문제 4 다음 이차함수의 그래프 중에서 아래로 볼록한 것을 모두 찾아라.

㉠ $y=3x^2$	㉡ $y=-5x^2$
㉢ $y=-\frac{1}{2}x^2$	㉣ $y=\frac{1}{3}x^2$

문제 5 문제 4에서 그래프의 폭이 좁은 것부터 차례로 나열하여라.

4

목표 이차함수 $y=ax^2$의 식을 보고 그래프의 모양을 판단할 수 있게 한다.

풀이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하므로 아래로 볼록한 것은 ㉠, ㉣이다.

5

목표 이차함수 $y=ax^2$의 식을 보고 그래프의 폭을 비교할 수 있게 한다.

풀이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아지므로 그래프의 폭이 좁은 것부터 차례로 나열하면 ㉡, ㉠, ㉢, ㉣이다.

읽/기/자/료 포물선

포물선(抛物線, parabola)이라는 용어는 갈릴레이(Galilei, G.: 1564~1642)의 발견에 근거하여 지어진 이름으로 포(抛)는 '던지다'라는 뜻이다. 즉, 포물선은 물건을 위로 던졌을 때 물체가 그리는 곡선을 의미한다.
그런데 여기서 주의할 것은 물체 그 자체의 운동과 운동 현상 속에 있는 두 변량 사이의 관계를 나타내는 그래프의 모양이 다를 수 있다는 것이다. 예를 들어 물체가 수직 방향으로 자유 낙하를 하는 경우나 전동차가 점점 빠르게 움직이는 경우 등을 관찰할 때, 그 시간과 거리의 관계를 나타내는 그래프는 포물선이 되지만, 그 물체의 운동 자체는 직선 운동을 하고 있다.
parabola는 고대 그리스의 수학자 아폴로니오스(Apollonios : ?B.C. 262~?B.C. 190)가 이름 붙인 것이다. 직원뿔을 모선에 평행한 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면을 '일치한다'라는 뜻의 parabola라고 하였다.

교과서 111 쪽

1-3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

● 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있다.

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 어떻게 그리는가?

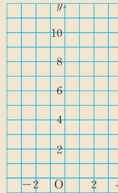
탐구 활동 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+3$에 대하여 다음 표를 완성하고, 물음에 답하여 보자.

●준비물
투명 종이, 연필

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$								$\cdots$
x^2+3	$\cdots$								$\cdots$

1 두 이차함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려 보자.

2 투명 종이에 $y=x^2$의 그래프를 옮겨 그린 후 y축의 방향으로 얼마만큼 이동시키면 $y=x^2+3$의 그래프와 겹치게 할 수 있는지 알아보자.



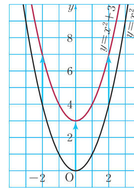
이차함수 $y=x^2+3$의 그래프를 그려 보자.

탐구 활동의 표에서 x의 각 값에 대하여 x^2+3의 값은 항상 x^2의 값보다 3만큼 크다는 것을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 ...프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

❶ ...로 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축을 축으로 하고, 점 $(0, 3)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

● 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 평행이동이라고 한다.



1-3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

소단원 지도 목표

① 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

② 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

③ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. $y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 $y=ax^2+q$의 그래프를 그릴 때, 포물선의 폭, 모양, 축은 변하지 않으나 꼭짓점의 좌표는 달라짐을 알도록 지도한다.

2. $y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 $y=a(x-p)^2$, $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 때, 포물선의 폭, 모양은 변하지 않으나 꼭짓점의 좌표, 축은 달라짐을 알도록 지도한다.

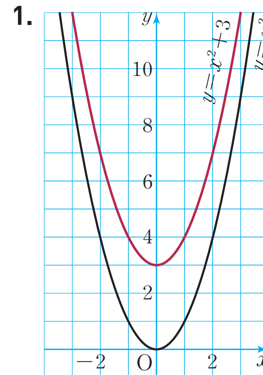
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 같은 x의 값에 대하여 x^2의 값과 x^2+3의 값 사이의 관계를 나타내는 표를 완성하고, 두 그래프를 한 좌표평면 위에 그려 봄으로써 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+3$의 그래프 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.

준비물 • 투명 종이, 연필

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**	$\cdots$
x^2+3	$\cdots$	**12**	**7**	**4**	**3**	**4**	**7**	**12**	$\cdots$

1.



2. 투명 종이에 $y=x^2$의 그래프를 옮겨 그린 후 y축의 방향으로 **3만큼** 평행이동하면 $y=x^2+3$의 그래프와 겹치게 할 수 있다.

본문 해설

❶ 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 이때 그래프의 폭, 모양, 축은 변하지 않고 꼭짓점만 y축의 방향으로 3만큼 이동하여 꼭짓점의 좌표는 $(0, 3)$이 된다.

본문 해설

❶ 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는

- $q>0$이면 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 양의 방향(위)으로 평행이동하여 그린다.
- $q<0$이면 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 음의 방향(아래)으로 평행이동하여 그린다.
- 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 y좌표는 변하고, 꼭짓점의 x좌표와 축은 변하지 않는다. 즉, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ q)$이고, y축을 축으로 한다. 또한 이차함수의 그래프를 평행이동하여도 a의 값은 변하지 않으므로 그래프의 모양과 폭은 변하지 않는다.

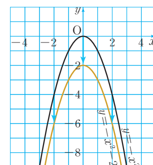
교과서 112 쪽

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

❶ 이차함수 $y=ax^2+q\ (a\neq0)$의 그래프
(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
(2) y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

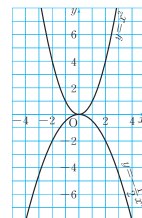
예제 1 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-x^2-2$의 그래프를 그려라.

● 풀이 이차함수 $y=-x^2-2$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이차함수 $y=-x^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.



문제 1 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=4x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인가?
(1) $y=4x^2-5$　　(2) $y=4x^2+1$

문제 2 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2$과 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프이다.
이것을 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.
(1) $y=x^2-4$
(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+2$



발전 **문제 3** 다음 이차함수의 그래프를 y축의 방향으로 [ ] 안의 값만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하고, 그 함수가 나타내는 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하여라.
(1) $y=x^2$ [4]　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2$ [−2]

1

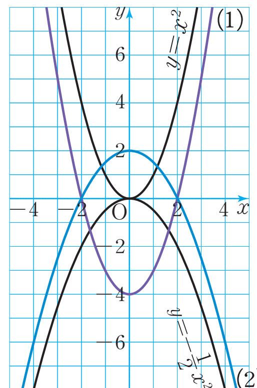
목표| 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인지 설명할 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=4x^2-5$의 그래프는 $y=4x^2$의 그래프를 **y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.**
(2) 이차함수 $y=4x^2+1$의 그래프는 $y=4x^2$의 그래프를 **y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.**

2

목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 이용하여 $y=ax^2+q$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=x^2-4$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.
(2) 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.



교과서 113 쪽

이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 어떻게 그리는가?

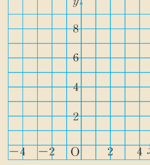
탐구 활동 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$에 대하여 다음 표를 완성하고, 물음에 답하여 보자.

● 준비물
투명 종이, 연필

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
x^2	…								…
$(x-2)^2$	…								…

1 두 이차함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려 보자.

2 투명 종이에 $y=x^2$의 그래프를 옮겨 그린 후 x축의 방향으로 얼마만큼 이동시키면 $y=(x-2)^2$의 그래프와 겹치게 할 수 있는지 알아보자.

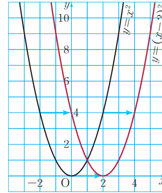


이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프를 그려 보자.

탐구 활동의 표에서 x의 값이 -3, -2, -1, 0, 1일 때의 x^2의 값과 x의 값이 -1, 0, 1, 2, 3일 때의 $(x-2)^2$의 값은 각각 서로 같음을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=2$를 축으로 하고, 점 (2, 0)을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.



직선 $x=2$는 y축에 평행한 직선이다.

일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

$y=a(x-p)^2$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-p$만큼이 아닌 p만큼 평행이동한 것이다.

❶ **수 $y=a(x-p)^2$ $(a\neq0)$의 그래프**

사함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

(2) 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p, 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

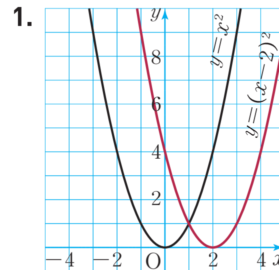
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 같은 x의 값에 대하여 x^2의 값과 $(x-2)^2$의 값 사이의 관계를 나타내는 표를 완성하고, 두 그래프를 한 좌표평면 위에 그려 봄으로써 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$의 그래프 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.

준비물 • 투명 종이, 연필

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
x^2	…	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**	…
$(x-2)^2$	…	**25**	**16**	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	…

1.



2. 투명 종이에 $y=x^2$의 그래프를 옮겨 그린 후 x축의 방향으로 **2만큼** 평행이동하면 $y=(x-2)^2$의 그래프와 겹치게 할 수 있다.

3

목표 | 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식과 그 함수가 나타내는 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 이차함수의 식은 $\boldsymbol{y=x^2+4}$이고, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 **(0, 4)**이다.

(2) 이차함수 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 이차함수의 식은 $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{3}x^2-2}$이고, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 **(0, −2)**이다.

본문 해설

❶ 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는

• $p>0$이면 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 양의 방향(오른쪽)으로 평행이동하여 그린다.

• $p<0$이면 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 음의 방향(왼쪽)으로 평행이동하여 그린다.

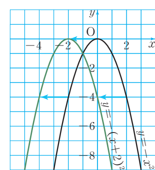
• 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 x좌표와 축의 방정식이 변한다. 즉, 꼭짓점의 좌표는 $(p, 0)$이고, 직선 $x=p$를 축으로 한다.

또한 이차함수의 그래프를 평행이동하여도 a의 값은 변하지 않으므로 그래프의 모양과 폭은 변하지 않는다.

교과서 114 쪽

예제 2 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-(x+2)^2$의 그래프를 그려라.

● 풀이 이차함수 $y=-(x+2)^2$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 이차함수 $y=-(x+2)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-2$를 축으로 하고, 점 $(-2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.



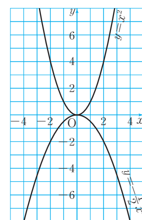
문제 4 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=3x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인가?

(1) $y=3(x+1)^2$ (2) $y=3(x-5)^2$

문제 5 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2$과 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프이다. 이것을 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=(x+3)^2$

(2) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$



문제 6 다음 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 [ ] 안의 값만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하고, 그 함수가 나타내는 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

(1) $y=2x^2$ [1] (2) $y=-\frac{1}{4}x^2$ [-3]

4

목표| 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인지 설명할 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=3(x+1)^2$의 그래프는 $y=3x^2$의 그래프를 **x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.**

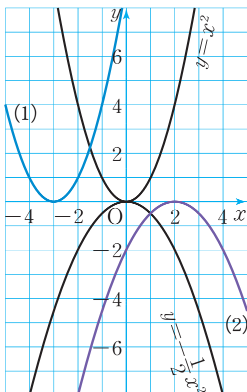
(2) 이차함수 $y=3(x-5)^2$의 그래프는 $y=3x^2$의 그래프를 **x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.**

5

목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 이용하여 $y=a(x-p)^2$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=(x+3)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 직선 $x=-3$을 축으로 하고, 점 $(-3,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

(2) 이차함수 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 직선 $x=2$를 축으로 하고, 점 $(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.



6

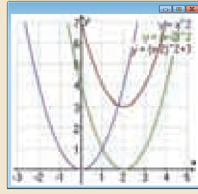
목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식과 그 함수가 나타내는 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 이차함수의 식은 $\boldsymbol{y=2(x-1)^2}$이고, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\boldsymbol{(1,\ 0)}$이다.

(2) 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 이차함수의 식은 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{4}(x+3)^2}$이고, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\boldsymbol{(-3,\ 0)}$이다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 어떻게 그리는가?

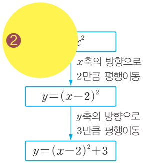
탐구 활동 오른쪽 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 이차함수 $y=x^2$, $y=(x-2)^2$, $y=(x-2)^2+3$의 그래프를 그린 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인가?

2 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 $y=(x-2)^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인가?

3 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동하면 $y=(x-2)^2+3$의 그래프와 겹치게 할 수 있는지 말하여 보자.

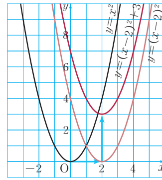


이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프를 그려 보자.

① $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 이것을 다시 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=(x-2)^2+3$의 그래프가 된다.

즉, 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=2$를 축으로 하고, 점 $(2,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.



일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ $(a\neq0)$의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

③ (2) 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 평행이동하여 $y=(x-2)^2+3$의 그래프와 겹치게 하는 과정을 통해 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2+3$의 그래프 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.

1. 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 **x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.**

2. 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 $y=(x-2)^2$의 그래프를 **y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.**

3. 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 **x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 이것을 다시 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하**면 $y=(x-2)^2+3$의 그래프와 겹치게 할 수 있다.

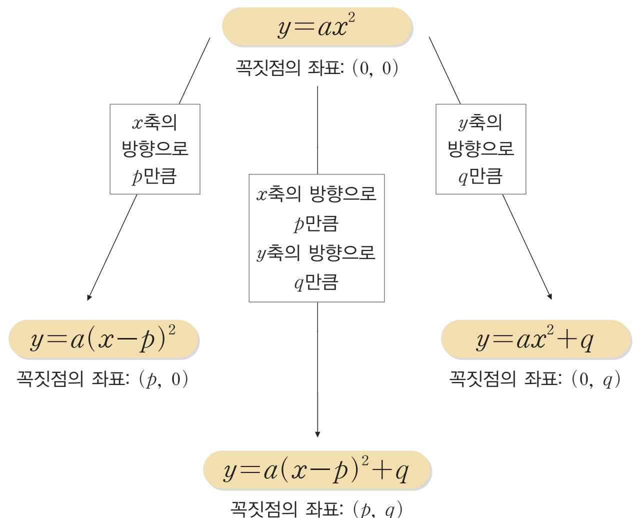
본문 해설

❶ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 때, 대응표를 만들지 않아도 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이라는 성질을 이용하여 그릴 수 있다.

❷ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프로 평행이동할 때, x축의 방향과 y축의 방향의 평행이동의 순서는 관계가 없다.
즉, x축의 방향으로 p만큼 이동한 후에 y축의 방향으로 q만큼 이동한 그래프와 y축의 방향으로 q만큼 이동한 후에 x축의 방향으로 p만큼 이동한 그래프는 서로 같은 그래프이다.

❸ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프이므로 축은 y축$(x=0)$에서 직선 $x=p$로, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$에서 $(p,\ q)$로 옮겨진다.
이때 a의 값은 그대로이므로 그래프의 폭과 모양은 변하지 않는다.

지/도/자/료 평행이동에 의한 꼭짓점의 좌표

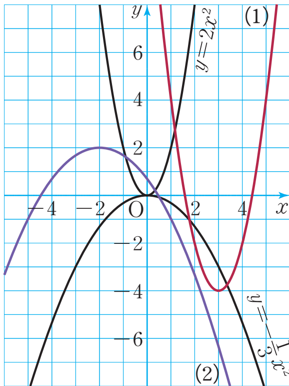


7

목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 이용하여 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=2(x-3)^2-4$의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 직선 $x=3$을 축으로 하고, 점 $(3,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

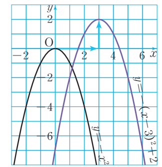
(2) 이차함수 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2+2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 직선 $x=-2$를 축으로 하고, 점 $(-2,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.



교과서 116 쪽

예 제 3 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-(x-3)^2+2$의 그래프를 그려라.

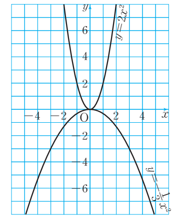
● 풀이 이차함수 $y=-(x-3)^2+2$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이차함수 $y=-(x-3)^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=3$을 축으로 하고, 점 (3, 2)를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.



문제 7 오른쪽 그림은 이차함수 $y=2x^2$과 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프이다. 이것을 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=2(x-3)^2-4$

(2) $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2+2$



발전 문제 8 다음 이차함수의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 [ ] 안의 값만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하여라. 또 그 함수가 나타내는 포물선의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

● 포물선의 축을 직선의 방정식으로 나타낸 것을 축의 방정식이라고 한다.

(1) $y=x^2$ [-2, 1]　　(2) $y=3x^2$ [3, -2]

(3) $y=\frac{1}{2}x^2$ [-1, -2]　　(4) $y=-2x^2$ [1, 2]

의사소통 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낼 때, a, p, q의 부호에 따라 그래프가 제 몇 사분면 위에 있는지 토의하여 보자. (단, $a\neq0$, $p\neq0$, $q\neq0$)

8

목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식과 그 함수가 나타내는 포물선의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=(x+2)^2+1$, 축의 방정식은 $x=-2$, 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다.

(2) $y=3(x-3)^2-2$, 축의 방정식은 $x=3$, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -2)$이다.

(3) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$, 축의 방정식은 $x=-1$, 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -2)$이다.

(4) $y=-2(x-1)^2+2$, 축의 방정식은 $x=1$, 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

의/사/소/통

|출제 의도| 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에서 a, p, q의 부호에 따라 그래프가 지나는 사분면을 생각해 봄으로써 이차함수의 그래프를 능숙하게 그리게 하기 위한 문제이다.

풀이| 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 a, p, q의 부호에 따라 다음과 같은 사분면을 지난다.

		$q>0$	$q<0$
$a>0$	$p>0$	제1, 2사분면	제1, 2, 4사분면 또는 모든 사분면
	$p<0$	제1, 2사분면	제1, 2, 3사분면 또는 모든 사분면
$a<0$	$p>0$	제1, 3, 4사분면 또는 모든 사분면	제3, 4사분면
	$p<0$	제2, 3, 4사분면 또는 모든 사분면	제3, 4사분면

교과서 117 쪽

1-4 이차함수의 그래프의 성질

- 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
- 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에는 어떤 성질이 있는가?

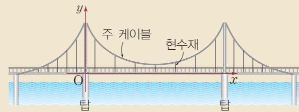
창의력 기르기

현수교

현수교는 두 개의 탑에 주 케이블을 걸친 후, 그 케이블에 현수재로 상판을 매달아 만든 다리이다.
현수교의 기원은 산악 지대의 원시 민족들이 덩굴을 나무에 매달아 계곡을 건너가는 수단으로 사용한 것이라고 할 수 있다. 한편 우리나라의 이순신 대교, 남해 대교, 영종 대교, 미국의 금문교 등이 바로 현수교이다.

탐 구 활 동

다음 그림과 같이 현수교의 주 케이블이 이차함수의 그래프인 포물선 모양이고, 왼쪽 탑으로부터의 수평 거리를 x m, 도로에서 주 케이블까지의 높이를 y m라고 할 때, x와 y 사이에는 $y=x^2-20x+105$인 관계가 있다고 하자. 이때 주 케이블의 모양이 어떤 포물선의 일부인지 알아보기 위하여 물음에 답하여 보자.



1 다음은 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$\begin{aligned} y&=x^2-20x+105 \\ &=(x^2-20x+\square-\square)+105 \\ &=(x^2-20x+\square)-\square+105 \\ &=(x-\square)^2+\square \end{aligned}$$

2 1을 이용하여 이차함수 $y=x^2-20x+105$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인지 말하여 보자.

새로 나온 용어와 기호

- 최댓값(absolute maximum)
- 최솟값(absolute minimum)

창의력 기르기 참/고/자/료

현수교의 주 케이블은 이차함수의 그래프인 포물선 모양이다. 현수교는 늘어뜨린 케이블을 통해 두 개의 탑에 하중이 전달되도록 하여 탑 사이에 긴 거리를 확보할 수 있다. 따라서 큰 배가 지나가야 하는 바다에는 두 개의 탑 사이로 배가 지나갈 수 있도록 현수교 형식으로 다리를 건설한다.
줄을 같은 높이의 양쪽에서 잡고 늘어뜨릴 때, 줄의 모양이 이루는 곡선을 현수선이라고 한다. 현수선 모양으로 처진 줄에 일정한 간격으로 하중을 주면 포물선의 모양으로 바뀌는데, 현수교도 마찬가지로 케이블에 일정한 간격으로 현수재를 이어 상판을 매달았으므로 케이블의 모양이 포물선이 된다.

1-4 이차함수의 그래프의 성질

소단원 지도 목표

① 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.
② 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 성질을 이해하게 한다.
③ 함수의 최댓값과 최솟값의 뜻을 알게 한다.
④ 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타낼 때, a의 부호에 유의하여 지도한다.

2. 이차함수의 최댓값과 최솟값은 x값의 범위가 실수 전체인 경우만 다룬다.

3. 이차함수의 x값의 범위가 실수 전체일 때, 항상 최댓값 또는 최솟값을 가진다는 것을 그래프를 통하여 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 이차함수 $y=ax^2$과 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.

1. $$\begin{aligned} y&=x^2-20x+105 \\ &=(x^2-20x)+105 \\ &=(x^2-20x+\boxed{100}-\boxed{100})+105 \\ &=(x^2-20x+\boxed{100})-\boxed{100}+105 \\ &=(x-\boxed{10})^2+\boxed{5} \end{aligned}$$

2. 1에서 $y=x^2-20x+105=(x-10)^2+5$이다.
따라서 이차함수 $y=x^2-20x+105$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 **x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.**

지/도/자/료

이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내는 방법은 다음과 같다.

$$y=ax^2+bx+c$$

↓ 이차항의 계수 a로 묶는다.

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

↓ 일차항의 계수의 $\frac{1}{2}$의 제곱을 더하고 뺀다.

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c$$

↓ 완전제곱식으로 고친다.

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

↓ 상수항을 정리한다.

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

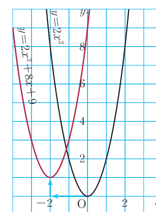
⇨ 꼭짓점: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$, 축: $x=-\frac{b}{2a}$

교과서 118 쪽

이차함수 $y=2x^2+8x+9$의 그래프를 그려 보자.

$y=2x^2+8x+9$의 우변을 (완전제곱식)+(상수항)의 꼴로 바꾸면 다음과 같다.

$y=2x^2+8x+9$
$=2(x^2+4x)+9$
$=2(x^2+4x+4)-8+9$
$=2(x+2)^2+1$



이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이차함수 $y=2x^2+8x+9$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 이차함수 $y=2x^2+8x+9$의 그래프는 직선 $x=-2$를 축으로 하고, 점 $(-2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

또 $x=0$일 때, $y=9$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 9)$이다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 다음과 같은 성질이 있다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$의 그래프

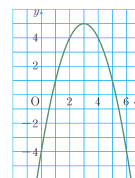
(1) $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어서 그린 그래프와 같다.
(2) y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, c)$이다.

예 제 1 이차함수 $y=-x^2+6x-4$의 그래프를 그려라.

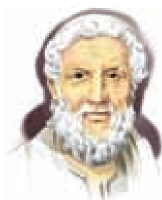
$y=-x^2+6x-4$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어야 한다.

풀이 $y=-x^2+6x-4$
$=-(x^2-6x)-4$
$=-(x^2-6x+9)+9-4$
$=-(x-3)^2+5$

따라서 이차함수 $y=-x^2+6x-4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=3$을 축으로 하고, 점 $(3, 5)$를 꼭짓점으로 하며 점 $(0, -4)$를 지나는 위로 볼록한 포물선이다.

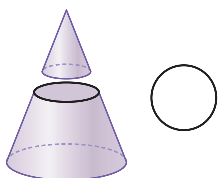


읽/기/자/료 원뿔곡선과 아폴로니오스

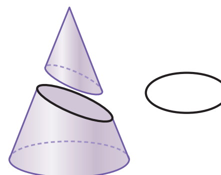


기원전 262년경에 남부 소아시아 지방에 있는 페르가에서 태어난 아폴로니오스(Apollonios: ?B.C. 262∼?B.C. 190)는 젊었을 때 알렉산드리아에서 유클리드의 후계자로부터 배웠고 결국 그곳에서 교수가 되었다. 그는 뛰어난 천문학자였으며 또 다양한 수학적 주제에 관한 저술을 남겼다. 그 시대 사람들이 그를 위대한 기하학자라고 칭한 이유는 그의 저서 "원뿔곡선론" 때문인데, 그는 이 책에서 하나의 원뿔을 기울기가 다른 평면으로 잘라 원, 타원, 포물선, 쌍곡선을 얻는 방법을 소개하였다.

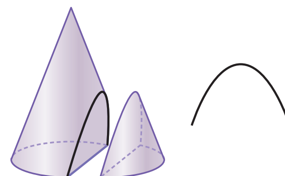
(1) 밑면에 평행한 평면으로 자르면 원을 얻을 수 있다.



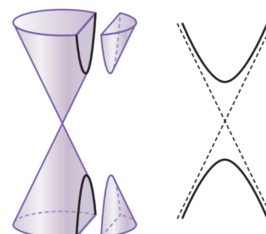
(2) 밑면에 비스듬한 평면으로 자르면 타원을 얻을 수 있다.



(3) 모선에 평행한 평면으로 자르면 포물선을 얻을 수 있다.



(4) 꼭지를 맞댄 두 개의 원뿔을 밑면에 수직인 평면으로 자르면 쌍곡선을 얻을 수 있다.

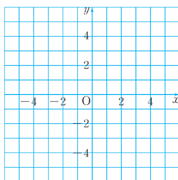


문제 1

다음 이차함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라. 또 이 그래프의 꼭짓점의 좌표와 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

(1) $y=2x^2-4x+4$

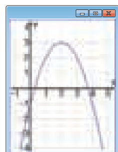
(2) $y=-3x^2-6x-2$



예제 2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(4,\ -1)$을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 3)$일 때, 이 이차함수의 식을 구하여라.

다음은 컴퓨터를 이용하여 주어진 이차함수의 그래프를 그린 것이다.



풀이 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로 구하는 이차함수의 식은

$$y=a(x-2)^2+3 \quad \cdots\cdots ①$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

또 이 그래프가 점 $(4,\ -1)$을 지나므로 ①에 $x=4$, $y=-1$을 대입하면

$$-1=a(4-2)^2+3$$

$$4a=-4,\ a=-1$$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-(x-2)^2+3$이므로

$$y=-x^2+4x-1$$

답 $y=-x^2+4x-1$

문제 2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(-1,\ 5)$를 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$일 때, 이 이차함수의 식을 구하여라.

창의 UP

이차함수 $y=-x^2-8x-10$의 그래프의 꼭짓점이 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2-k$의 그래프 위에 있을 때, k의 값을 구하는 방법을 설명하여라.

1

목표| 이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그래프를 그리고, 꼭짓점의 좌표와 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=2x^2-4x+4$

$=2(x^2-2x)+4$

$=2(x^2-2x+1)-2+4$

$=2(x-1)^2+2$

따라서 이차함수 $y=2x^2-4x+4$의 그래프는 점 $\mathbf{(1,\ 2)}$를 꼭짓점으로 하고, 점 $\mathbf{(0,\ 4)}$에서 y축과 만난다.

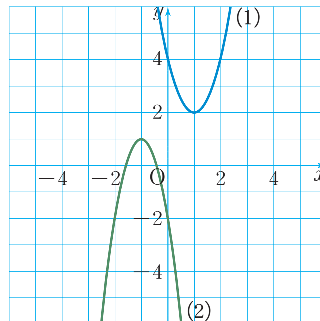
(2) $y=-3x^2-6x-2$

$=-3(x^2+2x)-2$

$=-3(x^2+2x+1)+3-2$

$=-3(x+1)^2+1$

따라서 이차함수 $y=-3x^2-6x-2$의 그래프는 점 $\mathbf{(-1,\ 1)}$을 꼭짓점으로 하고, 점 $\mathbf{(0,\ -2)}$에서 y축과 만난다.



2

목표| 꼭짓점의 좌표와 다른 한 점을 알 때, 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이므로 구하는 이차함수의 식을

$y=a(x+2)^2+3 \quad \cdots\cdots ①$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 또 이 그래프가 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로 ①에 $x=-1$, $y=5$를 대입하면

$5=a(-1+2)^2+3$

$a+3=5,\ a=2$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=2(x+2)^2+3$이므로

$\mathbf{y=2x^2+8x+11}$

창의 UP

|출제 의도| 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이| $y=-x^2-8x-10=-(x+4)^2+6$

따라서 이차함수 $y=-x^2-8x-10$의 그래프는 점 $(-4,\ 6)$을 꼭짓점으로 한다.

이 꼭짓점이 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2-k$의 그래프 위에 있으므로

$y=\frac{1}{4}x^2-k$에 $x=-4$, $y=6$을 대입하면

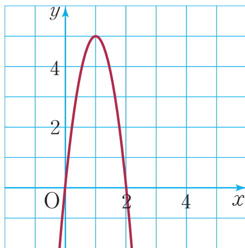
$6=\frac{1}{4}\times(-4)^2-k$이므로 $\quad k=\mathbf{-2}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이차함수의 그래프를 그려 보고, 물줄기가 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 알아봄으로써 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법을 이해하게 하려는 것이다.

1. $y=-5x^2+10x=-5(x-1)^2+5$

따라서 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $x=1$을 축으로 하고, 점 $(1,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.



2. 물줄기가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 **5 m**이다.

교과서 120 쪽

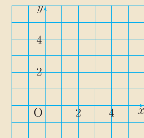
이차함수의 최댓값과 최솟값은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

포물선을 그리면서 떨어지는 어떤 분수의 물줄기에 대하여 분출구에서부터의 수평 거리를 x m, 물줄기의 높이를 y m라고 할 때, x와 y 사이에는 $y=-5x^2+10x$인 관계가 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

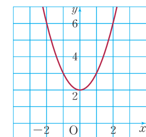
1 이차함수 $y=-5x^2+10x$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려 보자.

2 물줄기가 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 말하여 보자.



이차함수 $y=x^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 2)$이고, 아래로 볼록한 포물선이다.

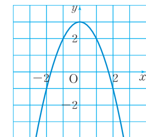
따라서 이차함수 $y=x^2+2$의 함숫값 중에서 가장 작은 값은 $x=0$일 때, $y=2$이다.



$y=x^2+2$에서 x의 값이 한없이 커지거나 작아질 때, y의 값은 한없이 커지므로 가장 큰 함숫값은 없다.

이차함수 $y=-x^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 3)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.

따라서 이차함수 $y=-x^2+3$의 함숫값 중에서 가장 큰 값은 $x=0$일 때, $y=3$이다.



$y=-x^2+3$에서 x의 값이 한없이 커지거나 작아질 때, y의 값은 한없이 작아지므로 가장 작은 함숫값은 없다.

❶ [illegible]이 어떤 함수에서 x값의 범위에 대한 함숫값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 [illegible]댓값이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 **최솟값**이라고 한다.

이를테면 이차함수 $y=x^2+2$의 최솟값은 $x=0$일 때 2이고, 최댓값은 없다. 또 이차함수 $y=-x^2+3$의 최댓값은 $x=0$일 때 3이고, 최솟값은 없다.

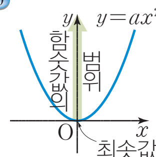
본문 해설

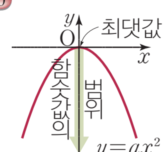
❶ 최댓값은 그래프의 최고 높이를 의미하고, 최솟값은 그래프의 최저 높이를 의미하므로 이차함수는 꼭짓점에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.
이때 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은 꼭짓점의 y좌표이다.

지/도/자/료

이차함수 $y=ax^2$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

- $a>0$일 때, $y=ax^2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 0)$이고 아래로 볼록한 포물선이므로 함숫값은 항상 0 이상이다. 따라서 이차함수 $y=ax^2(a>0)$은 $x=0$에서 최솟값 0을 가지고 최댓값은 없다.
- $a<0$일 때, $y=ax^2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 0)$이고 위로 볼록한 포물선이므로 함숫값은 항상 0 이하이다. 따라서 이차함수 $y=ax^2(a<0)$은 $x=0$에서 최댓값 0을 가지고 최솟값은 없다.



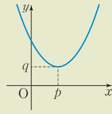


일반적으로 이차함수의 최댓값과 최솟값은 다음과 같이 구한다.

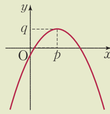
이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸었을 때,

(1) $a>0$인 경우
최솟값은 $x=p$일 때 q이고,
최댓값은 없다.



(2) $a<0$인 경우
최댓값은 $x=p$일 때 q이고,
최솟값은 없다.



이차함수의 그래프가 아래로 볼록한 경우에는 최솟값만 있고, 위로 볼록한 경우에는 최댓값만 있다.

예 제 3

다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하여라.

(1) $y=(x-2)^2-3$ (2) $y=-2(x-1)^2+3$

다음은 컴퓨터를 이용하여 주어진 이차함수의 그래프를 그린 것이다.

풀이 (1) 이 함수의 그래프는 점 $(2,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 최솟값은 $x=2$일 때 -3이고, 최댓값은 없다.
(2) 이 함수의 그래프는 점 $(1,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 최댓값은 $x=1$일 때 3이고, 최솟값은 없다.

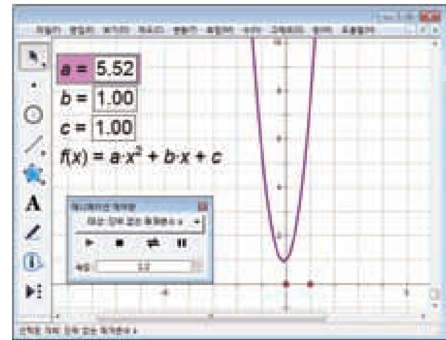
답 (1) 최솟값은 $x=2$일 때 -3이고, 최댓값은 없다.
(2) 최댓값은 $x=1$일 때 3이고, 최솟값은 없다.

문제 3 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하여라.

(1) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-4$ (2) $y=-(x-2)^2+2$

지/도/자/료

컴퓨터 프로그램은 학생들이 직접 도형을 그리고 탐구할 수 있게 해 줌으로써 내용을 쉽게 이해할 수 있도록 도와준다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $a,\ b,\ c$의 값이 다른 이차함수의 그래프를 여러 개 그리지 않고도 '매개변수에 애니메이션 주기'를 선택하면 자동으로 $a,\ b,\ c$의 값이 달라짐에 따른 그래프가 그려진다. 즉, $a,\ b,\ c$의 부호와 값의 크기에 따른 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 변화를 쉽게 관찰할 수 있다.



3

목표| 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-4$의 그래프는 점 $(3,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 **최솟값은 $x=3$일 때 -4이고, 최댓값은 없다.**

(2) 이차함수 $y=-(x-2)^2+2$의 그래프는 점 $(2,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 **최댓값은 $x=2$일 때 2이고, 최솟값은 없다.**

읽/기/자/료 꼭짓점

꼭짓점은 한자로 정점(頂點)을 번역한 것으로 평면도형에서는 변과 변의 교점이 꼭짓점이고, 입체도형에서는 모서리와 모서리의 교점이 꼭짓점이다. 또한 포물선에서는 축과 포물선의 교점이 꼭짓점이다.
정(頂)은 꼭대기, 맨 위를 의미하므로 정점은 꼭대기에 있는 점이라는 뜻이다. 그런데 꼭대기 대신 꼭짓점이라고 할 때 그것은 꼭대기에 있는 점이라는 의미뿐 아니라 맨 끝 부분에 있는 점이라는 의미로도 사용된 것으로 볼 수 있다.

4

목표| 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=2x^2+8x+4$

$=2(x+2)^2-4$

이므로 이 함수의 그래프는 점 $(-2,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 **최솟값은 $x=-2$일 때 -4이고, 최댓값은 없다.**

(2) $y=-3x^2+6x-5$

$=-3(x-1)^2-2$

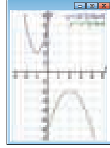
이므로 이 함수의 그래프는 점 $(1,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 **최댓값은 $x=1$일 때 -2이고, 최솟값은 없다.**

교과서 122 쪽

예제 4 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하여라.

(1) $y=3x^2+6x+5$ (2) $y=-x^2+4x-6$

다음은 컴퓨터를 이용하여 주어진 이차함수의 그래프를 그린 것이다.



풀이 (1) $y=3x^2+6x+5=3(x+1)^2+2$

이므로 이 함수의 그래프는 점 $(-1,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 최솟값은 $x=-1$일 때 2이고, 최댓값은 없다.

(2) $y=-x^2+4x-6=-(x-2)^2-2$

이므로 이 함수의 그래프는 점 $(2,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 주어진 이차함수의 최댓값은 $x=2$일 때 -2이고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최솟값은 $x=-1$일 때 2이고, 최댓값은 없다.
(2) 최댓값은 $x=2$일 때 -2이고, 최솟값은 없다.

문제 4 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하여라.

(1) $y=2x^2+8x+4$ (2) $y=-3x^2+6x-5$

발전 문제 5 최댓값은 $x=-2$일 때 1이고, 그래프가 점 $(-1,\ -3)$을 지나는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내어라.

함께 만들어요 문제 6 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

5

목표| 이차함수의 최댓값과 다른 한 점을 알 때, 그 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 이차함수의 최댓값이 $x=-2$일 때 1이므로 구하는 이차함수의 식은

$y=a(x+2)^2+1$ ······①

로 나타낼 수 있다.

또 이 그래프가 점 $(-1,\ -3)$을 지나므로 ①에 $x=-1$, $y=-3$을 대입하면

$-3=a(-1+2)^2+1$, $a=-4$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-4(x+2)^2+1$이므로 $\boldsymbol{y=-4x^2-16x-15}$

참고| $x=p$일 때, 최댓값 또는 최솟값이 q인 이차함수의 식은 다음과 같이 구한다.

❶ 구하는 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

❷ 주어진 다른 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

6

|출제 의도| 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 이차함수의 최댓값과 최솟값을 능숙하게 구할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

예시| 이차함수 $y=2x^2+8x-9$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이| $y=2x^2+8x-9$

$=2(x^2+4x+4)-8-9$

$=2(x+2)^2-17$

주어진 이차함수의 그래프는 점 $(-2,\ -17)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로 **최솟값은 $x=-2$일 때 -17이고, 최댓값은 없다.**

중 / 단 / 원 기초

함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 이차식 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 나타내어질 때, 이 함수 $y=f(x)$를 이차함수라고 한다.

1 다음 중에서 이차함수를 찾아라.

㉠ $y=2x-5$	㉡ $y=3x^2+1$
㉢ $y=5$	㉣ $y=x^2(x-2)+1$

2 다음 이차함수가 나타내는 포물선의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

(1) $y=4x^2$　　(2) $y=3x^2+2$

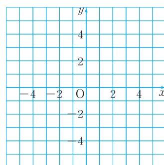
(3) $y=-(x+4)^2$　　(4) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$

3 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어라.

(2) 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구하여라.

(3) 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.



이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$인 경우, 최솟값은 $x=p$일 때 q이고 최댓값은 없다.
② $a<0$인 경우, 최댓값은 $x=p$일 때 q이고 최솟값은 없다.

4 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하여라.

(1) $y=2x^2$　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2+5$

(3) $y=2(x-3)^2-5$　　(4) $y=-3(x+1)^2+4$

중/단/원 기초

1

목표| 이차함수의 의미를 이해하고, 이차함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| 이차함수는 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 나타낼 수 있어야 하므로 ㉡이다.

2

목표| 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 축의 방정식: $\boldsymbol{x=0}$, 꼭짓점의 좌표: $\boldsymbol{(0,\ 0)}$

(2) 축의 방정식: $\boldsymbol{x=0}$, 꼭짓점의 좌표: $\boldsymbol{(0,\ 2)}$

(3) 축의 방정식: $\boldsymbol{x=-4}$, 꼭짓점의 좌표: $\boldsymbol{(-4,\ 0)}$

(4) 축의 방정식: $\boldsymbol{x=2}$, 꼭짓점의 좌표: $\boldsymbol{(2,\ -3)}$

3

목표| 이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=x^2-2x-3$

$=(x^2-2x+1)-1-3$

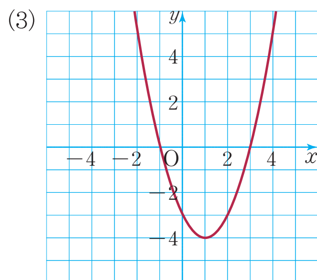
$=(x-1)^2-4$

따라서 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸면 $\boldsymbol{y=(x-1)^2-4}$이다.

(2) 꼭짓점의 좌표: $\boldsymbol{(1,\ -4)}$

축의 방정식: $\boldsymbol{x=1}$

(3)



4

목표| 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **최솟값은 $x=0$일 때 0이고, 최댓값은 없다.**

(2) **최댓값은 $x=0$일 때 5이고, 최솟값은 없다.**

(3) **최솟값은 $x=3$일 때 -5이고, 최댓값은 없다.**

(4) **최댓값은 $x=-1$일 때 4이고, 최솟값은 없다.**

중/단/원 기본

1

목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| (1) ㄷ, ㅁ, ㅂ

(2) 그래프의 폭이 가장 넓은 것은 ㅁ, 폭이 가장 좁은 것은 ㄴ이다.

(3) **ㄱ과 ㅂ, ㄷ과 ㄹ**

2

목표| y축과 만나는 점의 좌표와 꼭짓점의 좌표를 알 때, 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$인 이차함수의 식은 $y=a(x-2)^2+5$

이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=a(0-2)^2+5$, $4a=-4$, $a=-1$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-(x-2)^2+5$이므로 $\boldsymbol{y=-x^2+4x+1}$

교과서 124 쪽

중 / 단 / 원 기본

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

1 다음 보기의 이차함수의 그래프에 대하여 물음에 답하여라.

보기

ㄱ $y=-\frac{3}{2}x^2$ ㄴ $y=-2x^2$ ㄷ $y=\frac{2}{5}x^2$

ㄹ $y=-\frac{2}{5}x^2$ ㅁ $y=\frac{1}{3}x^2$ ㅂ $y=\frac{3}{2}x^2$

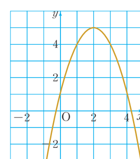
(1) 아래로 볼록한 것을 모두 찾아라.

(2) 그래프의 폭이 가장 넓은 것과 가장 좁은 것을 차례로 말하여라.

(3) x축에 대칭인 것끼리 짝지어라.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(0, 1)$을 지나고, 꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$이다. 이 이차함수의 식을 구하여라.



이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

3 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax+b$의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$를 지날 때, 이 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

4 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0, 4)$, $(-2, 20)$, $(2, -4)$를 지날 때, 이 이차함수의 식을 구하여라.

이차함수의 최댓값과 최솟값

5 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 최솟값은 $x=1$일 때 3이다. 이때 a, b의 값을 구하여라.

3

목표| 그래프 위의 두 점을 알 때, 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-\frac{1}{2}x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $b=2$

$y=-\frac{1}{2}x^2+ax+2$의 그래프가 점 $(-4, 0)$을 지나므로

$0=-8-4a+2$, $a=-\frac{3}{2}$

따라서 주어진 이차함수는

$y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$

이므로 구하는 꼭짓점의 좌표는 $\boldsymbol{\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)}$

4

목표| 그래프 위의 세 점을 알 때, 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0, 4)$, $(-2, 20)$, $(2, -4)$를 지나므로

$4=c$

$20=4a-2b+c$ ……①

$-4=4a+2b+c$ ……②

$c=4$를 ①, ②에 대입하여 정리하면

$2a-b=8$ ……③

$2a+b=-4$ ……④

③, ④를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-6$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $\boldsymbol{y=x^2-6x+4}$

5

목표| 이차함수의 최솟값을 알 때, 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 최솟값이 $x=1$일 때 3이므로 $y=(x-1)^2+3$

따라서 $y=x^2-2x+4$이므로 $\boldsymbol{a=-2, b=4}$

교과서 125 쪽

중/단/원 실력

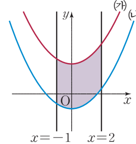
• 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.

1 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이 두 점 $(-2,\ 8)$, $(3,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

2 오른쪽 그림에서 두 이차함수

㈎ $y=\frac{1}{3}x^2+2$ ㈏ $y=\frac{1}{3}x^2-1$

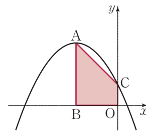
의 그래프와 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.



3 오른쪽 그림과 같은 이차함수

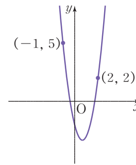
$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

의 그래프에 대하여 꼭짓점을 A, 그래프의 축과 x축과의 교점을 B, 그래프와 y축과의 교점을 C라고 할 때, 사다리꼴 ABOC의 넓이를 구하여라.



• $a>0$인 경우 $y=a(x-p)^2+q$의 최솟값은 $x=p$일 때 q이다.

4 오른쪽 그림은 두 점 $(-1,\ 5)$, $(2,\ 2)$를 지나는 이차함수 $y=3x^2+bx+c$의 그래프이다. 이 함수의 최솟값을 구하여라.



중/단/원 실력

1

목표| 이차함수의 식을 구하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

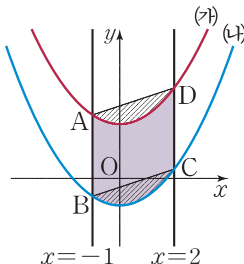
풀이| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(-2,\ 8)$을 지나므로 $a=2$

따라서 $y=2x^2$의 그래프가 점 $(3,\ k)$를 지나므로 $k=\mathbf{18}$

2

목표| 이차함수의 그래프의 평행이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이|



앞의 그림과 같이 ㈎, ㈏의 그래프와 직선 $x=-1$의 교점을 각각 A, B라 하고, ㈎, ㈏의 그래프와 직선 $x=2$의 교점을 각각 D, C라고 하자.

$y=\frac{1}{3}x^2+2$의 그래프는 $y=\frac{1}{3}x^2-1$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이므로 앞의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같다.

따라서 색칠한 부분의 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같고, $\overline{AB}=3$, (높이)$=3$이므로 구하는 넓이는 $3\times3=\mathbf{9}$

3

목표| 이차함수의 그래프에서 사다리꼴의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

따라서 꼭짓점은 $A(-2,\ 3)$이고 그래프의 축과 x축과의 교점은 $B(-2,\ 0)$, 그래프와 y축과의 교점은 $C(0,\ 1)$이므로 사다리꼴 ABOC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(3+1)\times2=\mathbf{4}$

4

목표| 그래프 위의 두 점을 알 때, 이차함수의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=3x^2+bx+c$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 5)$, $(2,\ 2)$를 지나므로

$5=3-b+c$에서 $-b+c=2$

$2=12+2b+c$에서 $2b+c=-10$

두 식을 연립하여 풀면 $b=-4$, $c=-2$

따라서 이차함수의 식은

$$y=3x^2-4x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{10}{3}$$

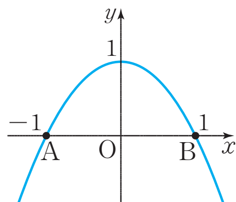
이므로 구하는 최솟값은 $x=\frac{2}{3}$일 때 $\mathbf{-\frac{10}{3}}$이다.

수행 과제

● 수행 과제 의도

이 수행 과제는 생활 주변에서 찾을 수 있는 포물선의 예를 이용하여 식으로 나타내어 봄으로써 이차함수의 그래프에 관한 내용을 정리하기 위한 것이다.

과제 1 _예시



위의 그림과 같이 점 A, B의 중점을 원점으로 하면 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 $y=ax^2+1$로 놓자.

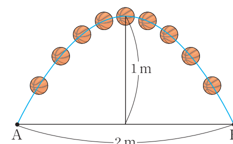
교과서 126 쪽

수행 과제

생활 속의 포물선

우리 생활 속에서 포물선 또는 비슷한 모양을 쉽게 관찰할 수 있다. 분수에서 떨어지는 물줄기, 불꽃놀이의 불꽃, 돌고래가 물에서 비스듬히 솟구쳐 올라 다시 떨어지는 경로 등은 모두 포물선 모양을 그린다.
또 농구 골대를 향해 던진 공은 포물선을 그리면서 공중으로 올라갔다가 아래로 떨어진다. 이때 농구공이 그리는 포물선을 나타내는 이차함수의 식을 구하여 보자.

과제 1 다음 그림과 같이 농구공이 이동한 수평 거리를 2 m, 농구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이와 점 A의 높이의 차가 1 m라고 하자. 점 A, B의 중점을 원점으로 하여 농구공의 이동 경로를 좌표평면 위에 나타낼 때, 이것을 나타내는 이차함수의 식을 구하여 보자.



과제 2 과제 1의 그림에서 점 A를 원점으로 하여 농구공의 이동 경로를 좌표평면 위에 나타낼 때, 이것을 나타내는 이차함수의 식을 구하여 보자.

교과서 127 쪽

학습에 대한 **자 / 기 / 평 / 가**

이름: ______

	점검 항목			
학습 내용	이차함수의 의미를 이해하였는가?			
	이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그릴 수 있는가?			
	이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있는가?			
	이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해하였는가?			
	이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?			
학습 태도	학습 준비물을 잘 준비하였는가?			
	수업 시간에 적극적으로 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			

재미있었거나 어려웠던 내용 적어 보기

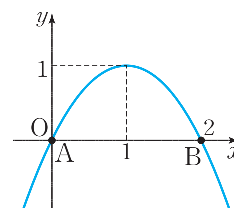
더 알고 싶거나 궁금한 점 적어 보기

스스로 평가하기

선생님 의견

이 포물선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$0=a+1,\ a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$\boldsymbol{y=-x^2+1}$

과제 2 _예시



위의 그림과 같이 점 A를 원점으로 하면 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 1)$이므로
$y=a(x-1)^2+1$로 놓자.
이 포물선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$0=a+1,\ a=-1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=-(x-1)^2+1$이므로 $\boldsymbol{y=-x^2+2x}$

지도 내용

1. 이차함수의 뜻과 그래프에 관련된 용어를 알고, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해할 수 있도록 한다. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 평행이동하여 이차함수 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$, $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있도록 한다.

만화로 보는 수학 이야기

만화에서 포탄이 날아가는 모양은 포물선이고, 포물선을 나타내는 식은 이차함수이다. 포탄이 날아가는 모양을 좌표평면 위에 나타내면 이차함수의 그래프를 이용하여 원하는 위치에 포탄을 명중시킬 수 있다.

생각 키/우/기

포탄의 날아가는 모양을 좌표평면 위에 나타낼 때, 두 대포의 위치의 좌표와 포탄의 최고 높이를 알면 이차함수의 식을 구할 수 있다.

교과서 128 쪽

대단원 핵심 한눈에 보기

① 이차함수의 뜻

이차함수	함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 이차식 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 나타내어질 때, 이 함수 $y=f(x)$를 이차함수라고 한다.

② 이차함수 $y=ax^2$ ($a\neq0$)의 그래프

이차함수의 그래프	(1) 포물선: 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 포물선이라고 한다. (2) 축: 포물선은 한 직선에 대칭인 도형으로 그 직선을 포물선의 축이라고 한다. (3) 꼭짓점: 포물선과 축의 교점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.
이차함수 $y=ax^2$의 그래프	(1) 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다. (2) $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다. (3) a의 절댓값이 클수록 포물선의 폭이 좁아진다. (4) $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.

③ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ ($a\neq0$)의 그래프

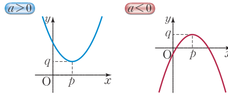
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프	(1) 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다. (2) 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

④ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프	(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어서 그린 그래프와 같다. (2) y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ c)$이다.

⑤ 이차함수의 최댓값과 최솟값

최댓값과 최솟값	(1) 최댓값: 어떤 함수에서 x값의 범위에 대한 모든 함숫값 중에서 가장 큰 값 (2) 최솟값: 어떤 함수에서 x값의 범위에 대한 모든 함숫값 중에서 가장 작은 값
이차함수의 최댓값과 최솟값	이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸었을 때, (1) $a>0$인 경우, 최솟값은 $x=p$일 때 q이고 최댓값은 없다. (2) $a<0$인 경우, 최댓값은 $x=p$일 때 q이고 최솟값은 없다.



이번 단원에서 배운 용어와 기호

• 이차함수, 포물선, 축, 꼭짓점, 최댓값, 최솟값

교과서 129 쪽

만화로 보는 수학 이야기

포탄을 명중시키려면?

나도 함수 공부 좀 할걸…….

생각 키/우/기

포탄을 명중시키려면 이차함수의 식이 필요하다. 이 식을 구하기 위해서는 무엇을 알아야 하는지 말하여 보자.

대 / 단 / 원 평 가 문 제

1

목표| y를 x에 관한 식으로 나타내고, 이차함수인지 판단할 수 있게 한다.

풀이| ① $y=4x$ ② $y=x^2+3x+2$
③ $y=3x$ ④ $y=\pi x^2$ ⑤ $y=5x$ **답** ②, ④

2

목표| 이차함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(-1)=2\times(-1)^2-3\times(-1)+1=6$

답 ②

3

목표| 이차함수의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| ① 폭이 가장 좁은 것은 ㉠, ㉡이다.
② 폭이 가장 넓은 것은 ㉢, ㉣이다.
④ ㉠과 ㉣은 아래로 볼록한 포물선이다.
⑤ ㉢과 ㉣은 직선 $x=0$을 축으로 한다.

답 ③

교과서 130 쪽

대 / 단 / 원 평 가 문 제

선/택/형

1 다음 중에서 y가 x에 관한 이차함수인 것을 모두 찾으면? (정답 2개)

① 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이 y cm
② 가로의 길이가 $(x+1)$ cm, 세로의 길이가 $(x+2)$ cm인 직사각형의 넓이 y cm^2
③ 밑변의 길이가 6 cm, 높이가 x cm인 삼각형의 넓이 y cm^2
④ 반지름의 길이가 x cm인 원의 넓이 y cm^2
⑤ 자동차가 시속 x km로 5시간 동안 달린 거리 y km

2 이차함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=2x^2-3x+1$이라고 할 때, $f(-1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

3 다음 이차함수의 그래프에 대한 설명 중에서 옳은 것은?

㉠ $y=2x^2$ ㉡ $y=-2x^2$
㉢ $y=-\frac{2}{3}x^2$ ㉣ $y=\frac{2}{3}x^2$

① 그래프의 폭이 가장 좁은 것은 ㉣이다.
② 그래프의 폭이 가장 넓은 것은 ㉠이다.
③ ㉠과 ㉡은 x축에 대칭이다.
④ ㉠과 ㉣은 위로 볼록하다.
⑤ ㉢과 ㉣은 직선 $x=\frac{2}{3}$를 축으로 한다.

4 다음 이차함수가 나타내는 그래프 중에서 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -3)$이 되도록 평행이동한 것은?

① $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$
② $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$
③ $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$
④ $y=(x-2)^2+3$
⑤ $y=(x+2)^2-3$

5 다음 이차함수가 나타내는 그래프 중에서 $y=-2x^2$의 그래프를 평행이동하면 포개어지는 것은?

① $y=2x^2-4$ ② $y=2(x-2)^2$
③ $y=x^2-2$ ④ $y=-2x^2-4x$
⑤ $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

6 다음 중에서 이차함수 $y=-3(x-1)^2+2$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 위로 볼록한 포물선이다.
② 축의 방정식은 $x=1$이다.
③ 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이다.
④ $x<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
⑤ 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프를 평행이동한 것이다.

4

목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 평행이동한 그래프를 나타내는 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축과 y축의 방향으로 각각 -2, -3만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -3)$이 된다. 즉, 평행이동한 이차함수의 식은
$y=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$ **답** ②

5

목표| 이차함수의 그래프가 평행이동하여 서로 포개어지기 위한 조건을 알게 한다.

풀이| x^2의 계수가 같은 식을 찾는다. **답** ④

6

목표| 이차함수의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| ③ 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다. **답** ③

7

목표| 그래프를 보고 이차함수 $y=a(x-p)^2$에서 a, p의 부호를 구할 수 있게 한다.

풀이| 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
그래프의 꼭짓점의 x좌표가 원점보다 오른쪽에 있으므로
$p>0$ **답** ②

8

목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 평행이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

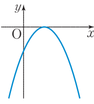
풀이| $m=-4$, $n=-3$이므로 $m+n=-7$ **답** ①

9

목표| 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=x^2+6x+4=(x+3)^2-5$이므로 축의 방정식은 $x=-3$이고 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -5)$이다. **답** ⑤

7 오른쪽 그림은 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프이다. a, p의 부호는?



① $a<0$, $p<0$
② $a<0$, $p>0$
③ $a>0$, $p<0$
④ $a>0$, $p>0$
⑤ $a<0$, $p=0$

8 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 $y=2(x+4)^2-3$의 그래프가 되었다. 이때 $m+n$의 값은?

① -7 ② -5 ③ -1
④ 1 ⑤ 7

9 이차함수 $y=x^2+6x+4$의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 차례로 구하면?

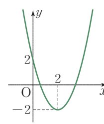
① $x=3$, $(3, 5)$
② $x=3$, $(3, -5)$
③ $x=3$, $(-3, -5)$
④ $x=-3$, $(-3, 5)$
⑤ $x=-3$, $(-3, -5)$

10 이차함수 $y=-x^2+6x+3$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소하는 x값의 범위는?

① $x>0$ ② $x<3$
③ $x>3$ ④ $x<6$
⑤ $0<x<6$

서/답/형

11 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 이차함수의 식을 구하여라.



12 농구 골대를 향해 비스듬히 던진 공의 t초 후의 높이를 h m라고 할 때, t와 h 사이에는 $h=-5t^2+10t+1$인 관계가 성립한다고 하자. 이 공의 최고 높이를 구하여라.

| 서술형 |

13 이차함수 $y=2(x-1)^2-3$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 -3, 4만큼 평행이동한 그래프가 점 $(a, 9)$를 지날 때, a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

| 서술형 |

14 최솟값은 $x=-1$일 때 -3이고, 그래프가 점 $(1, 5)$를 지나는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

10

목표| 이차함수의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소하는 x값의 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-x^2+6x+3=-(x-3)^2+12$의 그래프는 꼭짓점이 $(3, 12)$이고 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 x의 값이 증가할 때, y의 값이 감소하는 x값의 범위는 $x>3$이다.

답 ③

11

목표| 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$이므로
$y=a(x-2)^2-2$
그래프가 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 2)$이므로
$2=a(0-2)^2-2$, $a=1$
따라서 구하는 이차함수의 식은
$y=(x-2)^2-2=x^2-4x+2$

답 $y=x^2-4x+2$

12

목표| 이차함수의 최댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $h=-5t^2+10t+1=-5(t-1)^2+6$이므로 최고 높이는 6 m이다.

답 6 m

13

목표| 이차함수의 그래프의 평행이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 -3, 4만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(1, -3)$에서 $(-2, 1)$로 옮겨지므로 평행이동한 이차함수의 식은
$y=2(x+2)^2+1$ …㉠
그래프가 점 $(a, 9)$를 지나므로
$9=2(a+2)^2+1$, $9=2a^2+8a+9$
$2a(a+4)=0$
$a=0$ 또는 $a=-4$ …㉡

답 $a=0$ 또는 $a=-4$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	평행이동한 이차함수의 식 구하기 ㉠	70 %
답 구하기	a의 값 구하기 ㉡	30 %

14

목표| 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 $x=-1$일 때 최솟값 -3을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -3)$이다.
$y=a(x+1)^2-3$ …㉠
그래프가 점 $(1, 5)$를 지나므로 $5=a(1+1)^2-3$
$a=2$ …㉡
따라서 $y=2(x+1)^2-3=2x^2+4x-1$에서 …㉢
$a=2$, $b=4$, $c=-1$이므로 $a+b+c=5$ …㉣

답 5

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$y=a(x+1)^2-3$으로 나타내기 ㉠	30 %
	a의 값 구하기 ㉡	30 %
	$y=2x^2+4x-1$로 나타내기 ㉢	20 %
답 구하기	$a+b+c$의 값 구하기 ㉣	20 %

컴퓨터의 활용

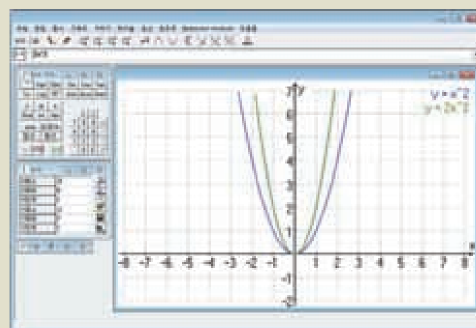
컴퓨터로 이차함수의 그래프를 그려 보자.

컴퓨터를 활용하여 이차함수의 그래프에 대한 다양한 학습 활동과 흥미 있는 경험을 할 수 있다. 적절한 소프트웨어를 이용하여 이차함수의 그래프에 대하여 알아보자.

1 이차함수 $y=x^2$, $y=2x^2$의 그래프를 하나의 좌표평면 위에 그려 보자.

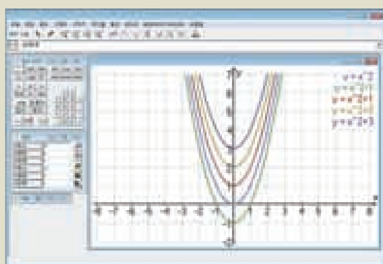
1. 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그려 보자.
이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그리기 위하여 초기 화면의 수식 입력란에 'x^2'를 입력하고, 아이콘 을 누르거나 를 누르면 그래프 창에 그래프가 그려진다.

2. 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 그려 보자.
이차함수 $y=x^2$의 그래프가 그려진 상태에서 수식 입력란에 '2x^2'를 입력하고, 아이콘 을 누르거나 를 누르면 그래프 창에 이차함수 $y=2x^2$의 그래프가 함께 그려진다.

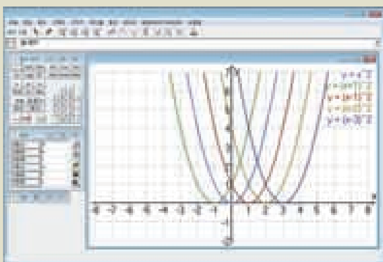


2 이차함수의 그래프에 대하여 알아보자.

1. 이차함수 $y=x^2$, $y=x^2-1$, $y=x^2+1$, $y=x^2+2$, $y=x^2+3$의 그래프를 하나의 좌표평면 위에 그려 보면, $y=x^2+q$의 그래프는 모두 $y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.



2. 이차함수 $y=x^2$, $y=(x+1)^2$, $y=(x-1)^2$, $y=(x-2)^2$, $y=(x-3)^2$의 그래프를 하나의 좌표평면 위에 그려 보면, $y=(x-p)^2$의 그래프는 모두 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.



교과서 134 쪽

수학 산책

포물선을 그리며 이동하는 태풍

지구의 날씨가 변하는 주된 원인은 태양으로부터 오는 열이다. 지구가 자전하면서 낮과 밤이 생기고 태양의 주위를 공전하면서 계절의 변화가 생기는데, 이때 지구가 태양으로부터 받는 열량의 차이가 발생한다. 즉, 대륙과 바다, 적도와 극지방과 같이 지역 조건에 따른 열적 불균형이 일어나는데, 이와 같은 불안정한 상태가 균형을 이루기 위하여 대기가 대류하면서 비나 눈이 내리고, 바람이 불고, 태풍이 생기는 등 날씨의 변화가 생기게 된다.

태풍은 최대 풍속이 초속 17 m 이상인 열대 저기압을 말하며, 한 해에 보통 3개 정도의 태풍이 우리나라에 영향을 미친다.

1959년 9월 제주 및 남해안 지방을 강타하여 낙동강과 섬진강을 범람시킨 태풍 '사라(SARAH)'는 우리나라에 매우 큰 피해를 입힌 태풍으로 손꼽힌다. 이 태풍은 약 2760억 원(2006년 환산 가격 기준)의 재산 피해와 849명이 사망하거나 실종하는 인명 피해를 입혔다. 또 2002년 8월에 발생한 '루사(RUSA)'는 약 5조 8329억 원(2006년 환산 가격 기준)의 엄청난 재산 피해를 입혔다.

한편 1936년 8월에 발생한 태풍은 1232명이 사망하거나 실종된 것으로 기록되어 있는데 당시에는 태풍에 이름을 붙이지 않아 태풍 3693호로 기록되어 있다.

교과서 135 쪽

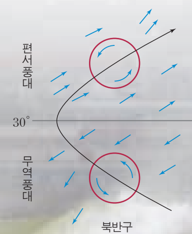
태풍은 며칠 동안 계속되고 같은 지역에서 동시에 여러 개의 태풍이 있을 수 있기 때문에 혼동하지 않도록 1953년부터 태풍에 이름을 붙이기 시작하였다. 북서 태평양에서 발생하여 주로 우리나라에 영향을 미치는 태풍의 이름은 1999년까지 괌에 위치한 미국 합동 태풍 경보 센터에서 정한 이름을 사용하였다.

그러나 2000년부터는 아시아 태풍 위원회에서 아시아 각국 국민들의 태풍에 대한 관심을 높이고 태풍 경계를 강화하기 위해서 태풍의 이름을 아시아 14개국의 고유한 이름으로 변경하여 사용하고 있다.

우리나라에서는 '개미', '나리', '장미', '미리내', '노루', '제비', '너구리', '고니', '메기', '독수리' 등의 이름을 제출하였고, 북한에서도 '기러기' 등 10개의 이름을 제출하여 한국어 이름의 태풍이 많아졌다.

북태평양에서 발생한 태풍이 진행하는 경로를 살펴보면 포물선 형태를 그리며 이동한다는 것을 알 수 있다. 대부분의 태풍이 포물선 궤도를 그리며 진행하므로 그 궤도를 연장하여 앞으로 어느 곳을 지나갈 것인지 예측할 수 있다.

오른쪽 그림에서 태풍은 북쪽으로 이동하고 있다. 이때 처음에 태풍이 북서 방향으로 이동하는 것은 이 위도대에 불고 있는 북동 무역풍 때문이며, 위도 30° 이후에는 편서풍대로 들어가므로 태풍의 방향은 북동쪽으로 바뀌게 된다. 따라서 태풍이 그림과 같이 포물선 형태를 그리며 움직이게 되는 것이다.



참고 '커다란 바람'이라는 뜻으로 '클 태(太)' 자를 사용한 '태풍(太風)'으로 잘못 알고 있는 경우가 있다. 그러나 태풍은 한자로 '颱風'으로 쓰며, 이때 사용된 '태' 자는 '태풍 태(颱)'이다.

선/택/형

1 다음 중에서 이차함수를 모두 찾으면? (정답 2개) [5점]

① $y=\frac{1}{x^2}+1$　② $y=3x^2+5x$
③ $y=(x+3)^2-x^2$　④ $y=2$
⑤ $y=5-x^2$

2 함수 $y=(a-2)x^2+(a-1)x-2$가 이차함수일 때, a의 값이 될 수 없는 것은? [5점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

3 다음 중에서 y가 x에 관한 이차함수인 것은? [5점]

① 둘레의 길이가 30 cm인 직사각형의 가로의 길이 x cm와 세로의 길이 y cm
② 밑변의 길이가 x cm이고, 높이가 4 cm인 삼각형의 넓이 y cm^2
③ x개의 변을 가진 다각형의 대각선의 총수 y개
④ 한 변의 길이가 x cm인 정육면체의 부피 y cm^3
⑤ 반지름의 길이가 x cm인 원의 둘레의 길이 y cm

4 이차함수 $f(x)=2x^2-3x-1$에서 $f(a)=1$일 때, 정수 a의 값은? [5점]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

5 다음 이차함수의 그래프 중에서 아래로 볼록한 것을 모두 고르면? (정답 2개) [5점]

① $y=\frac{1}{2}x^2$　② $y=-5x^2$　③ $y=7x^2$
④ $y=-3x^2$　⑤ $y=-8x^2$

6 다음 중에서 이차함수의 그래프의 폭이 넓은 것부터 차례로 나열한 것은? [5점]

ㄱ $y=\frac{3}{2}x^2$　ㄴ $y=-\frac{1}{2}x^2$　ㄷ $y=\frac{2}{3}x^2$
ㄹ $y=-x^2$　ㅁ $y=\frac{1}{4}x^2$

① ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㄴ, ㄹ　② ㄱ, ㄹ, ㄷ, ㄴ, ㅁ
③ ㄹ, ㄴ, ㅁ, ㄷ, ㄱ　④ ㅁ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㄱ
⑤ ㅁ, ㄷ, ㄴ, ㄹ, ㄱ

7 다음 조건을 만족시키는 그래프를 나타내는 이차함수의 식은? [6점]

- 축의 방정식은 $x=3$이다.
- 위로 볼록한 포물선이다.
- 그래프의 폭이 $y=-x^2$의 그래프의 폭보다 좁다.

① $y=-\frac{2}{3}(x-3)^2$　② $y=-\frac{2}{3}(x+3)^2$
③ $y=-\frac{3}{2}(x-3)^2$　④ $y=-\frac{3}{2}(x+3)^2$
⑤ $y=\frac{2}{3}(x-3)^2$

8 다음 이차함수가 나타내는 그래프 중에서 $y=-2(x+3)^2-5$의 그래프를 평행이동하면 포개어지는 것은? [5점]

① $y=x^2+3x+1$　② $y=-(x-1)^2$
③ $y=2x^2-4$　④ $y=-2x^2+1$
⑤ $y=4(x-3)^2+1$

9 이차함수 $y=-2x^2+4x+1$의 최댓값을 a라 하고, 이차함수 $y=2x^2-4x$의 최솟값을 b라고 할 때, $a-b$의 값은? [6점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

10 다음 중에서 이차함수 $y=2x^2-12x+22$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? [6점]

① 위로 볼록한 포물선이다.
② 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프보다 폭이 넓다.
③ 축의 방정식은 $x=3$이다.
④ 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -4)$이다.
⑤ 최댓값은 $x=3$일 때 4이다.

서/답/형

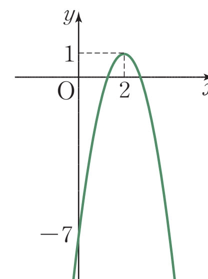
11 다음 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하여라. [6점]

(1) $y=2x^2-3$
(2) $y=-2(x-4)^2+6$

12 다음 이차함수의 그래프를 x축, y축의 방향으로 [ ] 안의 값만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하여라. [8점]

(1) $y=2x^2$ $[-1,\ 3]$
(2) $y=-\frac{1}{3}x^2$ $[2,\ -1]$

13 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 이차함수의 식을 구하여라. [7점]



14 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라. [8점]

(1) $y=3(x-3)^2+4$
(2) $y=-\frac{1}{3}x^2+4x$

| 서술형 |

15 이차함수 $y=-(x-2)^2-1$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$, 축의 방정식을 $x=m$이라고 할 때, 상수 p, q, m의 합 $p+q+m$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [9점]

| 서술형 |

16 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 25)$, $(-1,\ 1)$을 지날 때, 이 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [9점]

60점 미만이면 **하 · 수준** 문제를, 60점 이상 80점 미만이면 **중 · 수준** 문제를, 80점 이상이면 **상 · 수준** 문제를 풀어 보세요.

하·수준

1 다음 중에서 이차함수를 모두 찾아라.

㉠ $y=3x-5$	㉡ $y=3x^2+4x$	㉢ $y=-5$
㉣ $y=\frac{3}{x}$	㉤ $y=\frac{1}{2}x-5$	㉥ $y=-4x^2+6$

2 다음 중에서 이차함수 $y=3x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 찾아라.

ㄱ. x축에 대칭이다.
ㄴ. 점 $(-2,\ -12)$를 지난다.
ㄷ. $y=-4x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.
ㄹ. 위로 볼록한 그래프이다.
ㅁ. $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

3 다음 이차함수의 그래프 중에서 지나는 사분면이 다른 하나를 찾아라.

㉠ $y=-3x^2$	㉡ $y=-2x^2$	㉢ $y=-\frac{1}{4}x^2$
㉣ $y=-0.2x^2$	㉤ $y=\frac{1}{3}x^2$	

4 이차함수 $y=\frac{1}{5}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하여라.

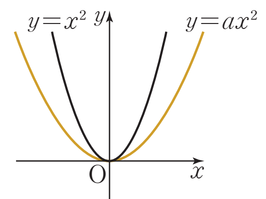
5 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+2$가 $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다고 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.

중·수준

1 다음 중에서 y가 x에 관한 이차함수인 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 반지름의 길이가 x cm인 구의 겉넓이 y cm^2
ㄴ. 자동차가 시속 100 km로 x시간 동안 달린 거리 y km
ㄷ. 반지름의 길이가 x cm, 높이가 10 cm인 원기둥의 부피 y cm^3
ㄹ. 가로의 길이가 $2x$ cm, 세로의 길이가 $(x+3)$ cm인 직사각형의 둘레의 길이 y cm
ㅁ. 아랫변의 길이가 x cm, 윗변의 길이가 $(x-2)$ cm, 높이가 4 cm인 사다리꼴의 넓이 y cm^2

2 이차함수 $y=x^2$과 $y=ax^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.



3 이차함수 $y=3x^2+bx+c$에서 $x=1$일 때 $y=0$이고, $x=2$일 때 $y=4$라고 한다. $x=0$일 때, y의 값을 구하여라.

4 다음 중에서 이차함수 $y=2x^2-12x+16$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것을 찾아라.

ㄱ. 축의 방정식은 $x=-3$이다.
ㄴ. y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 16)$이다.
ㄷ. 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다.
ㄹ. $y=2x^2$의 그래프를 평행이동한 것이다.

5 이차함수 $y=ax^2-2x-3$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때, 이 이차함수의 최솟값을 구하여라.

상·수준

1 한 변의 길이가 4 cm인 정사각형에서 가로의 길이는 매분 3 cm씩, 세로의 길이는 매분 2 cm씩 동시에 늘어난다고 한다. x분 후 직사각형의 넓이를 y cm^{2}라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

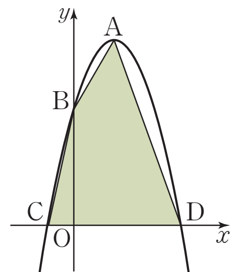
(1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(2) y는 x에 관한 이차함수인가?

2 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이 두 점 $(2,\ 12)$, $(-3,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하여라.

3 이차함수 $y=x^2-4x+7$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$, 축의 방정식을 $x=m$이라고 할 때, $p+q+m$의 값을 구하여라.

4 이차함수 $y=-2x^2+12x+32$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이 포물선의 꼭짓점을 A, y축과 만나는 점을 B, x축과 만나는 두 점을 각각 C, D라고 할 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.



5 이차함수 $y=x^2+2x+6a-b$의 최솟값이 6, 이차함수 $y=-x^2+6x+a+b$의 최댓값이 16일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라.

1 목표| 이차함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| ③ $y=(x+3)^2-x^2$에서 $y=6x+9$

답 ②, ⑤

2 목표| 이차함수가 되기 위한 조건을 알게 한다.

풀이| x^2의 계수에서 $a-2\neq0$이므로 $a\neq2$

답 ⑤

3 목표| 실생활에서 두 변수 사이의 관계를 식으로 나타내고, 이차함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| ① $y=15-x$ ② $y=2x$

③ $y=\frac{x(x-3)}{2}$ ④ $y=x^3$ ⑤ $y=2\pi x$

답 ③

4 목표| 이차함수의 함숫값을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(a)=2a^2-3a-1=1$, $(a-2)(2a+1)=0$

$a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

그런데 a는 정수이므로 $a=2$

답 ④

5 목표| 이차함수의 식을 보고 아래로 볼록한 그래프를 찾을 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$이면 아래로 볼록하다.

답 ①, ③

6 목표| 이차함수의 식을 보고 그래프의 폭을 비교할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어지므로 그래프의 폭이 넓은 것부터 차례로 나열하면 ㉤, ㉡, ㉢, ㉣, ㉠이다.

답 ④

7 목표| 조건에 맞는 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 축의 방정식이 $x=3$이고 위로 볼록한 것은 ①, ③이고, 이 중 그래프의 폭이 $y=-x^2$의 그래프의 폭보다 좁은 것은 ③이다.

답 ③

8 목표| 이차함수의 그래프가 평행이동하여 서로 포개어지기 위한 조건을 알게 한다.

풀이| x^2의 계수가 같은 식을 찾는다.

답 ④

9 목표| 이차함수의 식에서 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$

따라서 최댓값은 $x=1$일 때 3이므로 $a=3$

$y=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$

따라서 최솟값은 $x=1$일 때 -2이므로 $b=-2$

$a-b=3-(-2)=5$

답 ①

10 목표| 이차함수의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| $y=2x^2-12x+22=2(x-3)^2+4$

① 아래로 볼록한 포물선이다.

② $y=-2x^2$과 주어진 이차함수는 x^2의 계수의 절댓값이 같으므로 그래프의 폭은 서로 같다.

④ 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

⑤ 최솟값은 $x=3$일 때 4이고, 최댓값은 없다.

답 ③

11 목표| 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

답 (1) 축의 방정식: $x=0$, 꼭짓점의 좌표: $(0,\ -3)$

(2) 축의 방정식: $x=4$, 꼭짓점의 좌표: $(4,\ 6)$

12 목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

답 (1) $y=2(x+1)^2+3$ (2) $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2-1$

13 목표| 이차함수의 그래프를 보고 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 1)$이므로

$y=a(x-2)^2+1$

이 그래프가 점 $(0,\ -7)$을 지나므로

$-7=a(0-2)^2+1$, $a=-2$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-2(x-2)^2+1$

답 $y=-2(x-2)^2+1$

14 목표| 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (2) $y=-\frac{1}{3}x^2+4x=-\frac{1}{3}(x-6)^2+12$이므로

최댓값은 $x=6$일 때 12이고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최솟값: 4, 최댓값은 없다. (2) 최댓값: 12, 최솟값은 없다.

15 목표| 이차함수의 주어진 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $y=-(x-2)^2-1$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(2, -1)$에서 $(-2, 4)$로 옮겨지므로 평행이동한 이차함수의 식은

$y=-(x+2)^2+4$ …㉠

축의 방정식은 $x=-2$이므로

$p=-2$, $q=4$, $m=-2$ …㉡

$p+q+m=-2+4+(-2)=0$ …㉢

답 0

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	평행이동한 이차함수의 식 구하기	㉠	4점
	p, q, m의 값 구하기	㉡	3점
답 구하기	$p+q+m$의 값 구하기	㉢	2점

16 목표| 이차함수의 그래프가 지나는 점을 이용하여 미지수를 구한 후, 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 두 점 $(-2, 25)$, $(-1, 1)$을 지나므로

$25=4a+q$

$1=a+q$

두 식을 연립하여 풀면

$a=8$ …㉠

$q=-7$ …㉡

따라서 $y=8x^2-7$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(0, -7)$인 아래로 볼록한 포물선이므로 최솟값은 $x=0$일 때 -7이고 최댓값은 없다. …㉢

답 최솟값: -7, 최댓값은 없다.

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	a의 값 구하기	㉠	3점
	q의 값 구하기	㉡	3점
답 구하기	최댓값과 최솟값 구하기	㉢	3점

하·수준

1 목표| 이차함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| 이차함수는 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 나타낼 수 있어야 한다. 따라서 이차함수는 ㉡, ㉥이다.

답 ㉡, ㉥

2 목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| ㄱ. y축에 대칭이다.

ㄴ. $y=3x^2$에 $x=-2$를 대입하면 $y=12$이므로 점 $(-2, 12)$를 지난다.

ㄷ. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 클수록 포물선의 폭이 좁아지므로 $y=3x^2$의 그래프는 $y=-4x^2$의 그래프보다 폭이 넓다.

ㄹ. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$일 때 아래로 볼록하므로 주어진 그래프는 아래로 볼록하다.

ㅁ. 이차함수 $y=3x^2$의 그래프는 y축을 축으로 하고 아래로 볼록하므로 $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

답 ㅁ

3 목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 제3, 4사분면을 지난다.

㉤ 제1, 2사분면을 지난다.

답 ㉤

4 목표| 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구할 수 있게 한다.

답 $y=\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-3$

5 목표| 이차함수의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\frac{1}{2}x^2-4x+2=\frac{1}{2}(x-4)^2-6$

따라서 주어진 이차함수가 $x=4$에서 최솟값 -6을 가지므로 $p=4$, $q=-6$

$p+q=-2$

답 -2

중·수준

1 목표| 실생활에서 두 변수 사이의 관계를 식으로 나타내고, 이차함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㄱ. $y=4\pi x^2$ ㄴ. $y=100x$ ㄷ. $y=10\pi x^2$
ㄹ. $y=6x+6$ ㅁ. $y=4x-4$

답 ㄱ, ㄷ

2 목표| 이차함수의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| 주어진 $y=ax^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프보다 폭이 넓고, 아래로 볼록하므로 $0<a<1$

답 $0<a<1$

3 목표| 이차함수의 함숫값을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x=1$일 때 $y=0$이므로 $0=3+b+c$
$x=2$일 때 $y=4$이므로 $4=12+2b+c$
두 식을 연립하여 풀면 $b=-5$, $c=2$이므로
$y=3x^2-5x+2$
따라서 $x=0$일 때 $y=2$이다.

답 2

4 목표| 이차함수의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| $y=2x^2-12x+16=2(x-3)^2-2$
ㄱ. 축의 방정식은 $x=3$이다.
ㄷ. 주어진 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.

답 ㄱ, ㄷ

5 목표| 이차함수의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=ax^2-2x-3$의 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로 $0=9a-6-3$, $a=1$
따라서 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$이므로 최솟값은 $x=1$일 때 -4이다.

답 -4

상·수준

1 목표| y를 x에 관한 식으로 나타내고, 이차함수인지 판단할 수 있게 한다.

풀이| (1) x분 후 가로, 세로의 길이는 각각
$(4+3x)$ cm, $(4+2x)$ cm이므로
$y=(4+3x)(4+2x)=6x^2+20x+16$
(2) y가 x에 관한 이차식이므로 이차함수이다.

답 (1) $y=6x^2+20x+16$ (2) 이차함수이다.

2 목표| 이차함수의 식을 구하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 이차함수의 식은 $y=ax^2$의 꼴로, 점 $(2, 12)$를 지나므로 $12=4a$, $a=3$
따라서 이차함수의 식은 $y=3x^2$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(-3, k)$를 지나므로
$k=3\times(-3)^2=27$

답 27

3 목표| 이차함수의 그래프를 평행이동할 수 있게 한다.

풀이| $y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 1, 2만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(2, 3)$에서 $(3, 5)$로 옮겨지므로
$p=3$, $q=5$
$y=(x-3)^2+5$이므로 축의 방정식은 $x=3$
$m=3$
$p+q+m=3+5+3=11$

답 11

4 목표| 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-2x^2+12x+32=-2(x-3)^2+50$이므로 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(3, 50)$
$x=0$을 대입하면 $y=32$이므로 y축과 만나는 점은 $\mathrm{B}(0, 32)$
$y=0$을 대입하면 $0=-2x^2+12x+32$
$x^2-6x-16=0$, $(x+2)(x-8)=0$
$x=-2$, $x=8$
따라서 x축과 만나는 두 점은 $\mathrm{C}(-2, 0)$, $\mathrm{D}(8, 0)$
$\square\mathrm{ABCD}$
$=\triangle\mathrm{BCO}+\triangle\mathrm{ABO}+\triangle\mathrm{AOD}$
$=\frac{1}{2}\times2\times32+\frac{1}{2}\times3\times32+\frac{1}{2}\times8\times50=280$

답 280

5 목표| 이차함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=x^2+2x+6a-b=(x+1)^2+6a-b-1$의 최솟값이 6이므로 $6a-b-1=6$ ……①
$y=-x^2+6x+a+b=-(x-3)^2+a+b+9$의 최댓값이 16이므로 $a+b+9=16$ ……②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$
따라서 $ab=10$이다.

답 10

꼭짓점을 맞혀라!

2명이 다음과 같은 게임을 하여 보아라.

준비물

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4가 적힌 돌림판 1개, 다음 10개의 이차함수의 식이 적힌 카드 3벌(30장)

$$y=2(x-1)^2+2,\ y=x^2-4x+4,\ y=5x^2+3,\ y=-(x+1)^2+4,\ y=x^2+2x+1$$
$$y=x^2+6x+9,\ y=-7x^2-3,\ y=(x-3)^2+1,\ y=\frac{1}{2}(x+2)^2-1,\ y=-3(x-4)^2-2$$

게임 규칙

① 30장의 카드를 잘 섞어서 가운데에 뒤집어 놓은 다음 가위바위보를 하여 순서를 정한다.
② 돌림판을 2번 돌려서 첫 번째 나온 값을 x좌표, 두 번째 나온 값을 y좌표라고 한다.
③ 30장의 카드 중에서 한 장을 뽑는다. 이때 카드에 적힌 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 ②에서 나온 것과 같으면 뽑은 사람이 카드를 가진다. 하지만 꼭짓점의 좌표가 아니면 그 카드는 다시 가운데에 뒤집어 놓는다.
④ 더 이상 뽑을 카드가 없으면 게임은 끝난다. 이때 카드를 많이 가지고 있는 사람이 이긴다.

호접지몽(胡蝶之夢)과 카오스

한자로 호접(胡蝶)이라고 하는 나비는 나방과 함께 나비목을 구성하며, 거의 전 세계에 분포한다. 나비는 생긴 모습이 아름답고 귀여우며 연약하기 때문에 예로부터 시나 소설 또는 이야기의 소재가 되고 있다. 그 가운데 하나는 꿈에 관한 것으로 "장자(莊子)"의 '제물론(齊物論)'에는 다음과 같은 이야기가 있다.

어느 날 장자는 자기가 나비가 되어 꽃과 꽃 사이를 훨훨 날아다니며 즐거운 한때를 보내는 꿈을 꾸었다. 그러다가 문득 꿈에서 깨어 보니 자기는 분명 장자였다. 그래서 장자는 꿈속에서 자기가 나비가 된 것인지, 아니면 자기는 나비이고 그 나비인 자기가 꿈속에서 장자가 된 것인지 알쏭달쏭하였다.

유명한 이 이야기는 자기와 다른 이의 구별이 없는 이상적인 세계에 대한 장자의 우화적인 비유이다. 이 고사를 일컬어 나비가 된 꿈, 즉 '호접지몽(胡蝶之夢)'이라고 한다. 요즘에는 인생의 덧없음을 비유하는 말로 사용되고 있으나 원래는 물아일체(物我一體)의 경지를 이르는 말이다.

수학에서 나비와 관련된 용어인 '나비 효과'는 카오스에서 나오는 것으로, 요즘 많이 소개되고 있는 현대적인 '카오스'에 대하여 간단히 알아보자. 고전적인 카오스는 우주의 질서가 창조되었다는 의미를 가지는 것에 비하여, '결정론적 카오스'라 불리는 현대적인 카오스는 단순한 혼돈이나 무질서가 아닌 거대한 창조성의 의미를 내포하고 있다. 카오스에 대하여 누구라도 납득할 수 있을 만큼 정확한 수학적 정의를 내릴 수는 없다. 하지만 다음과 같은 카오스의 정의가 가장 그럴듯하다고 알려져 있다. "카오스란 어떤 체계가 확고한 규칙(결정론적 법칙)에 따라 변화하고 있음에도 불구하고, 매우 복잡하고 불안정한 행동을 보여서 먼 미래의 상태를 전혀 예측할 수 없는 현상이다."

카오스 이론 중에 기상학자 로렌츠가 이름 붙인 나비 효과가 있다. "우리나라에서 한 마리의 나비가 날갯짓을 하여 일으키는 미세한 공기의 흐름이 태평양을 건너 미국 대륙을 휩쓸어 버릴 정도의 태풍을 만들지도 모른다." 이것은 실로 엄청난 결과이다. 사실 이런 결과들은 초기 조건에 따라 시간이 지나면 크게 확대된다는 것이므로 일기 예보는 어느 정도 카오스적이라고 할 수 있다. 그러나 기후의 동력학이 실제로 카오스적인지에 대하여는 아직까지도 분명하게 밝혀지지 않았다.

나비 효과가 적용되는 흥미로운 것 중 하나는 교통 흐름에 관한 것이다. 자동차들이 고속 도로를 시속 100 km의 속도로 달리고 있을 때, 자동차 한 대가 무심코 브레이크를 살짝 밟았다 놓으면 그 지점에서부터 약 30 km 뒤에서 달리고 있던 차들은 완전히 서게 된다는 것이다. 차를 타고 가다 보면 이런 일은 자주 발생한다. 즉, 아무런 이유 없이 일정한 구간에서 차가 지체되었다가 그 구간을 지나면 바로 흐름이 좋아지는 것이 바로 실생활에서 일어나는 나비 효과이다.

우리가 살고 있는 이 세상은 카오스적이다. 이것은 결과가 원인에 비례하지 않는 세계라는 의미이다. 즉, 세상의 거의 모든 현상은 선형(비례 관계)이 아니라 비선형이다. 그러므로 카오스 이론에 의하면 먼 미래를 현재의 상태로는 예측할 수 없다.

호접지몽(胡蝶之夢) 胡(오랑캐 호), 蝶(나비 접), 之(어조사 지), 夢(꿈 몽)

IV 통계

이 단원의 학습목표

1. 중앙값, 최빈값, 평균의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
2. 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

1. 대푯값과 산포도

수영에서 빠르기를 측정하는 경영 종목은 정해진 거리를 가는 데 걸린 시간을 측정하여 승자를 결정한다. 따라서 경영 종목에 출전할 선수들을 선발하고 훈련시킬 때에는 측정된 기록의 평균을 구하거나 기록을 도수분포표로 나타내어 분석하는 것이 필요하다.

이와 같이 여러 가지 현상을 통계적으로 분석하는 것은 합리적인 의사 결정에 중요한 정보를 제공하므로 자연 과학이나 공학은 물론 경영학과 경제학 등의 사회 과학 분야에 이르기까지 널리 활용되고 있다.

단원을 시작하기 전에

수많은 정보가 홍수처럼 범람하는 현대 사회에서는 정보를 바탕으로 한 정확한 예측과 신속한 의사 결정이 성공의 관건이 된다. 따라서 정보를 바르게 처리하여 이용하는 통계적 지식이 절실히 요구되고 있다. 이 단원에서는 자료를 대표할 수 있는 대푯값과 자료가 대푯값 근처에 얼마나 밀집되어 있는지를 알 수 있는 산포도에 대하여 지도한다.

단원의 지도 목표

1. 대푯값과 산포도

① 중앙값, 최빈값, 평균의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

② 분산, 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

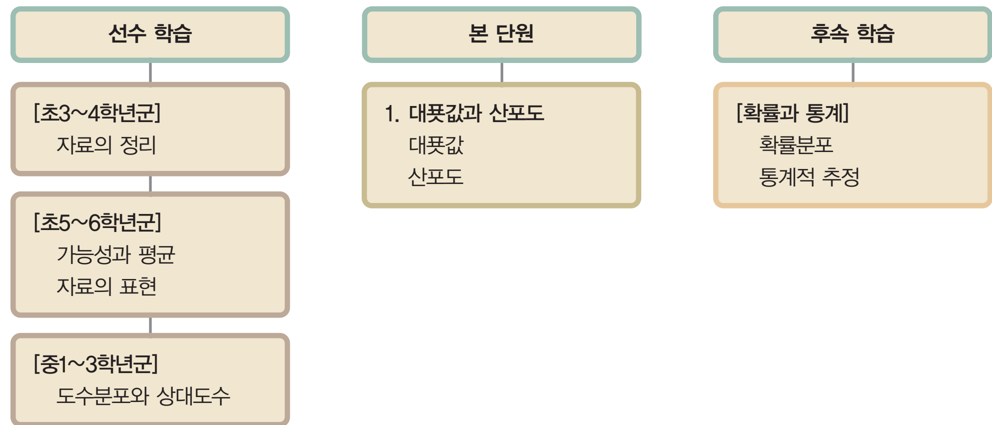
교수 · 학습상의 유의점

① 실생활의 여러 소재를 이용하여 대푯값과 산포도를 도입하고, 그 필요성을 인식하게 한다.

② 자료의 특성에 따라 적절한 대푯값을 선택하여 구할 수 있게 한다.

③ 공학적 도구를 활용하여 대푯값과 산포도를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관			136~137	• 단원의 개관	
1. 대푯값과 산포도	**준비 학습**		138	• 평균 • 도수분포표에서의 평균	
	1-1 대푯값	1~4	139~143	• 대푯값 • 중앙값, 최빈값	대푯값, 중앙값, 최빈값
	1-2 산포도	5~8	144~150	• 산포도 • 분산과 표준편차 • 도수분포표에서의 분산과 표준편차	산포도, 편차, 분산, 표준편차
	수준별 학습	9	151~153	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		10~11	154~163	• 수행 과제 • 학습에 대한 자기 평가 • 대단원 핵심 한눈에 보기 • 만화로 보는 수학 이야기 • 대단원 평가 문제 • 컴퓨터의 활용 • 수학 산책	

학습 지도 계획 수립 시 차시별 지도 계획을 바탕으로 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도에 따라 적절히 조정할 수 있다.

단원의 이론적 배경

1. 역사적 배경

통계학을 뜻하는 statistics의 어원은 상태를 뜻하는 불어 status이다. 중세기 이후에는 이 말이 정치적인 의미로서의 state(국가)를 뜻하였다. 따라서 통계학은 국가의 상태를 조사, 연구하는 것을 의미하게 되었는데, 고대의 이집트, 중국에서도 국가적인 대사업을 위하여 통계적 조사를 한 역사가 기록되어 있다.

통계학이 학문으로 확립된 것은 17세기에 들어서인데 영국과 독일에서 각각 독립적으로 정치적인 산술, 국세학으로 시작된 것으로 보고 있다.

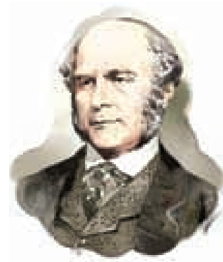
정치적 산술은 17세기에 영국에서 발전하게 된 통계학의 유형으로 당시의 영국의 사회 정세의 영향을 받았다. 그 당시 흑사병으로 런던 시민의 사망과 출생, 결혼, 세례 등에 대해 수량적인 보고가 지대한 관심을 끌게 되자 런던의 그랜트(Graunt, J.: 1620～1674)는 1662년에 “사망표에 관한 자연적 또는 정치적 관찰”이라는 저서를 발표하였다. 그는 출생과 사망에 관한 수량 자료를 근거로 인구, 사망, 출생에 관한 법칙성을 규명하였다. 그리고 경제학자 페티(Petty, W.: 1623～1687)는 그랜트의 연구 결과를 발전시켜서 수학적인 기초를 가지는 표현 방식을 도입하여 이론을 이끌어 냈다. 이후로부터 통계학은 수량과 기호를 사용하여 더욱 발전하게 되었다.

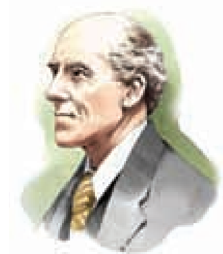
그랜트

17세기 중반 독일에서는 콘링(Conring, H.: 1606～1681)과 아헨발(Achenwall, G.: 1719～1772) 등이 대학에서 국세학을 강의하였는데, 이들은 정치, 경제, 토지, 인구 등의 국가적 상황을 계통적으로 기술하고, 사회 현상의 인과 관계를 규명하고자 노력하였으므로 이들을 ‘국세학파’라고 하였다. 이 학파에서는 수치의 사용을 피하고, 관념적으로 현상을 파악하려고 하였다.

18세기에 들어서면서 통계학은 수학적 기반 위에서 더욱 진보하게 되었다. 벨기에의 케틀레(Quételet, L. A. J.: 1796～1874)는 확률론에 입각하여 통계학을 과학으로서의 학문으로 체계화하여 근대 통계학의 기틀을 마련하였다. 그는 확률의 이론을 사회 현상의 통계적 연구에 적용하여 인구 통계 등의 업적을 남겼다.

그 후 통계학은 점차 다른 학문에도 접근하기 시작하여 경제학에서는 계량 경제학을 이루었으며 다윈(Darwin, C. R.: 1809～1882)과 골턴(Galton, F.: 1822～1911)은 생물 통계학을 수립하여 유전 현상을 수학적으로 해설하였다. 더욱이 골턴은 심리학, 인류학, 생물학, 유전학 등을 수리 통계학적으로 접근하여 많은 업적을 남겼다. 골턴의 통계적 사상은 그 후계자 피어슨(Pearson, K.: 1857～1936)에 의하여 계승되었다. 오늘날의 기술 통계학은 피어슨에 의해서 정비되었고, 통계학 용어도 대다수가 그에 의해서 명명되었다고 한다.


골턴


피어슨

20세기에 들어서면서 통계학은 다량의 관찰이 불가결한 집단에 대한 표본조사와 분석, 검정과 추론의 과정으로 발전되어 가고 있으며 사회 일반에 폭넓게 응용되고 있다.

교수 · 학습 과정안 (기초)

대단원	Ⅳ. 통계	쪽수	교과서 145~147쪽
소단원	1. 대푯값과 산포도 1-2 산포도	차시	6/11
학습 목표	분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 평균이 같은 두 집단의 자료의 분포 상태를 살펴본다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	개념 학습 문제 해결	◐ 학습 내용 설명 **분산** (1) (편차)=(변량)−(평균) (2) $(\text{분산})=\dfrac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}$ **표준편차** $(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}$ **분산과 표준편차의 의미** 분산 또는 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 모여 있음을 의미하고, 분산 또는 표준편차가 클수록 변량이 평균으로부터 넓게 흩어져 있음을 의미한다. ◐ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◐ 문제 해결을 모둠별로 해결하도록 한다. 문제 해결 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.	
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음은 5개의 변량의 편차를 나타낸 것이다. 이 변량의 분산을 구하여라. $-1 \quad 2 \quad 0 \quad -2 \quad 1$ 답 2 ◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있다.	

수준별 학습지 (기초)

대단원	Ⅳ. 통계	쪽수	교과서 145~147쪽
소단원	1. 대푯값과 산포도　1-2 산포도	차시	6/11

(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:

1 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) (□) $=\dfrac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}$

(2) (표준편차) $=\sqrt{(\square)}$

답 (1) 분산　(2) 분산

2 다음 변량에 대하여 물음에 답하여라.

1　2　3　4　5

(1) 평균을 구하여라.

(2) 분산을 구하여라.

(3) 표준편차를 구하여라.

답 (1) 3　(2) 2　(3) $\sqrt{2}$

3 다음 표는 학생 5명의 수학 성적에 대한 편차를 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

수학 성적

학생	A	B	C	D	E
편차(점)	2	x	1	-3	2

(1) x의 값을 구하여라.

(2) 분산을 구하여라.

답 (1) -2　(2) 4.4

4 다음 설명 중에서 옳지 않은 것을 찾아라.

ㄱ. 편차는 변량에서 평균을 뺀 값이다.
ㄴ. 편차의 총합은 0이다.
ㄷ. 표준편차는 분산의 양의 제곱근이다.
ㄹ. 편차의 제곱의 평균을 표준편차라고 한다.
ㅁ. 표준편차가 작을수록 자료의 분포 상태는 고르다.

답 ㄹ

교수 · 학습 과정안 (기본)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅳ. 통계</td><td>쪽수</td><td>교과서 145~147쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 대푯값과 산포도　1-2 산포도</td><td>차시</td><td>6/11</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인
동기 유발
학습 목표 제시</td><td colspan="2">▶ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다.
▶ 평균이 같은 두 집단의 자료의 분포 상태를 살펴본다.
▶ 학습 목표를 제시한다.
• 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</td><td>모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>개념 학습

문제 해결</td><td colspan="2">▶ 학습 내용 설명
분산
(1) (편차)=(변량)−(평균)
(2) $(\text{분산})=\dfrac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}$
표준편차
$(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}$
분산과 표준편차의 의미
분산 또는 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 모여 있음을 의미하고, 분산 또는 표준편차가 클수록 변량이 평균으로부터 넓게 흩어져 있음을 의미한다.
▶ 문제 1을 풀게 한다.
정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.
▶ 문제 해결을 모둠별로 해결하도록 한다.
문제 해결 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.</td><td></td></tr>
<tr><td>정리
및
평가</td><td>학습 내용 정리
형성 평가

수준별 과제
차시 예고</td><td colspan="2">▶ 본시의 학습 내용을 정리한다.
▶ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다.
● 다음은 상민이가 다섯 번에 걸쳐서 실시한 턱걸이 횟수를 나타낸 것이다. 턱걸이 횟수의 분산을 구하여라.
턱걸이 횟수 (단위: 회)
6　5　4　8　2
답 4
▶ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다.
▶ 다음 차시를 예고한다.
• 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table>

수준별 학습지 (기본)

대단원	Ⅳ. 통계	쪽수	교과서 145~147쪽
소단원	1. 대푯값과 산포도　1-2 산포도	차시	6/11

(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:

1 다음은 학생 5명의 수학 성적을 나타낸 것이다. 표준편차를 구하여라.

수학 성적 (단위: 점)

90	75	80	95	85

답 $5\sqrt{2}$점

2 4개의 변량이 있다. 이 변량에 대하여 중앙값은 12이고 세 개의 변량이 8, 13, 16일 때, 이 변량의 분산을 구하여라.

답 8.5

3 오른쪽 표는 5명의 체육 실기 성적에 대한 편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

체육 실기 성적

학생	A	B	C	D	E
편차(점)	2	−1	−2	0	1

ㄱ. D의 점수는 평균 점수와 같다.
ㄴ. A와 B의 점수 차는 1점이다.
ㄷ. 표준편차는 $\sqrt{2}$점이다.
ㄹ. 점수가 가장 낮은 학생은 A이다.

답 ㄱ, ㄷ

4 다음 표는 학생 5명의 한 달 동안의 수면 시간에 대한 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 수면 시간이 가장 불규칙한 사람을 말하여라.

수면 시간

이름	민규	지현	영채	은수	성훈
평균(시간)	5.5	7	8	6.5	6
표준편차(시간)	2.5	2.1	0.5	1	0.8

답 민규

교수 · 학습 과정안 (실력)

대단원	Ⅳ. 통계	쪽수	교과서 145~147쪽
소단원	1. 대푯값과 산포도 1-2 산포도	차시	6/11
학습 목표	분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.		

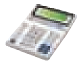
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 평균이 같은 두 집단의 자료의 분포 상태를 살펴본다. ◎ 학습 목표를 제시한다. • 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	개념 학습 문제 해결	◎ 학습 내용 설명 **분산** (1) (편차)=(변량)−(평균) (2) $(분산)=\dfrac{\{(편차)^2의\ 총합\}}{(변량의\ 개수)}$ **표준편차** $(표준편차)=\sqrt{(분산)}$ **분산과 표준편차의 의미** 분산 또는 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 모여 있음을 의미하고, 분산 또는 표준편차가 클수록 변량이 평균으로부터 넓게 흩어져 있음을 의미한다. ◎ 문제 1을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◎ 문제 해결을 모둠별로 해결하도록 한다. 문제 해결 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.	
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 10개의 수 중에서 6개의 수의 평균은 8, 분산은 9이고, 나머지 4개의 수의 평균은 8, 분산은 14이다. 10개의 수 전체의 평균과 분산을 구하여라. 답 평균: 8, 분산: 11 ◎ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있다.	

수준별 학습지 (실력)

대단원	Ⅳ. 통계	쪽수	교과서 145~147쪽
소단원	1. 대푯값과 산포도 1-2 산포도	차시	6/11

( )학년 ( )반 ( )번 이름:

1 다음 표는 각각 8명으로 이루어진 A, B 두 팀의 수학 성적을 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.



수학 성적 (단위: 점)

팀 \ 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	합계
A	80	70	80	60	70	70	80	70	580
B	50	60	100	90	70	50	100	60	580

(1) 각 팀의 평균을 구하여라.

(2) 각 팀의 분산을 구하여라.

(3) 각 팀의 표준편차를 구하여라.(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

답 (1) A: 72.5점, B: 72.5점 (2) A: 43.75, B: 393.75 (3) A: 6.61점, B: 19.84점

2 A, B 두 모둠의 성적이 오른쪽 표와 같을 때, 전체 20명에 대한 성적의 표준편차를 구하여라.

답 $\sqrt{3.6}$점

모둠별 성적

모둠	A	B
학생 수(명)	12	8
평균(점)	10	10
표준편차(점)	2	$\sqrt{3}$

3 오른쪽 표는 야구 게임 결과 용규, 성국, 상률이의 안타 수를 나타낸 것이다. 분산이 $\frac{26}{3}$일 때, 용규의 안타 수를 구하여라.

답 9개

안타 수

이름	용규	성국	상률
안타 수(개)	$3x$	2	4

4 4개의 변량이 각각 $a+3$, a, $a-7$, $a+4$일 때, 이 변량의 표준편차를 구하여라.

답 $\sqrt{18.5}$

1 대푯값과 산포도

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 대푯값의 의미를 이해하게 한다.
② 중앙값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.
③ 최빈값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.
④ 산포도와 편차의 의미를 이해하게 한다.
⑤ 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.
⑥ 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
1-1 대푯값	대푯값
	중앙값
	최빈값
1-2 산포도	산포도
	분산과 표준편차
	도수분포표에서의 분산과 표준편차
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 138 쪽

1 대푯값과 산포도

준 | 비 | 학 | 습

평균
- 변량의 총합을 변량의 개수로 나눈 값
- (평균)$=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{도수의 총합})}$

1 다음은 준희네 반 학생 20명을 대상으로 자유투를 10번씩 던져 성공한 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 자유투 성공 횟수의 평균을 구하여라.

자유투 성공 횟수 (단위: 회)

5	4	7	2	4
6	2	8	6	3
4	9	4	3	1
10	7	6	2	5

도수분포표에서의 평균
- 도수분포표에서 평균을 구할 때에는 각 계급에 속하는 모든 자료가 그 계급의 계급값과 같다고 보고 계산한다.
- (평균)$=\dfrac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수의 총합})}$

2 다음 도수분포표는 재원이네 반 학생 40명의 각 가정에서 한 달 동안 사용한 수돗물의 양을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

수돗물의 양

계급(t)	계급값(t)	도수(명)
0 이상 ~ 10 미만		2
10 ~ 20		14
20 ~ 30		10
30 ~ 40		8
40 ~ 50		2
50 ~ 60		4
합계		40

(1) 빈칸에 알맞은 계급값을 써넣어라.
(2) 도수가 가장 큰 계급과 가장 작은 계급을 말하여라.
(3) 한 달 동안 사용한 수돗물의 양의 평균을 구하여라.

준비 학습의 해설

1

목표 | 주어진 자료의 평균을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (평균)$=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{도수의 총합})}$

$=(1+2\times3+3\times2+4\times4+5\times2+6\times3+7\times2+8+9+10)\div20$

$=\dfrac{98}{20}=$**4.9(회)**

2

목표 | 도수분포표에서 계급, 도수, 계급값의 뜻을 알고, 평균을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1)

수돗물의 양

계급(t)	계급값(t)	도수(명)
0 이상 ~ 10 미만	**5**	2
10 ~ 20	**15**	14
20 ~ 30	**25**	10
30 ~ 40	**35**	8
40 ~ 50	**45**	2
50 ~ 60	**55**	4
합계		40

(2) 도수가 가장 큰 계급은 **10 t 이상 20 t 미만**이고, 도수가 가장 작은 계급은 **0 t 이상 10 t 미만**과 **40 t 이상 50 t 미만**이다.

(3) (평균)

$=\dfrac{5\times2+15\times14+25\times10+35\times8+45\times2+55\times4}{40}$

$=\dfrac{1060}{40}=$**26.5(t)**

교과서 139 쪽

1-1 대푯값

● 중앙값, 최빈값, 평균의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

중앙값이란 무엇인가?

창의력 기르기

양궁

양궁은 활을 이용하여 일정한 거리 밖에 있는 과녁을 맞히는 스포츠 경기이다. 우리나라의 양궁은 1959년 무렵 체육 교사 석봉근 선생님이 서양의 활을 가져다 직접 활쏘기 훈련을 하면서 도입되었다고 알려져 있다. 이후 1963년 국제 양궁 연맹(FITA)에 가입하면서 본격화되었고 훌륭한 선수들이 세계 선수권 대회, 올림픽, 아시안 게임 등에서 놀라운 실력을 인정받으며 지금까지 최고의 자리를 이어오고 있다.

탐구 활동

오른쪽 표는 미영이가 양궁 연습에서 받은 점수를 기록한 것이다. 물음에 답하여 보자.

〈표 1〉 미영이의 득점

회	1	2	3	4	5	6	7	8	9
점수(점)	10	6	2	8	8	1	2	9	8

1 미영이의 평균 점수를 구하여 보자.

2 미영이의 점수를 낮은 것부터 차례로 나열하여 보자.

3 2에서 나열한 점수 중에서 가장 가운데에 위치한 값은 얼마인가? 그리고 그 값과 1에서 구한 평균을 비교하여 보자.

탐구 활동에서 미영이가 득점한 점수의 평균은 다음과 같다.

$$(\text{평균})=\frac{(\text{점수의 총합})}{(\text{총횟수})}=\frac{10+6+2+8+8+1+2+9+8}{9}=\frac{54}{9}=6(\text{점})$$

● $(\text{평균})=\frac{(\text{변량의 총합})}{(\text{도수의 총합})}$

따라서 미영이가 각 회마다 받은 점수는 6점 정도라는 것을 알 수 있다.

새로 나온 용어와 기호

- 대푯값(representative value)
- 중앙값(median)
- 최빈값(mode)

창의력 기르기 참/고/자/료

대한양궁협회 홈페이지(http://www.archery.or.kr)에 가면 양궁에 관한 다양한 자료들을 접할 수 있다.

1-1 대푯값

소단원 지도 목표

① 대푯값의 의미를 이해하게 한다.
② 중앙값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.
③ 최빈값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 평균뿐만 아니라 중앙값과 최빈값의 필요성을 이해하고, 주어진 자료에 따라 가장 적절한 대푯값을 선택하고 이를 구할 수 있도록 지도한다.

2. 공학적 도구를 활용하여 대푯값을 구할 수 있게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 평균과 중앙값을 구하여 비교해 봄으로써 대푯값의 의미를 알게 하려는 것이다.

1. $(\text{평균})=\frac{10+6+2+8+8+1+2+9+8}{9}=\frac{54}{9}=\mathbf{6(점)}$

2. 점수를 낮은 것부터 차례로 나열하면

1, 2, 2, 6, 8, 8, 8, 9, 10

이다.

3. 나열한 점수 중에서 가장 가운데에 위치한 값은 **8점**이다. 이 값은 **평균인 6점과 많은 차이가 난다고 볼 수 있다.**

교과서 140 쪽

평균과 같이 어떤 자료가 주어졌을 때 그 자료 전체의 특징을 하나의 수로 나타낸 것을 **대푯값**이라고 한다. 대푯값에는 여러 가지가 있으나 일반적으로 평균이 주로 사용된다.

이제 평균 이외의 여러 가지 대푯값에 대하여 알아보자.

〈표 1〉에서 미영이의 점수를 낮은 것부터 차례로 나열하면

1, 2, 2, 6, 8, 8, 8, 9, 10

이 ... 이때 가운데 위치한 값은 다섯 번째 값으로 8이다.

❶ ...이 변량을 크기순으로 나열하였을 때, 가운데에 위치한 값을 **중앙값**이 ...다.

❷ ...으로 중앙값은 자료 중에서 매우 크거나 매우 작은 극단적인 값이 있는 ... 대푯값으로 사용되기도 한다.

평균과 같이 중앙값도 대푯값의 하나이다.

한편 변량의 개수가 짝수이면 가운데에 위치하는 값이 두 개가 되므로 이 경우에는 두 값의 평균을 중앙값으로 한다.

예를 들어 변량 3, 8, 4, 22, 6, 5를 작은 값부터 차례로 나열하면 3, 4, 5, 6, 8, 22이므로 중앙값은 세 번째와 네 번째 변량의 평균인 $\frac{5+6}{2}=5.5$이다.

변량을 큰 것부터 차례로 나열하여도 중앙값은 같다.

일반적으로 중앙값은 다음과 같이 구할 수 있다.

변량의 개수가 n인 자료의 중앙값

(1) n이 홀수인 경우
변량을 크기순으로 나열하였을 때, 중앙값은 $\frac{n+1}{2}$번째 변량이다.

(2) n이 짝수인 경우
변량을 크기순으로 나열하였을 때, 중앙값은 $\frac{n}{2}$번째와 $\left(\frac{n}{2}+1\right)$번째 변량의 평균이다.

문제 | 다음 자료의 중앙값을 구하여라.

(1) 4, 37, 2, 6, 8　　　　(2) 32, 35, 9, 34

본문 해설

❶ 중앙값은 위치에 대한 값이므로 평균과 같이 복잡한 계산을 요구하지 않는다.

❷ 평균은 대푯값으로 주로 사용되지만 극단적인 값의 영향을 많이 받는 단점이 있다. 따라서 극단적인 값에 영향을 받지 않는 중앙값을 대푯값으로 사용하기도 한다.

목표 | 중앙값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 변량의 개수는 홀수이고, 작은 값부터 차례로 나열하면

2, 4, 6, 8, 37

이다. 따라서 중앙값은 세 번째 변량인 **6**이다.

(2) 변량의 개수는 짝수이고, 작은 값부터 차례로 나열하면

9, 32, 34, 35

이다. 따라서 중앙값은 두 번째 변량 32와 세 번째 변량 34의 평균인 $\frac{32+34}{2}=$**33**이다.

기/초/력 향상 문제

다음 자료의 중앙값을 구하여라.

1

6	7	8	14	19	25	50

2

6	7	8	14	19	25	50

3

6	7	9	14	19	28	100

답 **1** 14　**2** 14　**3** 14

참고 | 중앙값은 위치에 대한 값이기 때문에 크기순으로 나열하였을 때 중앙에 위치한 값이 변하지 않으면 중앙값은 변하지 않는다.

읽/기/자/료 평균의 단점을 보완한 채점 방식

체조 경기에서 한 선수의 점수를 산정할 때, 여러 심사 위원들의 최저 점수와 최고 점수를 제외한 점수의 평균을 이용하는 방식이 있다.

예를 들어 한 선수가 6명의 심사 위원으로부터 6점, 7점, 8점, 8점, 9점, 10점을 얻었다면 이 선수의 점수는 6점과 10점을 제외한 나머지 점수의 평균인

(7+8+8+9)÷4=8(점)

이다. 이렇게 점수를 정하는 이유는 극단적인 값에 영향을 받는 평균의 단점을 보완하기 위한 것이다. 이러한 채점 방식은 체조 이외에 다이빙, 피겨 스케이팅, 싱크로나이즈드 스위밍 등의 경기에서도 사용된다.

예제 1

다음은 민준이네 반 학생 중에서 14명의 공 던지기 기록과 15명의 윗몸 일으키기 기록을 조사하여 나타낸 것이다. 각각의 중앙값을 구하여라.

공 던지기 기록 (단위: m)

10	14	12	11	13	14	9
15	14	11	13	9	9	16

윗몸 일으키기 기록 (단위: 회)

41	54	40	37	35
16	27	36	39	55
47	39	42	48	51

중앙값은
- 변량이 14개이면 $\frac{14}{2}$번째와 $\left(\frac{14}{2}+1\right)$번째 변량의 평균이다.
- 변량이 15개이면 $\frac{15+1}{2}$번째 변량이다.

풀이 공 던지기 기록의 변량의 개수는 짝수이고, 기록을 작은 값부터 차례로 나열하면

9, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16

이다. 따라서 중앙값은 7번째 변량 12 m와 8번째 변량 13 m의 평균인

$\frac{12+13}{2}=12.5(\text{m})$이다.

윗몸 일으키기 기록의 변량의 개수는 홀수이고, 기록을 작은 값부터 차례로 나열하면

16, 27, 35, 36, 37, 39, 39, 40, 41, 42, 47, 48, 51, 54, 55

이다. 따라서 중앙값은 8번째 변량인 40회이다.

답 12.5 m, 40회

문제 2 다음 표는 1월 어느 날 8개 지역의 일출 시각을 조사하여 나타낸 것이다. 일출 시각의 중앙값을 구하여라.

일출 시각 (시 : 분)

지역	동해	목포	제주	대전	서울	부산	인천	울릉도
일출 시각	7 : 28	7 : 34	7 : 31	7 : 33	7 : 37	7 : 24	7 : 38	7 : 21

〈자료: 기상청〉

의사소통 우리 주변에서 평균보다 중앙값을 대푯값으로 택하는 것이 적절한 통계 자료는 어떤 것이 있는지 말하여 보자.

2

목표| 중앙값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 일출 시각의 변량의 개수는 짝수이고, 일출이 빠른 시각부터 차례로 나열하면

7 : 21, 7 : 24, 7 : 28, 7 : 31, 7 : 33, 7 : 34, 7 : 37, 7 : 38

이다. 따라서 중앙값은 4번째 변량 7시 31분과 5번째 변량 7시 33분의 평균인 **7시 32분**이다.

의/사/소/통

|출제 의도| 특정한 자료에서 중앙값이 평균보다 대푯값으로 적절한 이유를 이해할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 자료 중에서 매우 크거나 매우 작은 몇 개의 극단적인 값이 있을 때, 중앙값이 자료의 특성을 파악하는 데 적절할 수 있다.
예를 들어 열 명 중에 문자 메시지를 아주 많이 보내는 사람이 한 명이 있는 어느 집단에서 하루에 보내는 문자 메시지 건수의 대푯값을 구할 때, 평균보다 중앙값이 더 적절하다.

참고| 중앙값은 자료의 분포 상태가 극도로 비대칭일 때, 대푯값으로서 평균보다 더 큰 의미를 가진다. 일반적으로 소득에 관한 통계와 같은 것은 중앙값으로 나타내는 것이 좋지만, 중앙값으로는 모집단을 추론하기가 어려우므로 분포 상태가 어느 정도 대칭이기만 하면 평균이 대푯값으로서 더 의미가 있다.

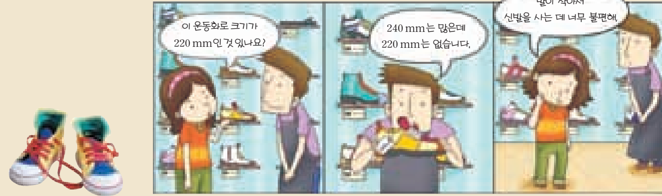
읽/기/자/료 중앙값의 한계

유명한 진화생물학자 스티븐 제이 굴드(Stephen Jay Gould: 1941～2002)는 40대 초반에 중피종이라는 희귀한 악성 종양에 걸렸다는 진단을 받았다. 그는 처음에 이 병의 생존율의 중앙값이 8개월이라는 말을 듣고 절망하였지만 중피종에 걸린 사람들의 생존 기간 분포가 오른쪽이 매우 긴 형태라는 것을 알아내었다. 그리고 자신이 아직 젊고, 의료 환경이 좋은 곳에서 살고 있으며 비교적 조기에 병을 발견하였고 병과 싸워 이기려는 투지가 불타고 있다는 사실을 근거로 자신은 8개월보다 훨씬 높은 생존 가능성이 있다는 결론을 내렸다. 실제로 그는 적극적으로 건강 관리를 하여 중피종 진단 이후에도 오랜 기간 동안 생존하였다.

교과서 142 쪽

최빈값이란 무엇인가?

창의력 기르기 신발 크기



탐구 활동 다음은 성희네 반 여학생 10명의 신발 크기를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

신발 크기 (단위: mm)

225	230	230	235	235	240	240	240	245	250

1 신발 크기의 평균과 중앙값을 구하여 보자.
2 가장 많이 신는 신발의 크기는 몇 mm인가?
3 신발 가게에서 어느 크기의 신발을 많이 구비하면 좋을지 말하여 보자.

탐구 활동에서 알 수 있듯이 신발 가게에서는 사람들이 가장 많이 신는 신발의 크... 평균보다 유용한 자료로 쓰인다.

❶ ...이 변량 중에서 가장 많이 나타난 값을 **최빈값**이라고 한다.

...적으로 최빈값은 자료의 값 중에서 가장 많이 발생한 값을 구해야 할 경우에 주로 쓰인다.

● 평균, 중앙값과 같이 최빈값도 대푯값의 하나이다.

● '가장 인기 있는 스포츠 종목', '가장 많이 입는 상의의 치수' 등을 구할 때 최빈값이 대푯값으로 적절하다.

문제 3 현성이네 반 학생 10명은 불우 이웃 돕기 행사에 다음과 같이 성금을 내었다. 불우 이웃 돕기 성금의 최빈값을 구하여라.

불우 이웃 돕기 성금 (단위: 천 원)

9	8	5	5	9
7	8	6	5	3

창의력 기르기 참/고/자/료

신발이나 의류를 만드는 공장에서는 가장 많이 생산할 치수를 정해야 하므로 대푯값으로 최빈값을 사용한다.
참고로 각 나라마다 신발 크기의 표기 방식은 다르다. 우리나라는 235, 240 등 mm 단위로 표기하지만 미국은 US 5, 5.5, 6, …으로, 유럽은 EUR 36, 36.5, 37, …로 표기한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 평균, 중앙값, 최빈값을 구해 봄으로써 대푯값으로서의 최빈값의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1. 신발 크기의 평균은

$(225+230+230+235+235+240+240+240+245+250)\div10$

$=\frac{2370}{10}=\mathbf{237(mm)}$

신발 크기의 중앙값은 신발의 크기를 작은 값부터 차례로 나열할 때, 5번째 변량 235 mm와 6번째 변량 240 mm의 평균이므로

$\frac{235+240}{2}=\frac{475}{2}=\mathbf{237.5(mm)}$

2. 신발 크기

신발 크기(mm)	여학생 수(명)
225	1
230	2
235	2
240	3
245	1
250	1

따라서 가장 많이 신는 신발의 크기는 **240 mm**이다.

3. 가장 많이 신는 신발의 크기인 **240 mm**의 신발을 많이 구비하는 것이 좋을 것이다.

본문 해설

❶ 최빈값은 극단적인 값에 영향을 받지 않으며, 영화 제목이나 스포츠 종목처럼 변량이 아닌 자료의 경우에도 구할 수 있다. 최빈값은 존재하지 않을 수도 있고 두 개 이상일 수도 있다.

3

목표 | 최빈값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 불우 이웃 돕기 성금

불우 이웃 돕기 성금(천 원)	학생 수(명)
3	1
5	3
6	1
7	1
8	2
9	2

변량 중에서 5천 원이 가장 많이 나타났으므로 최빈값은 **5천 원**이다.

문제 4 다음은 진현이네 반 남학생 14명을 대상으로 체육 시간에 입는 운동복의 치수를 조사하여 나타낸 것이다. 운동복 치수의 최빈값을 구하여라.

최빈값은 기성복의 표준 치수를 구할 때 많이 사용되기 때문에 '유행값'이라고도 한다.

운동복 치수

90	110	95	95	100	95	100
100	95	100	105	90	90	95

문제 5 다음 표는 우리나라에서 연간 규모 3 이상의 지진이 발생한 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 지진이 발생한 횟수의 평균과 중앙값, 최빈값을 구하여라.

지진 발생 횟수

연도(년)	횟수(회)	연도(년)	횟수(회)
1991	7	2001	7
1992	7	2002	11
1993	7	2003	9
1994	11	2004	6
1995	11	2005	15
1996	14	2006	7
1997	8	2007	2
1998	7	2008	10
1999	16	2009	8
2000	8	2010	5

〈자료: 기상청〉

문제 6 다음을 만족시키는 문제를 각각 만들어 보아라.

(1) 5개 자료의 중앙값은 8이다.

(2) 5개 자료의 최빈값은 8이다.

의사소통 다음 자료에 대하여 평균, 중앙값, 최빈값 중에서 각각 어떤 값이 대푯값으로 적절한지 토의하여 보자.

수학 성적(점)	92	80	85	88	78	76
양말의 치수(mm)	255	260	260	260	265	265
등교 시간(분)	15	10	14	40	12	9

4

목표| 최빈값의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이|

운동복 치수

운동복 치수	남학생 수(명)
90	3
95	5
100	4
105	1
110	1

변량 중에서 95가 가장 많이 나타났으므로 최빈값은 **95**이다.

5

목표| 복잡한 자료의 평균과 중앙값, 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 평균은 $\frac{176}{20}=8.8$(**회**)이다.

지진이 발생한 횟수를 작은 값부터 차례로 나열하면

2, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 11, 14, 15, 16

이다. 따라서 중앙값은 10번째 변량 8회와 11번째 변량 8회의 평균이므로 **8회**이다.

최빈값은 지진이 발생한 횟수 중에서 가장 많이 나타난 **7회**이다.

6

|출제 의도| 대푯값을 구하는 문제를 만들어 봄으로써 대푯값의 의미를 확실히 이해하게 하기 위한 문제이다.

(1) **예시|** 다음 자료의 중앙값을 구하여라.

2	7	10	9	8

(2) **예시|** 다음 자료의 최빈값을 구하여라.

6	8	8	9	12

의/사/소/통

|출제 의도| 평균, 중앙값, 최빈값의 의미를 이해하고, 자료의 특성에 적절한 대푯값을 선택할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이|
- 수학 성적: 극단적인 값이 없고, 가장 많이 나타난 값도 없으므로 **평균**이 적절하다.
- 양말의 치수: 가장 많이 신는 양말의 치수를 많이 생산해야 하므로 **최빈값**이 적절하다.
- 등교 시간: 40분과 같이 다른 값과 동떨어진 값이 있을 경우에는 **중앙값**이 적절하다.

1-2 산포도

소단원 지도 목표

① 산포도의 의미를 이해하게 한다.
② 편차의 의미를 이해하게 한다.
③ 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.
④ 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 산포도에는 범위, 사분편차, 평균편차, 분산, 표준편차 등이 있으나 중학교 교육과정에서는 분산과 표준편차만을 다룬다.

2. 실생활의 여러 소재를 이용하여 산포도를 도입하고, 그 필요성을 인식하게 한다.

3. 공학적 도구를 활용하여 산포도를 구할 수 있게 한다.

교과서 144 쪽

1-2 산포도

● 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

산포도란 무엇인가?

창의력 기르기

투호 놀이

투호 놀이는 옛날 양반 가정이나 궁중에서 명절날이나 집안에 큰 잔치가 있을 때, 여러 사람이 함께 하던 놀이이다. 마당 가운데 귀가 달린 항아리를 놓고 적당하게 떨어진 위치에서 화살을 던져 항아리 속으로 들어가면 점수를 받는 것으로 고려 시대부터 조선 시대까지 유행하였다고 알려져 있다.

탐구 활동

다음 표는 추석에 승준이와 지민이가 투호 놀이를 하여 얻은 점수를 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

투호 놀이 점수

회	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
승준(점)	8	7	6	6	7	7	7	8	6	8
지민(점)	3	6	4	9	10	9	10	10	4	5

1 승준이와 지민이가 얻은 점수의 평균을 각각 구하여 보자.

2 두 사람 중에서 점수 변동이 심한 사람은 누구라고 말할 수 있는가?

탐구 활동에서 승준이와 지민이의 평균 점수는 각각 다음과 같다.

$$\text{승준: } \frac{8+7+6+6+7+7+7+8+6+8}{10}=7(\text{점})$$

$$\text{지민: } \frac{3+6+4+9+10+9+10+10+4+5}{10}=7(\text{점})$$

이때 두 사람의 평균 점수는 7점으로 같지만 이들의 점수를 각각 막대그래프로 나타내면 다음과 같이 분포 상태가 서로 다름을 알 수 있다. 즉, 승준이의 점수는 평균인 7점 부근에 집중되어 있지만 지민이의 점수는 평균인 7점을 중심으로 좌우로 넓게 흩어져 있다.

새로 나온 용어와 기호

• 산포도(散布度, degree of scattering)
• 편차(偏差, deviation)
• 분산(分散, variance)
• 표준편차(標準偏差, standard deviation)

창의력 기르기 참/고/자/료

우리나라의 전통 놀이는 대표적으로 강강술래, 제기차기, 널뛰기, 씨름, 투호, 윷놀이 등이 있다. 국립민속박물관_어린이박물관 홈페이지(http://www.kidsnfm.go.kr)의 [재미]-[놀이마당]에는 전통 놀이를 체험할 수 있는 간단한 게임이 소개되어 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 평균은 같지만 분포 상태가 다른 두 자료를 살펴봄으로써 산포도의 필요성을 알게 하려는 것이다.

1. 승준이가 얻은 점수의 평균은

$$\frac{8+7+6+6+7+7+7+8+6+8}{10}=\frac{70}{10}=\mathbf{7(점)}$$

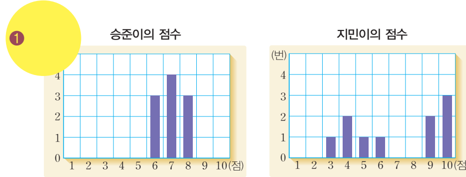
지민이가 얻은 점수의 평균은

$$\frac{3+6+4+9+10+9+10+10+4+5}{10}=\frac{70}{10}=\mathbf{7(점)}$$

2. 승준이가 얻은 점수는 평균 7점에 가깝게 분포되어 있지만 지민이가 얻은 점수는 그 차이가 크므로 **지민이의 점수 변동이 더 심하다고 말할 수 있다.**

교과서 145 쪽

❶



이와 같이 평균과 같은 대푯값만으로는 자료의 분포 상태를 알아보기에 충분하지 않으므로 변량이 흩어져 있는 정도를 알아볼 필요가 있다.

● 산포도가 클수록 변량이 넓게 흩어져 있고, 산포도가 작을수록 변량이 밀집되어 있다.

이때 변량이 흩어져 있는 정도를 하나의 수로 나타낸 값을 **산포도**라고 한다.

산포도를 구하는 방법은 여러 가지가 있으나, 여기에서는 변량이 평균으로부터 얼마나 떨어져 있는 정도를 알아본다. 어떤 자료에 대하여 각 변량에서 평균을 뺀 값을 그 변량의 **편차**라고 한다.

❷ (변량)−(평균)

탐구 활동에서 승준이와 지민이의 점수의 편차와 그 편차의 총합을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

회	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	합계
승준(점)	1	0	−1	−1	0	0	0	1	−1	1	0
지민(점)	−4	−1	−3	2	3	2	3	3	−3	−2	0

● 편차의 절댓값이 클수록 변량은 평균에서 멀리 떨어져 있고, 편차의 절댓값이 작을수록 변량은 평균 가까이에 있다.

❸ 차는 그 변량이 평균으로부터 얼마나 떨어져 있는지를 알려주지만 편차의 합은 항상 0이므로 편차의 평균도 0이 되어 이 값으로는 변량이 흩어져 있는 정도를 알 수 없다. 따라서 편차의 합이 0이 되지 않도록 편차의 제곱을 생각하여 그 평균을 계산한다.

즉, 승준이와 지민이의 점수에 대한 편차의 제곱의 평균을 구하여 보면 다음과 같다.

$$\text{승준: } \frac{1^2+0^2+(-1)^2+(-1)^2+0^2+0^2+0^2+1^2+(-1)^2+1^2}{10}=0.6$$

$$\text{지민: } \frac{(-4)^2+(-1)^2+(-3)^2+2^2+3^2+2^2+3^2+3^2+(-3)^2+(-2)^2}{10}=7.4$$

이때 $7.4>0.6$이므로 지민이의 점수가 승준이의 점수보다 평균을 중심으로 더 넓게 흩어져 있다는 것을 알 수 있다.

읽/기/자/료 기술 통계와 추측 통계

통계학은 크게 기술 통계와 추측 통계의 두 부분으로 나눌 수 있다.
기술 통계는 관찰된 통계 집단의 성질을 기술하는 것을 목적으로 자료를 조직화하고 요약하고 기술하는 것이다. 이것은 사회나 경제 상황을 파악하거나 기상이나 해양 등의 환경을 조사하는 일에 사용되고 있다.
한편 추측 통계는 통계학 방법과 확률 이론을 섞은 것으로, '전체를 파악할 수 없을 정도의 큰 대상'이나 '아직 일어나지 않은, 미래에 일어날 것'에 관한 추측을 하는 것이다. 이것은 '부분으로 전체를 추측한다.'는 의미로 주가 예상, 금융 상품이나 보험 상품의 가격 책정 등에 사용되고 있다.

본문 해설

❶ 자료의 분포를 그림으로 그려서 비교하면 흩어져 있는 정도를 직관적으로 파악할 수 있다.

❷ 평균의 단위는 변량의 단위와 같으므로 편차의 단위도 변량의 단위와 같다.
또한 편차가 양수일 때에는 변량이 평균보다 크고, 음수일 때에는 변량이 평균보다 작다.

❸ 편차의 평균으로는 산포도를 알 수 없다. 그러나 편차를 제곱하면 그 값은 모두 양수가 되므로 편차의 제곱의 평균을 이용하면 산포도를 구할 수 있다.

기/초/력 향상 문제

1 다음 자료의 편차의 합을 구하여라.

30	15	11	20

2 다음 표를 보고 E의 편차를 구하여라.

사람	A	B	C	D	E	F
편차	4	3	−5	−7		2

답 **1** 0 **2** 3

본문 해설

❶ 표준편차를 구하는 순서는 다음과 같다.

① 자료의 평균을 구한다.
② 각 변량의 편차를 구한다.
③ 편차의 제곱을 모두 더한다.
④ ③에서 구한 합을 변량의 개수로 나누어 분산을 구한다.
⑤ 분산의 양의 제곱근을 구한다.

❷ 분산은 편차를 제곱한 값의 평균이므로 분산의 양의 제곱근인 표준편차는 원래 자료와 측정 단위가 같다.

교과서 146 쪽

이와 같이 평균을 중심으로 각 변량들이 흩어져 있는 정도를 알기 위하여 각 편차의 제곱의 합을 변량의 개수로 나눈 값, 즉 편차의 제곱의 평균을 **분산**이라고 한다. 또 분산의 양의 제곱근을 **표준편차**라고 한다.

● 분산 또는 표준편차가 클수록 변량이 평균으로부터 넓게 흩어져 있음을 의미하고, 분산 또는 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 모여 있음을 의미한다.

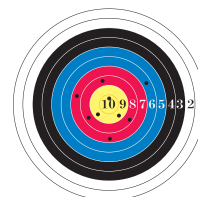
이상을 정리하면 다음과 같다.

분산과 표준편차

(1) $(\text{분산})=\dfrac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}$ ❶ 차)$=\sqrt{(\text{분산})}$

예제 1

오른쪽 그림은 어떤 양궁 선수가 9개의 화살을 쏘아 과녁에 맞힌 것을 나타낸 것이다. 이 선수가 얻은 점수의 분산과 표준편차를 구하여라. (단, 표준편차는 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)



● 분산이나 표준편차를 구하기 위해서는 (편차)=(변량)−(평균)을 계산해야 하므로 먼저 평균을 구한다.

● 풀이 먼저 평균을 구하여 보자.

$$(\text{평균})=\frac{6+7+7+8+8+8+9+9+10}{9}=\frac{72}{9}=8(\text{점})$$

각 변량에 대한 편차와 편차의 제곱을 구하면 다음과 같다.

변량(점)	6	7	7	8	8	8	9	9	10	합계
편차(점)	−2	−1	−1	0	0	0	1	1	2	0
$(\text{편차})^2$	4	1	1	0	0	0	1	1	4	12

따라서 구하는 분산과 표준편차는

$$(\text{분산})=\frac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

$$(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{\frac{4}{3}}=1.15\cdots(\text{점}) \rightarrow 1.2\text{점}$$

❷ 단위와 표준편차 같다.

답 ● $(\text{분산})=\frac{4}{3}$, (표준편차)=1.2(점)

목표| 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)

$$=\frac{58+49+61+52+55+60+51+54+57+63}{10}$$

$$=\frac{560}{10}=56(\text{g})$$

변량(g)	58	49	61	52	55	60	51	54	57	63	합계
편차(g)	2	−7	5	−4	−1	4	−5	−2	1	7	0
$(\text{편차})^2$	4	49	25	16	1	16	25	4	1	49	190

$$(\text{분산})=\frac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}=\frac{190}{10}=19$$

$(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{19}=4.35\cdots(\text{g})$

따라서 표준편차는 **4.4 g**이다.

문/제/해/결

|출제 의도| 분산이나 표준편차를 이용하여 두 자료의 흩어진 정도를 비교할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이|

A 모둠의 턱걸이 횟수 (단위: 회)

8	7	6	7	6
7	8	7	9	8

B 모둠의 턱걸이 횟수 (단위: 회)

4	10	7	8	7
10	9	8	5	9

• A 모둠

$$(\text{평균})=\frac{8+7+6+7+6+7+8+7+9+8}{10}$$

$$=\frac{73}{10}=7.3(\text{회})$$

교과서 147 쪽

문제 ❙

다음은 달걀 10개의 무게를 재어서 나타낸 것이다. 달걀 무게의 표준편차를 구하여라. (단, 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

● 무게의 단위는 힘의 단위인 N(뉴턴)이지만 일상생활에서는 g(그램)이나 kg(킬로그램)을 사용하는 것을 허용한다.

달걀 무게 (단위: g)

58	49	61	52	55
60	51	54	57	63

문제해결 모둠별로 윗몸 일으키기, 50 m 달리기 등과 같은 기초 체력 단련 운동의 기록을 조사하고, 분포 상태가 더 고른 모둠을 찾아보자.

도수분포표에서 분산과 표준편차를 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 표는 2008년 베이징 올림픽 경기에서 메달을 많이 획득한 10개국의 메달 수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

획득 메달 수 (단위: 개)

국가	금	은	동	합계
중국	51	21	28	100
미국	36	38	36	110
러시아	23	21	28	72
영국	19	13	15	47
독일	16	10	15	41
오스트레일리아	14	15	17	46
대한민국	13	10	8	31
일본	9	6	10	25
이탈리아	8	10	10	28
프랑스	7	16	17	40

1 각 국가의 메달 수의 합계를 계급의 크기가 20개인 도수분포표로 나타내고 평균을 구하여 보자.

2 도수분포표에서 편차와 분산은 어떻게 구할 수 있는지 말하여 보자.

$$(\text{분산})=\{(8-7.3)^2+(7-7.3)^2+(6-7.3)^2+(7-7.3)^2+(6-7.3)^2+(7-7.3)^2+(8-7.3)^2+(7-7.3)^2+(9-7.3)^2+(8-7.3)^2\}\div10$$
$$=(0.49+0.09+1.69+0.09+1.69+0.09+0.49+0.09+2.89+0.49)\div10$$
$$=8.1\div10=0.81$$

• B 모둠

$$(\text{평균})=\frac{4+10+7+8+7+10+9+8+5+9}{10}=\frac{77}{10}=7.7(\text{회})$$

$$(\text{분산})=\{(4-7.7)^2+(10-7.7)^2+(7-7.7)^2+(8-7.7)^2+(7-7.7)^2+(10-7.7)^2+(9-7.7)^2+(8-7.7)^2+(5-7.7)^2+(9-7.7)^2\}\div10$$
$$=(13.69+5.29+0.49+0.09+0.49+5.29+1.69+0.09+7.29+1.69)\div10$$
$$=36.1\div10=3.61$$

A 모둠의 턱걸이 횟수의 분산이 B 모둠의 턱걸이 횟수의 분산보다 작으므로 **A 모둠의 턱걸이 횟수의 분포 상태가 더 고르다.**

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구하는 방법을 알게 하려는 것이다.

1. 구하는 도수분포표는 다음과 같다.

획득 메달 수

계급(개)	도수(개국)
20 이상 ~ 40 미만	3
40 ~ 60	4
60 ~ 80	1
80 ~100	0
100 ~120	2
합계	10

위의 자료로부터 다음과 같은 표를 얻는다.

획득 메달 수

계급(개)	도수(개국)	계급값(개)	(계급값)×(도수)
20 이상 ~ 40 미만	3	30	90
40 ~ 60	4	50	200
60 ~ 80	1	70	70
80 ~100	0	90	0
100 ~120	2	110	220
합계	10		580

$$(\text{평균})=\frac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수의 총합})}=\frac{580}{10}$$
$$=\mathbf{58}(\text{개})$$

2. 각 계급의 계급값에서 평균을 빼어 편차를 구할 수 있다. 또한 편차의 제곱에 도수를 곱한 값들의 평균을 계산하여 분산을 구할 수 있다.

본문 해설

❶ 도수분포표에서는 자료 하나하나의 변량을 알지 못하므로 한 계급에 속하는 자료는 모두 그 계급의 계급값으로 간주한다. 따라서 도수분포표에서 구한 평균과 분산은 원래 자료의 평균, 분산과 다를 수 있다.

지/도/자/료

1. 평균편차

n개의 자료 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 평균을 m, 중앙값을 M_e라고 하자.

이때

$$(x_1-m)+(x_2-m)+\cdots+(x_n-m)=0$$

이므로 이를 방지하기 위하여 편차의 절댓값의 평균, 즉

$$\frac{1}{n}(|x_1-m|+|x_2-m|+\cdots+|x_n-m|)$$

을 산포도로 쓰기도 한다. 이것을 평균편차(平均偏差, mean deviation)라고 한다.

평균편차를 구할 때, 대푯값으로 평균 m 대신에 중앙값 M_e를 쓰는 것이 보다 효과적이다.

즉,

$$(\text{평균편차})=\frac{1}{n}(|x_1-M_e|+|x_2-M_e|+\cdots+|x_n-M_e|)$$

이다.

2. 분산

n개의 자료 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 평균이 m일 때

$$\begin{aligned}(\text{분산})&=\frac{1}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\}\\&=\frac{1}{n}\{(x_1{}^2-2mx_1+m^2)+(x_2{}^2-2mx_2+m^2)\\&\qquad+\cdots+(x_n{}^2-2mx_n+m^2)\}\\&=\frac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)\\&\qquad-2m\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)+\frac{nm^2}{n}\\&=\frac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)-2m\cdot m+m^2\\&=\frac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)-m^2\end{aligned}$$

따라서 분산은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$(\text{분산})=\frac{\{(\text{변량})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}-(\text{평균})^2$$

교과서 148 쪽

도수분포표에서
• (평균)= $\frac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수의 총합})}$
• (편차)=(계급값)−(평균)

도수분포표로 주어진 자료의 분산과 표준편차를 구할 때에는 다음과 같은 순서로 표를 만들어 계산할 수 있다.

❶ (계급값)×(도수)의 값을 각각 구하고, 그 총합을 구한다.
❷ ❶에서 구한 총합을 도수의 총합으로 나누어 평균을 구한다.
❸ 각 계급값에서 평균을 뺀 편차를 구한다.
❹ (편차)^2×(도수)의 값을 각각 구하고, 그 총합을 구한다.
❺ ❹에서 구한 총합을 도수의 총합으로 나누어 분산을 구한다.
❻ ❺에서 구한 분산의 양의 제곱근인 표준편차를 구한다.

이를테면 탐구 활동의 자료를 이용하여 위와 같은 순서로 분산과 표준편차를 구하면 다음과 같다.

계급(개)	도수(개국)	계급값(개)	❶ (계급값)×(도수)	❸ 편차(개)	(편차)^2	❹ (편차)^2×(도수)
20 이상 ~ 40 미만	3	30	90	−28	784	2352
40 ~ 60	4	50	200	−8	64	256
60 ~ 80	1	70	70	12	144	144
80 ~ 100	0	90	0	32	1024	0
100 ~ 120	2	110	220	52	2704	5408
합계	10		580			8160

❷ $(\text{평균})=\frac{580}{10}=58(\text{개})$

❺ $(\text{분산})=\frac{8160}{10}=816$

❻ $(\text{표준편차})=\sqrt{816}=28.565\cdots(\text{개})$

따라서 도수분포표로 주어진 자료의 분산과 표준편차는 다음과 같이 구한다.

❶ 표에서의 분산과 표준편차

(분산)= $\frac{\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수의 총합})}$

(2) $(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}$

읽/기/자/료 피어슨과 피셔

피어슨(Pearson, K.: 1857~1936)은 수리 통계학의 창시자이자 생물 통계학의 선구자로 알려져 있다. 주로 유전이나 진화 등의 생물학적 문제에 통계학을 적용하였고, 회귀분석, 상관계수, 카이제곱검정의 이론을 발전시켰으며 1893년에는 표준편차라는 용어를 고안하였다.

피셔(Fisher, R. A.: 1890~1962)는 모집단과 표본의 구별을 명확히 하고 추정과 검정에 관한 통계 이론을 완성시켰다. 또 근대 통계학의 주류를 이루고 있는 추측 통계학의 기초가 되는 가설, 검정이론을 만들어 통계학의 발전에 크게 기여하였다. 오늘날 이런 피셔의 이론은 품질 관리, 여론 조사 등 경영 관리에서 큰 역할을 하고 있을 뿐만 아니라 사회 전반에 유용하게 쓰이고 있다.

예 제 2

오른쪽 도수분포표는 어느 날 우리나라 20개 지역의 평균 기온을 조사하여 나타낸 것이다. 평균 기온의 분산과 표준편차를 구하여라. (단, 표준편차는 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

평균 기온

계급(℃)	도수(곳)
9 이상 ~ 11 미만	3
11 ~ 13	6
13 ~ 15	8
15 ~ 17	2
17 ~ 19	1
합계	20

도수분포표를 오른쪽 표와 같이 나타내면 평균과 분산, 표준편차를 구하기 편리하다.

풀이 먼저 다음과 같은 표를 만든다.

계급(℃)	도수(곳)	계급값(℃)	(계급값)×(도수)	편차(℃)	(편차)^2×(도수)
9 이상 ~ 11 미만	3	10	30	−3.2	30.72
11 ~ 13	6	12	72	−1.2	8.64
13 ~ 15	8	14	112	0.8	5.12
15 ~ 17	2	16	32	2.8	15.68
17 ~ 19	1	18	18	4.8	23.04
합계	20		264		83.2

위의 표에 의하여 평균과 분산 및 표준편차를 구하면 다음과 같다.

(평균)$=\frac{264}{20}=13.2$(℃)

(분산)$=\frac{83.2}{20}=4.16$

(표준편차)$=\sqrt{4.16}=2.039\cdots$(℃) ➡ 2.04 ℃

답 (분산)=4.16, (표준편차)=2.04(℃)

문제 2

오른쪽 도수분포표는 현희네 중학교 3학년 학생 40명을 대상으로 1년 동안 실시한 봉사 활동 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 봉사 활동 시간의 분산과 표준편차를 구하여라. (단, 표준편차는 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)

봉사 활동 시간

계급(시간)	도수(명)
0 이상 ~ 10 미만	6
10 ~ 20	8
20 ~ 30	14
30 ~ 40	8
40 ~ 50	4
합계	40

2

목표 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이

계급(시간)	도수(명)	계급값(시간)	(계급값)×(도수)	편차(시간)	(편차)^2×(도수)
0 이상 ~ 10 미만	6	5	30	−19	2166
10 ~ 20	8	15	120	−9	648
20 ~ 30	14	25	350	1	14
30 ~ 40	8	35	280	11	968
40 ~ 50	4	45	180	21	1764
합계	40		960		5560

(평균)$=\frac{960}{40}=24$(시간)

(분산)$=\frac{5560}{40}=$**139**

(표준편차)$=\sqrt{139}=11.7\cdots$(시간)

따라서 표준편차는 **12시간**이다.

지/도/자/료

통계 소프트웨어는 단순한 도표 그리기와 계산뿐만 아니라 통계의 의미를 직관적으로 이해하고 통계적 사고를 하는 데 도움을 준다. 또한 대용량의 자료를 쉽게 처리하여 주기 때문에 편리하다. 학생 스스로가 관심 있는 분야의 소재를 선정한 후 다양한 통계 소프트웨어를 활용하여 자료를 해석할 수 있도록 지도한다.

다음은 통계 소프트웨어를 이용하여 대푯값과 산포도를 구하는 과정이다.

❶ 교과서 143쪽 문제 5에서 연간 규모 3 이상의 지진이 발생한 횟수를 다음 그림과 같이 세로로 입력한다.

❷ [통계분석]–[기초 분석]–[기초 통계량]을 선택한다.

❸ 기초 통계량 대화상자에서 변수 칸의 '1:'을 선택하고 ▶▶ 을 눌러 분석변수 칸으로 보낸다.

❹ [자료분석]을 누르면 다음과 같이 평균, 중앙값, 최빈값과 분산, 표준편차 등을 알 수 있다.

3

목표| 도수분포표에서 표준편차를 구하고, 두 자료의 흩어진 정도를 비교할 수 있게 한다.

풀이|

(1) • 8월

계급(분)	도수(명)	계급값(분)	(계급값)×(도수)	편차(분)	$(편차)^2$×(도수)
$0^{이상}$ ~ $40^{미만}$	12	20	240	−56	37632
40 ~ 80	4	60	240	−16	1024
80 ~120	6	100	600	24	3456
120 ~160	6	140	840	64	24576
160 ~200	2	180	360	104	21632
합계	30		2280		88320

$(평균)=\frac{2280}{30}=76(분)$

$(분산)=\frac{88320}{30}=2944$

$(표준편차)=\sqrt{2944}=54.2\cdots(분)$

따라서 표준편차는 **54분**이다.

• 9월

계급(분)	도수(명)	계급값(분)	(계급값)×(도수)	편차(분)	$(편차)^2$×(도수)
$0^{이상}$ ~ $40^{미만}$	6	20	120	−80	38400
40 ~ 80	5	60	300	−40	8000
80 ~120	9	100	900	0	0
120 ~160	3	140	420	40	4800
160 ~200	7	180	1260	80	44800
합계	30		3000		96000

$(평균)=\frac{3000}{30}=100(분)$

$(분산)=\frac{96000}{30}=3200$

$(표준편차)=\sqrt{3200}=56.5\cdots(분)$

따라서 표준편차는 **57분**이다.

(2) 휴대 전화 통화 시간의 표준편차가 8월이 더 작으므로 **8월의 휴대 전화 통화 시간이 9월보다 더 고르다고 할 수 있다.**

교과서 150 쪽

문제 3

다음 도수분포표는 지수네 반 학생 30명을 대상으로 지난 두 달 동안의 휴대 전화 통화 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

휴대 전화 통화 시간

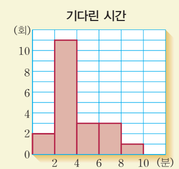
계급(분)	도수(명)	
	8월	9월
$0^{이상}$ ~ $40^{미만}$	12	6
40 ~ 80	4	5
80 ~120	6	9
120 ~160	6	3
160 ~200	2	7
합계	30	30

(1) 8월과 9월의 휴대 전화 통화 시간의 표준편차를 소수 첫째 자리에서 반올림하여 구하여라.

(2) 8월과 9월 두 달 중에서 어느 달의 휴대 전화 통화 시간이 더 고르다고 할 수 있는가?

창의 UP

오른쪽 그림은 세진이가 버스 정류장에서 버스가 올 때까지 기다린 시간을 20회 조사하여 히스토그램으로 나타낸 것이다. 기다린 시간의 표준편차를 구하는 방법을 설명하여라. (단, 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)



수학이 만난 **세상 속 직업 이야기**

공인 회계사

공인 회계사는 기업의 회계에 관한 감사, 계산, 감정 등의 업무를 담당하는 전문가로, 자본 시장의 감시자라는 윤리 의식과 전문성을 가져야 한다. 깨끗하고 건전한 기업 윤리는 국가 경제를 좌우하는 요소인데, 공인 회계사들의 일은 우리나라 기업들이 건전한 구조로 성장하는 데 도움을 주고 있다.

공인 회계사는 일의 특성상 통계나 수치 자료를 주로 다루므로 분석적인 사고와 꼼꼼하고 치밀한 성격이 필요하고, 수학이 적성에 맞는 사람에게 적합한 직업이다.

창의 UP

|출제 의도| 히스토그램을 보고 도수분포표를 만들어 표준편차를 구할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이|

계급(분)	도수(회)	계급값(분)	(계급값)×(도수)	편차(분)	$(편차)^2$×(도수)
$0^{이상}$ ~ $2^{미만}$	2	1	2	−3	18
2 ~ 4	11	3	33	−1	11
4 ~ 6	3	5	15	1	3
6 ~ 8	3	7	21	3	27
8 ~10	1	9	9	5	25
합계	20		80		84

$(평균)=\frac{80}{20}=4(분)$

$(분산)=\frac{84}{20}=4.2$

$(표준편차)=\sqrt{4.2}=2.04\cdots(분)$

따라서 표준편차는 **2분**이다.

중/단/원 기초

수준별

> 변량을 크기순으로 나열하였을 때, 가운데 위치한 값을 중앙값이라고 한다.

1 다음은 경아네 가족 5명을 대상으로 턱걸이를 한 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 턱걸이 횟수의 평균과 중앙값을 구하여라.

턱걸이 횟수 (단위: 회)

3	15	1	2	6

2 다음은 재영이네 동네 16가구를 대상으로 자녀 수를 조사하여 나타낸 것이다. 자녀 수의 평균과 중앙값, 최빈값을 구하여라.

자녀 수 (단위: 명)

1	3	2	1	1	2	3	4
2	1	2	2	3	0	2	1

> • 편차: 각 변량에서 평균을 뺀 값
> • 분산: 편차의 제곱의 평균
> • 표준편차: 분산의 양의 제곱근

3 다음 표는 지영이가 준비해야 하는 교과서의 권수를 요일별로 나타낸 것이다. 물음에 답하여라. (단, 표준편차는 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

요일별 교과서 권수

요일	월	화	수	목	금
권수(권)	5	6	6	7	6

(1) 평균을 구하여라.
(2) 각 변량의 편차를 구하여라.
(3) 분산과 표준편차를 구하여라.

> 도수분포표에서
> • (분산)$=\dfrac{\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수의 총합})}$
> • (표준편차)$=\sqrt{(\text{분산})}$

4 다음 표를 보고 분산과 표준편차를 구하여라. (단, 표준편차는 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

계급값	도수	(계급값)×(도수)	편차	$(\text{편차})^2\times(\text{도수})$
6	1	$6\times1=6$	$6-10=-4$	$(-4)^2\times1=16$
8	2	$8\times2=16$	$8-10=-2$	$(-2)^2\times2=8$
10	4	$10\times4=40$	$10-10=0$	$0^2\times4=0$
12	2	$12\times2=24$	$12-10=2$	$2^2\times2=8$
14	1	$14\times1=14$	$14-10=4$	$4^2\times1=16$
합계	10	100		48

중/단/원 기초

1

목표| 평균과 중앙값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\dfrac{3+15+1+2+6}{5}=\mathbf{5.4}$**(회)**

턱걸이를 한 횟수를 작은 값부터 차례로 나열하면 1, 2, 3, 6, 15이므로 중앙값은 3번째 변량인 **3회**이다.

2

목표| 평균과 중앙값, 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\dfrac{0+1\times5+2\times6+3\times3+4\times1}{16}$

$=\mathbf{1.875}$**(명)**

자녀 수를 작은 값부터 차례로 나열하면

0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4

이므로 중앙값은 8번째 변량 2명과 9번째 변량 2명의 평균인 **2명**이다.

최빈값은 가장 많이 나타난 **2명**이다.

3

목표| 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) (평균)$=\dfrac{5+6+6+7+6}{5}=\mathbf{6}$**(권)**

(2)

요일	월	화	수	목	금
권수(권)	5	6	6	7	6
편차(권)	**−1**	**0**	**0**	**1**	**0**

(3) (분산)$=\dfrac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}=\dfrac{2}{5}=\mathbf{0.4}$

(표준편차)$=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{0.4}=0.63\cdots$(권)

따라서 표준편차는 **0.6권**이다.

4

목표| 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (분산)$=\dfrac{[\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}]}{(\text{도수의 총합})}=\dfrac{48}{10}=\mathbf{4.8}$

(표준편차)$=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{4.8}=2.19\cdots$

따라서 표준편차는 **2.2**이다.

직/업/관/련/자/료 공인 회계사

근무 환경 ● 공인 회계사는 회계법인, 합동회계사무소, 일반 기업체에서 근무하거나 개인적으로 개업하여 회계에 관한 용역 업무를 계획하고 관리한다. 의뢰인의 위임에 따라 재무 회계 서류, 기업의 소득세에 대한 보고서를 작성하고, 재무 회계 감사 또는 증명을 하며 재무 서류의 조정, 재무 조사 및 기타 회계 사무에 관한 상담을 한다.

적성 및 흥미 ● 회계 관련 서류들을 세밀하게 검토하고 계산상의 오류를 잡아낼 수 있는 수리 능력과 분석력, 정확한 판단력이 필요하다. 꼼꼼하고 치밀한 성격이 유리하며 공정한 업무 처리 능력과 원만한 대인 관계 능력이 요구된다.

관련 학과 ● 경제학, 경영학, 회계학 등

중/단/원 기본

1

목표| 중앙값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 산의 높이를 작은 값부터 차례로 나열하면

1439, 1468, 1563, 1567, 1708, 1915, 1950

이므로 중앙값은 4번째 변량인 **1567 m**이다.

2

목표| 중앙값과 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 맥박 수를 작은 값부터 차례로 나열하면

85, 87, 88, 88, 89, 89, 90, 90, 90, 90, 90, 91, 91, 91, 92, 92, 93, 93, 94, 94

이므로 중앙값은 10번째 변량 90회와 11번째 변량 90회의 평균인 **90회**이다.

최빈값은 가장 많이 나타난 **90회**이다.

교과서 152 쪽

중/단/원 기본 수준별

대푯값 **1** 다음 표는 우리나라에 있는 7개의 산의 높이를 조사하여 나타낸 것이다. 산의 높이의 중앙값을 구하여라.

산의 높이

산	태백산	지리산	설악산	한라산	화악산	오대산	소백산
높이(m)	1567	1915	1708	1950	1468	1563	1439

대푯값 **2** 다음은 혁주네 반 학생 20명을 대상으로 1분 동안의 맥박 수를 조사하여 나타낸 것이다. 맥박 수의 중앙값과 최빈값을 구하여라.

맥박 수 (단위: 회)

90	89	90	88	89	91	92	94	91	93
91	90	93	87	94	90	88	92	85	90

산포도 **3** 다음 도수분포표는 지섭이네 반 학생 32명을 대상으로 1분 동안 줄넘기를 한 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 줄넘기 횟수의 표준편차를 구하여라. (단, 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)

줄넘기 횟수

계급(회)	도수(명)
0 이상 ~ 20 미만	3
20 ~ 40	3
40 ~ 60	5
60 ~ 80	6
80 ~100	10
100 ~120	5
합계	32

3

목표| 도수분포표에서 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| 평균은

$$\frac{10\times3+30\times3+50\times5+70\times6+90\times10+110\times5}{32}$$

$$=\frac{2240}{32}=70(\text{회})$$

계급(회)	도수(명)	계급값(회)	편차(회)	(편차)$^2\times$(도수)
0 이상 ~ 20 미만	3	10	−60	10800
20 ~ 40	3	30	−40	4800
40 ~ 60	5	50	−20	2000
60 ~ 80	6	70	0	0
80 ~100	10	90	20	4000
100 ~120	5	110	40	8000
합계	32			29600

$$(\text{분산})=\frac{29600}{32}=925$$

$$(\text{표준편차})=\sqrt{925}=30.4\cdots(\text{회})$$

따라서 표준편차는 **30회**이다.

중/단/원 실력

1

목표| 적절한 대푯값을 선택할 수 있게 한다.

풀이| 평균은

$$\frac{105+110+130+1000+95+100+140+120}{8}$$

$$=\frac{1800}{8}=225(\text{만 원})\text{이다.}$$

중앙값은 월 매출액을 작은 값부터 차례로 나열하였을 때, 4번째 변량 110만 원과 5번째 변량 120만 원의 평균이므로

$$\frac{110+120}{2}=115(\text{만 원})\text{이다.}$$

한편 각 변량이 나타난 횟수는 모두 한 번씩이므로 최빈값은 없다. 그런데 이 가게의 월 매출액 중에 1000만 원이 있었지만 대개는 100여만 원이므로 **중앙값**인 115만 원이 대푯값으로 더 적절하다.

교과서 153 쪽

중/단/원 실력

1 다음은 어느 꽃 가게의 8개월 동안의 월 매출액을 조사하여 나타낸 것이다. 월 매출액의 대푯값으로 적절한 것은 평균, 중앙값, 최빈값 중에서 무엇인지 말하여라.

월 매출액 (단위: 만 원)

105	110	130	1000	95	100	140	120

• 분산이나 표준편차를 구하기 위해선 편차를 알아야 하므로 평균을 먼저 구해야 한다.

2 다음 표는 어느 프로 축구 리그에서 1위부터 5위까지의 팀별 득점, 실점을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라. (단, 표준편차는 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

팀별 득실점

순위	팀	득점(점)	실점(점)
1	A	42	12
2	B	41	13
3	C	44	21
4	D	40	24
5	E	38	25

(1) 득점의 표준편차를 구하여라.
(2) 실점의 표준편차를 구하여라.
(3) 득점과 실점 중에서 어느 것이 팀 사이에 더 심한 차이를 보이는가?

3 다음 표는 승희네 모둠과 영호네 모둠에 속한 학생들의 키를 조사하여 나타낸 것이다. 두 모둠의 키의 분산을 소수 첫째 자리에서 반올림하여 각각 구하고 어떤 모둠의 학생들의 키가 더 고르다고 할 수 있는지 말하여라.

학생들의 키 (단위: cm)

승희	156	156	158	172	180	156	156
영호	162	161	162	164	160	165	160

2

목표| 각 자료의 표준편차를 구하고, 이를 이용하여 두 자료의 흩어진 정도를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) (평균)$=\frac{42+41+44+40+38}{5}=\frac{205}{5}=41$(점)

(분산)$=\frac{1^2+0^2+3^2+(-1)^2+(-3)^2}{5}=\frac{20}{5}=4$

(표준편차)$=\sqrt{4}=$**2(점)**

(2) (평균)$=\frac{12+13+21+24+25}{5}=\frac{95}{5}=19$(점)

(분산)$=\frac{(-7)^2+(-6)^2+2^2+5^2+6^2}{5}=\frac{150}{5}=30$

(표준편차)$=\sqrt{30}=5.47\cdots$(점)

따라서 표준편차는 **5.5점**이다.

(3) 실점의 표준편차가 득점의 표준편차보다 크므로 **실점이 득점보다 팀 사이에 더 심한 차이를 보인다.**

3

목표| 각 자료의 표준편차를 구하고, 이를 이용하여 두 자료의 흩어진 정도를 비교할 수 있게 한다.

풀이| • 승희네 모둠

(평균)

$=\frac{156+156+158+172+180+156+156}{7}$

$=\frac{1134}{7}=162$(cm)

키(cm)	편차(cm)	(편차)^2
156	-6	$(-6)^2=36$
156	-6	$(-6)^2=36$
158	-4	$(-4)^2=16$
172	10	$10^2=100$
180	18	$18^2=324$
156	-6	$(-6)^2=36$
156	-6	$(-6)^2=36$
합계		584

(분산)$=\frac{584}{7}=83.4\cdots$ ➡ **83**

• 영호네 모둠

(평균)

$=\frac{162+161+162+164+160+165+160}{7}$

$=\frac{1134}{7}=162$(cm)

키(cm)	편차(cm)	(편차)^2
162	0	$0^2=0$
161	-1	$(-1)^2=1$
162	0	$0^2=0$
164	2	$2^2=4$
160	-2	$(-2)^2=4$
165	3	$3^2=9$
160	-2	$(-2)^2=4$
합계		22

(분산)$=\frac{22}{7}=3.1\cdots$ ➡ **3**

따라서 분산이 작은 **영호네 모둠 학생들의 키가 더 고르다고 할 수 있다.**

수행 과제

● 수행 과제 의도

이 수행 과제는 통계를 이용하여 우리나라의 기온 변화를 분석해 보고 그 결과를 토론해 봄으로써 통계의 실용성을 느끼고, 흥미를 유발하기 위한 것이다.

과제 1 _예시

년대	1980	1990	2000
평균(℃)	12.1	12.7	12.9
분산	0.2	0.3	0.1
표준편차(℃)	0.4	0.5	0.3

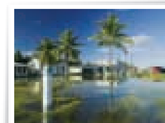
교과서 154 쪽

수행 과제

지구는 얼마나 더워지고 있는가?

기후 변화에 관한 정부 간 협의체인 IPCC가 발표한 4차 보고서에 따르면 지난 50년간 지구 대기의 평균 온도는 10년마다 0.13℃씩 올라갔다고 한다. 지구 온난화가 가속화하자 극지에서 가장 급격한 변화가 나타나기 시작했다. 북극의 빙하가 점점 줄어 북극곰이 살 터전이 줄어들고 있고, 적도 부근의 작은 섬 투발루에서는 해마다 해수면이 상승하여 나라가 사라질 위기에 처해 있다.

갈 곳 없는 북극곰


가라앉는 나라 투발루

다음 표는 우리나라의 1980년부터 2009년까지의 연평균 기온을 1년마다 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

연평균 기온 (단위: ℃)

년대＼년	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1980	11.3	11.6	12.5	12.4	11.9	12.3	11.7	12.4	12.2	12.9
1990	13.2	12.4	12.6	11.9	13.3	12.1	12.1	12.8	13.6	12.9
2000	12.6	12.8	12.7	12.6	13.3	12.5	13.0	13.4	13.3	12.9

〈자료: 기상청〉

과제 1 각 모둠별로 다음 표를 완성하여 보자. (단, 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

년대	1980	1990	2000
평균(℃)			
분산			
표준편차(℃)			

과제 2 과제 1에서 완성한 표를 보고, 지구 온난화와 관련하여 우리나라의 기후 변화에 대해 토론하여 보자.

교과서 155 쪽

학습에 대한 자/기/평/가

이름: ____________

점검 항목				
학습 내용	대푯값의 의미를 이해하였는가?			
	중앙값, 최빈값, 평균의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있는가?			
	산포도의 의미를 이해하였는가?			
	분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있는가?			
학습 태도	학습 준비물을 잘 준비하였는가?			
	수업 시간에 적극적으로 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			

재미있었거나 어려웠던 내용 적어 보기

더 알고 싶거나 궁금한 점 적어 보기

스스로 평가하기

선생님 의견

과제 2 _예시

1980년부터 2000년까지 연대별로 연평균 기온의 평균을 구하여 비교한 결과, 기온이 점점 상승한 것으로 나타났다. 이것은 우리나라에 온난화가 지속되고 있다는 것을 의미한다.

교과서 156 쪽

Ⅳ. 통계

대단원 핵심 한눈에 보기

① 대푯값

대푯값	자료 전체의 특징을 하나의 수로 나타낸 값
평균	변량의 총합을 변량의 개수로 나눈 값 $(\text{평균})=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{변량의 개수})}$
중앙값	(1) 중앙값: 변량을 크기순으로 나열하였을 때, 가운데에 위치한 값 (2) 변량의 개수가 n일 때, 중앙값은 다음과 같다. ① n이 홀수인 경우: 변량을 크기순으로 나열하였을 때, $\dfrac{n+1}{2}$번째 변량 ② n이 짝수인 경우: 변량을 크기순으로 나열하였을 때, $\dfrac{n}{2}$번째와 $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$번째 변량의 평균
최빈값	변량 중에서 가장 많이 나타난 값

② 산포도

산포도	변량이 흩어져 있는 정도를 하나의 수로 나타낸 값
분산과 표준편차	(1) 분산: 편차의 제곱의 평균 ① 변량이 주어질 경우 $(\text{편차})=(\text{변량})-(\text{평균})$ $(\text{분산})=\dfrac{\{(\text{편차})^2\text{의 총합}\}}{(\text{변량의 개수})}$ ② 도수분포표가 주어질 경우 $(\text{편차})=(\text{계급값})-(\text{평균})$ $(\text{분산})=\dfrac{[\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}]}{(\text{도수의 총합})}$ (2) 표준편차: 분산의 양의 제곱근 $(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}$ (3) 분산 또는 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 모여 있음을 의미하고, 분산 또는 표준편차가 클수록 변량이 평균으로부터 넓게 흩어져 있음을 의미한다.

〈인구 밀도〉

이번 단원에서 배운 용어와 기호

• 대푯값, 중앙값, 최빈값, 산포도, 편차, 분산, 표준편차

만화로 보는 수학 이야기

만화에서는 평균만으로 전체적인 상황을 판단할 수 없다는 것을 말하고 있다. 평균 이외의 대푯값으로는 중앙값, 최빈값이 있으며 어떤 자료를 분석할 때에는 그 자료에 따라 적절한 대푯값을 선택할 수 있어야 한다.

생각 키/우/기

일반적으로 자료에 다른 변량에 비해서 매우 크거나 작은 값이 포함되어 있을 때에는 대푯값으로 평균보다 중앙값을 사용하는 것이 합리적이다.

일반적으로 규격화된 용량, 옷의 치수, 내신 등급과 같은 자료의 대푯값을 구할 때 흔히 최빈값이 쓰인다.

지도 내용

1. 대푯값, 평균, 중앙값, 최빈값의 의미를 이해하고, 평균, 중앙값, 최빈값을 구할 수 있도록 한다.

2. 산포도, 분산, 표준편차의 의미를 이해하고, 분산, 표준편차를 구할 수 있도록 한다.

교과서 157 쪽

만화로 보는 수학 이야기

평균만으론 부족해!

3 m가 넘는 곳도 있는데……

생각 키/우/기 | 평균이 대푯값으로 적당하지 않은 예를 실생활에서 찾아보자.

대/단/원 평가 문제

1

목표| 변량들의 평균을 알 때, 나머지 변량을 구할 수 있게 한다.

풀이| 7반의 학생 수를 x명으로 놓으면

$$\frac{34+28+27+36+31+25+x}{7}=30$$

$181+x=210$, $x=29$(명)

답 ②

2

목표| 중앙값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 나이를 작은 값부터 차례로 나열하면

13, 14, 14, 15, 16, 19

이므로 중앙값은 3번째 변량 14세와 4번째 변량 15세의 평균인 14.5세이다.

답 ②

3

목표| 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 최빈값은 가장 많이 나타난 1명이다.

답 ①

교과서 158 쪽

대/단/원 평가 문제

선/택/형

1 다음 표는 현성이네 중학교 3학년 학생 수를 반별로 조사하여 나타낸 것이다. 한 반의 학생 수의 평균이 30명일 때, 7반의 학생 수는?

3학년 학생 수

반	1	2	3	4	5	6	7
학생 수(명)	34	28	27	36	31	25	

① 28명 ② 29명 ③ 30명
④ 31명 ⑤ 32명

2 다음은 학생 6명의 나이를 조사하여 나타낸 것이다. 나이의 중앙값은?

나이 (단위: 세)

19	13	15	14	16	14

① 14세 ② 14.5세 ③ 15세
④ 15.5세 ⑤ 16세

3 다음은 준섭이네 동네 10가구를 대상으로 자녀 수를 조사하여 나타낸 것이다. 자녀 수의 최빈값은?

자녀 수 (단위: 명)

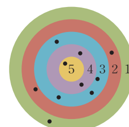
2	1	2	3	1	3	1	0	2	1

① 1명 ② 1.5명 ③ 2명
④ 2.5명 ⑤ 3명

4 변량을 크기순으로 나열하였더니 2, 4, 5, 7, x였다. 이것의 평균과 중앙값이 같다고 할 때, x의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

5 오른쪽 그림은 혜선이가 1점부터 5점까지 점수가 정해진 과녁에 10발을 사격한 결과이다. 10발에 대한 사격 점수의 분산은?



① 1 ② 1.2 ③ 2
④ 2.3 ⑤ 3

6 다음 도수분포표는 성훈이네 반 학생 24명을 대상으로 등교하는 데 걸리는 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 등교하는 데 걸리는 시간의 표준편차는?

등교하는 데 걸리는 시간

계급(분)	도수(명)
0 이상 ~ 8 미만	10
8 ~ 16	7
16 ~ 24	3
24 ~ 32	2
32 ~ 40	2
합계	24

① 약 10분 ② 약 11분 ③ 약 12분
④ 약 13분 ⑤ 약 14분

4

목표| 변량들의 평균과 중앙값이 같을 때, 나머지 변량을 구할 수 있게 한다.

풀이| 중앙값은 3번째 변량인 5이고, 중앙값과 평균이 같으므로 $\frac{2+4+5+7+x}{5}=5$

$18+x=25$, $x=7$

답 ①

5

목표| 분산을 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\frac{1+2\times2+3\times4+4\times2+5}{10}=3$(점)

(분산)$=\frac{(-2)^2+(-1)^2\times2+0^2\times4+1^2\times2+2^2}{10}$

$=\frac{12}{10}=1.2$

답 ②

6

목표| 도수분포표에서 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\frac{4\times10+12\times7+20\times3+28\times2+36\times2}{24}$

$=\frac{312}{24}=13$(분)

(분산)$=\frac{(-9)^2\times10+(-1)^2\times7+7^2\times3+15^2\times2+23^2\times2}{24}$

$=\frac{2472}{24}=103$

(표준편차)$=\sqrt{103}=10.14\cdots$(분) ➡ 10분

답 ①

7

목표| 평균, 편차, 분산, 표준편차의 의미를 알고, 이를 계산할 수 있게 한다.

풀이| ④ 편차의 합은 항상 0이다.

답 ④

7 다음 자료에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

9	10	10	8	7
8	10	9	9	10

① 평균은 9이다.
② 분산은 1이다.
③ 표준편차는 1이다.
④ 편차의 합은 10이다.
⑤ 편차의 제곱의 합은 10이다.

8 다음 중에서 옳은 것을 모두 찾은 것은?

ㄱ. 평균보다 작은 변량의 편차는 양수이다.
ㄴ. 각 변량의 편차의 평균은 0이다.
ㄷ. 변량들이 고르게 분포되어 있을수록 표준편차는 작아진다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서/답/형

9 다섯 개의 변량 $2a-3$, $2b-3$, $2c-3$, $2d-3$, $2e-3$의 평균이 8일 때, 변량 a, b, c, d, e의 평균을 구하여라.

10 다음 표는 현수네 반 학생들의 중간고사 점수의 표준편차를 나타낸 것이다. 점수가 가장 고른 과목을 말하여라.

중간고사 점수

과목	국어	수학	영어	사회	과학
표준편차(점)	5.6	2.1	3.7	4.2	3.1

|서술형|

11 다음은 하연이가 지난 5월부터 9월까지 매달 도서관에 간 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 평균이 5회이고 분산이 10일 때, ab의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

도서관에 간 횟수

월	5	6	7	8	9
횟수(회)	2	a	8	b	9

|서술형|

12 환율이란 자기 나라 돈과 다른 나라 돈의 교환 비율로 다음 도수분포표는 16개월 동안 월 중 미국 달러에 대한 원화 환율의 최고가를 조사하여 나타낸 것이다. 환율의 최고가의 분산과 표준편차를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, 표준편차는 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)

환율 최고가

계급(원)	도수(개월)
900 이상 ~1100 미만	9
1100 ~1300	1
1300 ~1500	3
1500 ~1700	3
합계	16

8

목표| 평균, 편차, 표준편차의 의미를 알게 한다.

풀이| ㄱ. (편차)=(변량)−(평균)이므로 평균보다 작은 변량의 편차는 음수이다.

답 ④

9

목표| 주어진 평균을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 다섯 개의 변량의 평균은

$$\frac{(2a-3)+(2b-3)+(2c-3)+(2d-3)+(2e-3)}{5}=8$$

이 식을 정리하면 $\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=5.5$

따라서 변량 a, b, c, d, e의 평균은 5.5이다.

답 5.5

10

목표| 표준편차의 의미를 이해하게 한다.

풀이| 표준편차가 작을수록 점수가 고르게 분포되어 있는 것이므로 점수가 가장 고른 과목은 수학이다.

답 수학

11

목표| 변량들의 평균과 분산을 알 때, 나머지 변량을 구할 수 있게 한다.

풀이| 평균이 5회이므로

$\dfrac{2+a+8+b+9}{5}=5$, $a+b=6$ …㉠

분산이 10이므로

$\dfrac{(-3)^2+(a-5)^2+3^2+(b-5)^2+4^2}{5}=10$

$a^2+b^2-10(a+b)=-34$

$a^2+b^2=26$ …㉡

한편 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이므로

$36=26+2ab$, $ab=5$ …㉢

답 5

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$a+b$의 값 구하기	㉠	30%
	a^2+b^2의 값 구하기	㉡	50%
답 구하기	ab의 값 구하기	㉢	20%

12

목표| 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이|

계급(원)	도수(개월)	계급값(원)	(계급값)×(도수)	$(\text{편차})^2\times(\text{도수})$ …㉡
900 이상 ~1100 미만	9	1000	9000	360000
1100 ~1300	1	1200	1200	0
1300 ~1500	3	1400	4200	120000
1500 ~1700	3	1600	4800	480000
합계	16		19200	960000

(평균)$=\dfrac{19200}{16}=1200$(원) …㉠

(분산)$=\dfrac{960000}{16}=60000$

(표준편차)$=\sqrt{60000}=244.9\cdots$(원) → 245원 …㉢

답 분산: 60000, 표준편차: 245원

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	평균 구하기	㉠	30%
	각 계급의 $(\text{편차})^2\times(\text{도수})$의 값 구하기	㉡	50%
답 구하기	분산과 표준편차 구하기	㉢	20%

교과서 160 쪽

컴퓨터의 활용

컴퓨터를 이용하여 대푯값과 산포도를 구하여 보자.

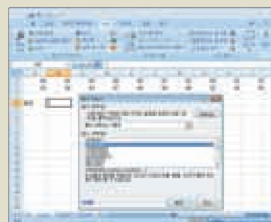
통계와 관련된 컴퓨터 프로그램을 이용하면 다음 자료에 대한 대푯값과 산포도를 쉽고, 빠르게 구할 수 있다.

90	89	90	88	89	91	92	94	91	93
91	90	93	87	94	90	88	92	85	90

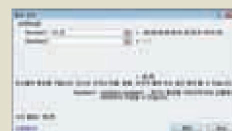
1 평균과 중앙값, 최빈값을 구하여 보자.

(1) 주어진 자료를 입력한 후 메뉴에서 [수식]－[함수 삽입]을 차례로 클릭한다.

(2) 함수 마법사 대화 상자에서 범주는 '통계', 함수는 'AVERAGE'를 선택하고 [확인]을 클릭한다.



(3) 함수 인수 대화 상자에서 자료가 입력된 셀인 'A1 : J2'를 직접 입력하거나 드래그한 후 [확인]을 클릭하면 평균이 구해진다.

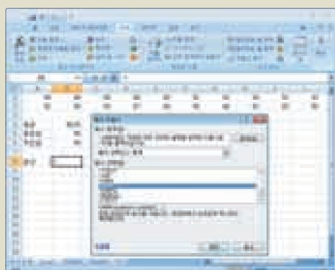


(4) 마찬가지로 함수 마법사 대화 상자에서 함수를 'MEDIAN'으로 선택하면 중앙값을 구할 수 있고, 'MODE'로 선택하면 최빈값을 구할 수 있다.

교과서 161 쪽

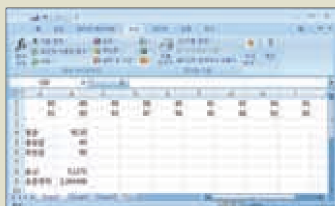
2 분산과 표준편차를 구하여 보자.

(1) ① 에서와 같은 방법으로 [수식]－[함수 삽입]을 차례로 클릭하여 함수 마법사 대화 상자가 나타나면 범주는 '통계', 함수는 'VARP'를 선택하고 [확인]을 클릭한다.



(2) 함수 인수 대화 상자에서 자료가 입력된 셀인 'A1 : J2'를 직접 입력하거나 드래그한 후 [확인]을 클릭하면 분산이 구해진다.

(3) 마찬가지로 함수 마법사 대화 상자에서 함수를 'STDEVP'로 선택하면 표준편차를 구할 수 있다.



교과서 162 쪽

수학산책

나이팅게일과 통계

우리가 흔히 백의의 천사라고 부르는 나이팅게일(Nightingale, Florence : 1820~1910)은 영국의 크림 전쟁(1854~1856) 당시 죽어 가는 병사들을 자기 몸을 아끼지 않고 돌본 천사 같은 간호사이다. 그런데 그런 그녀가 1858년 영국 왕립 통계학회에서 최초의 여성 회원으로 선출되었다.

통계와 나이팅게일은 전혀 어울리지 않는 것처럼 보인다. 그러나 나이팅게일은 간호사로만이 아닌 여성 최초의 통계학자로도 인정을 받았다.

일반적으로 통계는 자연 또는 사회적인 현상을 규명하기 위해 수집된 각종 데이터를 분석하거나 요약하여 얻어낸 자료이다. 이렇게 얻은 자료는 다양한 방법으로 해석하여 어떤 현상을 이해하는 데 사용되거나 어떤 일을 예측하는 데 활용된다.

간호사의 대명사로 알려진 나이팅게일이 어떻게 하여 통계학자로서의 또 다른 이름을 가지게 되었을까?

교과서 163 쪽

나이팅게일은 크림 전쟁 당시 38명의 성공회 수녀들과 스쿠타리의 야전 병원에서 많은 부상병들이 죽어 가는 것을 보았다. 당시 사람들은 전쟁터에서 죽어 가는 병사들은 모두 부상에 의한 것으로 생각하였다. 그러나 그녀는 전쟁터에서 직접 부상병들을 보살피며 그들이 죽는 이유는 부상이 아닌 질병 때문이라는 것을 알게 되었다. 그녀는 사망의 원인을 밝히기 위하여, 병사들의 영양 상태와 하수구 등의 위생 상태 그리고 사망과의 관계를 체계적으로 조사 및 분석하여 야전 병원의 상황을 정확하게 파악하기 위한 노력을 하였다. 그리고 이렇게 얻어진 자료들을 사람들이 쉽게 이해할 수 있도록 지금 우리가 사용하는 도표와 차트 형식으로 만들어 발표하였다.

나이팅게일은 이 결과물을 토대로 깨끗한 환경이 사람을 살릴 수 있으므로 야전 병원의 위생을 개선해야 한다는 주장의 보고서를 영국 정부에 올렸으며, 나이팅게일의 보고서를 본 정부는 야전 병원의 위생을 개선하기 시작하였다. 화장실과 오수 구덩이를 청소하고 환기구를 설치하였으며, 필요한 비품을 공급하였다.

그 결과 한 달이 지나자 42 %에 달하던 야전 병원의 환자의 사망률이 2 %까지 급격히 떨어졌다. 결국 나이팅게일은 통계를 바탕으로 무수히 많은 사람을 살리는 결과를 얻은 것이다.

나이팅게일은 통계를 잘 사용하면 인류의 생활을 개선할 수 있다는 것을 보여 주었다.

선/택/형

1 다음은 어느 체육 대회에서 학생 10명을 대상으로 50 m 달리기 기록을 조사하여 나타낸 것이다. 50 m 달리기 기록의 중앙값은? [5점]

50 m 달리기 기록 (단위: 초)

8.4	7.7	9.5	10.2	12.5
8.8	8.2	7.0	8.3	9.7

① 8.4초 ② 8.5초 ③ 8.6초
④ 8.7초 ⑤ 8.8초

2 A 중학교 3학년 학생 100명의 수학 성적을 분석한 결과 상위 20명의 평균은 85점이고, 나머지 학생들의 평균은 65점이었다. 이 학교 3학년 전체 학생의 수학 성적의 평균은? [6점]

① 69점 ② 70점 ③ 71점
④ 72점 ⑤ 73점

3 지수네 반 기말고사 수학 성적을 실수로 두 학생의 점수를 누락하여 계산하였더니, 평균은 60점이고 중앙값은 50점이었다. 누락된 두 학생의 점수가 40점과 90점일 때, 이를 반영하여 계산한 결과로 옳은 것은? [6점]

	(평균)	(중앙값)
①	60점보다 크다.	50점보다 작다.
②	60점이다.	50점보다 크다.
③	60점보다 작다.	50점이다.
④	60점보다 크다.	50점이다.
⑤	60점이다.	50점이다.

4 다음 표는 어느 학생이 5회에 걸친 수학 시험에서 얻은 성적의 편차를 나타낸 것이다. 5회의 수학 성적의 평균이 70점일 때, 3회의 수학 성적은 몇 점인가? [6점]

횟수(회)	1	2	3	4	5
편차(점)	-6	2		5	-3

① 68점 ② 69점 ③ 70점
④ 71점 ⑤ 72점

5 다음 설명 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은? [6점]

① 편차의 합은 항상 0이다.
② 분산은 편차의 제곱의 평균이다.
③ 표준편차는 분산의 양의 제곱근이다.
④ 편차의 절댓값이 작을수록 변량은 평균에 가깝다.
⑤ 분산이 클수록 자료가 고르다.

6 다음 표는 학생 5명이 10회에 걸친 영어 시험에서 얻은 성적의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 영어 성적이 가장 고른 학생은? [6점]

영어 성적

	시우	은희	승훈	수진	민기
평균(점)	88	92	90	75	93
표준편차(점)	5	4	6	3	8

① 시우 ② 은희 ③ 승훈
④ 수진 ⑤ 민기

7 다음은 5회에 걸쳐서 잰 1분 동안의 맥박 수를 나타낸 것이다. 맥박 수의 표준편차는? [6점]

1분 동안의 맥박 수 (단위: 회)

62	66	65	68	64

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$회 ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$회 ③ $\sqrt{2}$회
④ 2회 ⑤ 4회

8 오른쪽 도수분포표는 학생 10명의 수학 성적을 나타낸 것이다. 수학 성적의 분산은? [6점]

수학 성적

계급(점)	도수(명)
60 이상 ~ 70 미만	3
70 ~ 80	a
80 ~ 90	2
90 ~ 100	1
합계	10

① 80 ② 82 ③ 85 ④ 87 ⑤ 89

9 어떤 나무 세 그루의 높이의 평균은 12 m이고, 분산은 3이다. 이 나무들이 1년 동안에 높이가 $\frac{1}{2}$ m 만큼 똑같이 자란다고 할 때, 1년 후 나무의 높이의 분산은? [7점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

서/답/형

10 오른쪽 표는 승주네 반 학생 20명의 가족 수를 조사하여 나타낸 것이다. 가족 수의 최빈값을 구하여라. [6점]

가족 수

가족 수(명)	도수(명)
2	2
3	5
4	10
5	3
합계	20

11 5개의 변량이 있다. 이 변량의 평균과 중앙값, 최빈값의 대소 관계를 구하여라. [6점]

2 3 5 6 6

12 5개의 변량 14, x, 16, 18, y의 평균이 17이고 최빈값이 16일 때, x, y의 값을 구하여라. (단, $x<y$) [7점]

13 10개의 수 중에서 6개의 수의 평균은 8, 분산은 9이고, 나머지 4개의 수의 평균은 8, 분산은 12이다. 10개의 수 전체의 평균과 분산을 구하여라. [8점]

| 서술형 |

14 5개의 변량 4, x, 5, $11-x$, 10의 분산이 9.2일 때, x의 값을 모두 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [9점]

| 서술형 |

15 다음 표는 어느 학급 학생 20명을 대상으로 주당 독서 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라. [10점]

주당 독서 시간

계급(시간)	도수(명)	(계급값)×(도수)	편차(시간)	$(편차)^2\times(도수)$
0 이상 ~ 2 미만	2	2	−3.2	20.48
2 ~ 4	8	24	㉢	11.52
4 ~ 6	6	30	0.8	3.84
6 ~ 8	4	㉠	2.8	31.36
합계	20	㉡		67.2

(1) 위의 표의 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 수를 구하여라.
(2) 분산과 표준편차를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

60점 미만이면 **하 · 수준** 문제를, 60점 이상 80점 미만이면 **중 · 수준** 문제를, 80점 이상이면 **상 · 수준** 문제를 풀어 보세요.

하·수준

1 다음은 성희네 반 학생 5명을 대상으로 1분 동안 팔굽혀펴기 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 팔굽혀펴기 횟수의 평균과 중앙값을 구하여라.

팔굽혀펴기 횟수 (단위: 회)

3	17	4	6	1

2 다음은 줄기에 달린 오이 10개의 길이를 조사하여 나타낸 것이다. 오이의 길이의 중앙값과 최빈값을 구하여라.

오이의 길이 (단위: cm)

15	19	17	17	16	18	17	16	18	37

3 다음 중에서 편차에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 편차의 총합은 0이다.
ㄴ. 평균보다 큰 변량의 편차는 양수가 된다.
ㄷ. 편차는 평균에서 각 변량을 뺀 값을 말한다.
ㄹ. 편차의 절댓값이 작을수록 그 변량은 평균 가까이에 있다.

4 다음 표는 다솔이네 반 학생 20명을 대상으로 일주일 동안 운동한 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 표를 완성하고, 표준편차를 구하여라.

운동 시간

계급(시간)	도수(명)	계급값(시간)	(계급값)×(도수)	편차(시간)	$(편차)^2$×(도수)
0 이상 ~ 2 미만	2				
2 ~ 4	4				
4 ~ 6	6				
6 ~ 8	8				
합계	20				

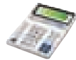
중 · 수준

1 다음은 어느 한식집에서 외국인 20명이 주문한 음식을 나타낸 것이다. 다음 날 많은 외국인이 방문한다고 할 때 어떤 음식을 가장 많이 준비해 놓는 것이 좋은지 말하고, 그 이유를 설명하여라.

불고기	비빔밥	김밥	잡채	비빔밥	삼계탕	삼계탕	불고기	비빔밥	순두부
삼계탕	불고기	비빔밥	잡채	순두부	삼겹살	비빔밥	김밥	잡채	비빔밥

2 4개의 변량이 있다. 이 변량에 대하여 중앙값은 48이고 세 개의 변량이 42, 51, 52일 때, 나머지 변량을 구하여라.

3 다음 표는 은우네 집에서 지난 1년 동안 사용한 가스 사용량을 월별로 조사하여 나타낸 것이다. 가스 사용량의 평균과 중앙값, 최빈값을 구하여라.



가스 사용량

월	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
사용량(m^3)	28	26	25	19	18	17	13	16	18	23	26	26

4 오른쪽 도수분포표는 지용이네 반 학생 20명의 수학 성적을 조사하여 나타낸 것이다. 수학 성적의 평균과 분산, 표준편차를 구하여라.(단, 표준편차는 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

수학 성적

계급(점)	도수(명)
50 이상 ~ 60 미만	2
60 ~ 70	2
70 ~ 80	8
80 ~ 90	6
90 ~ 100	2
합계	20

상·수준

1 다음은 학생 A, B, C, D의 수학 점수에 대한 설명이다. 학생 A의 점수가 88점일 때, 나머지 학생들의 점수를 구하여라.

- 학생 A의 점수는 학생 B의 점수보다 5점 낮다.
- 학생 B의 점수는 학생 C의 점수보다 7점 높다.
- 학생 D의 점수는 4명의 점수의 평균보다 6점 높다.

2 다음 표는 최근 5일간 일 최저 기온과 일 최고 기온을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

최저 기온과 최고 기온

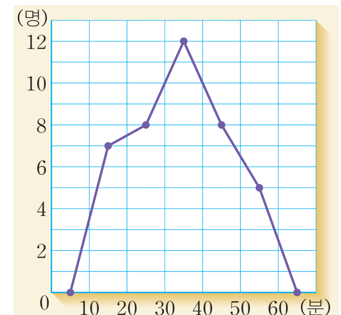
일	일 최저 기온(℃)	일 최고 기온(℃)
4	6	17
5	8	18
6	9	19
7	10	20
8	12	21

(1) 일 최저 기온의 표준편차를 구하여라.
(2) 일 최고 기온의 표준편차를 구하여라.
(3) 일 최저 기온과 일 최고 기온 중에서 어느 것이 더 심한 기온 차이를 보이는가?

3 오른쪽 그림은 성곤이네 반 학생 40명을 대상으로 하루 평균 운동 시간을 조사하여 도수분포다각형으로 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 도수분포표를 만들어라.
(2) 평균을 구하여라.
(3) 표준편차를 구하여라. (단, 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

하루 평균 운동 시간



1 목표| 중앙값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 기록을 작은 값부터 차례로 나열하면
7.0, 7.7, 8.2, 8.3, 8.4, 8.8, 9.5, 9.7, 10.2, 12.5
이므로 중앙값은 $\frac{8.4+8.8}{2}=8.6$(초)

답 ③

2 목표| 평균을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{20\times85+80\times65}{100}=\frac{6900}{100}=69$(점)

답 ①

3 목표| 평균과 중앙값을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 누락된 두 점수의 평균은 $\frac{40+90}{2}=65$(점)으로 기존 평균보다 크므로 두 학생의 점수를 반영하여 계산한 평균은 60점보다 크다.
한편 누락된 두 학생의 점수 사이에 중앙값이 있으므로 중앙값은 변하지 않는다.

답 ④

4 목표| 평균과 편차를 이용하여 변량을 구할 수 있게 한다.

풀이| 3회의 편차를 a점이라고 하면
$(-6)+2+a+5+(-3)=0$, $a=2$
따라서 3회의 수학 성적은 $2+70=72$(점)

답 ⑤

5 목표| 산포도의 성질을 이해하게 한다.

풀이| ⑤ 분산이 클수록 흩어진 정도가 크므로 자료가 고르지 않다.

답 ⑤

6 목표| 표준편차의 성질을 이해하게 한다.

풀이| 표준편차가 작을수록 성적이 고르므로 성적이 가장 고른 학생은 수진이다.

답 ④

7 목표| 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\frac{62+66+65+68+64}{5}=65$(회)

(분산)$=\frac{(-3)^2+1^2+0^2+3^2+(-1)^2}{5}=\frac{20}{5}=4$

(표준편차)$=\sqrt{4}=2$(회)

답 ④

8 목표| 분산을 구할 수 있게 한다.

풀이| $3+a+2+1=10$에서 $a=4$

(평균)$=\frac{65\times3+75\times4+85\times2+95\times1}{10}=76$(점)

(분산)$=\frac{(-11)^2\times3+(-1)^2\times4+9^2\times2+19^2}{10}$

$=89$

답 ⑤

9 목표| 분산을 구할 수 있게 한다.

풀이| 나무 세 그루의 높이를 a m, b m, c m라고 하면

$\frac{a+b+c}{3}=12$이므로 $a+b+c=36$

$\frac{(a-12)^2+(b-12)^2+(c-12)^2}{3}=3$이므로

$(a-12)^2+(b-12)^2+(c-12)^2=9$

이때 1년 동안에 높이가 $\frac{1}{2}$ m만큼 자랐으므로 나무의 높이는 각각 $\left(a+\frac{1}{2}\right)$m, $\left(b+\frac{1}{2}\right)$m, $\left(c+\frac{1}{2}\right)$m

(평균)$=\left(a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{2}+c+\frac{1}{2}\right)\div3$

$=\left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{25}{2}$(m)

따라서 분산은

$\left\{\left(a+\frac{1}{2}-\frac{25}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}-\frac{25}{2}\right)^2+\left(c+\frac{1}{2}-\frac{25}{2}\right)^2\right\}\div3$

$=\{(a-12)^2+(b-12)^2+(c-12)^2\}\div3=3$

답 ③

10 목표| 도수분포표에서 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 변량 중에서 4명이 가장 많이 나타났으므로 최빈값은 4명이다.

답 4명

11 목표| 평균, 중앙값, 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\frac{2+3+5+6+6}{5}=\frac{22}{5}=4.4$

중앙값은 작은 값부터 차례로 나열했을 때, 3번째 변량인 5이고, 최빈값은 가장 많이 나타난 6이다.
따라서 (평균)<(중앙값)<(최빈값)

답 (평균)<(중앙값)<(최빈값)

12 목표| 평균과 최빈값을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{14+x+16+18+y}{5}=17$에서 $x+y=37$

이때 최빈값이 16이고 $x<y$이므로 $x=16$, $y=21$

답 $x=16$, $y=21$

13 목표| 평균과 분산을 구할 수 있게 한다.

풀이| 10개의 수를 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$이라고 하면

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_6}{6}=8$, $a_1+a_2+\cdots+a_6=48$

$\frac{a_7+a_8+a_9+a_{10}}{4}=8$, $a_7+a_8+a_9+a_{10}=32$

따라서 10개의 수 전체의 평균은

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}{10}=\frac{48+32}{10}=\frac{80}{10}=8$

$a_1, a_2, \cdots, a_6$의 분산이 9이므로

$\frac{(a_1-8)^2+(a_2-8)^2+\cdots+(a_6-8)^2}{6}=9$

$(a_1-8)^2+(a_2-8)^2+\cdots+(a_6-8)^2=54$

a_7, a_8, a_9, a_{10}의 분산이 12이므로

$\frac{(a_7-8)^2+(a_8-8)^2+(a_9-8)^2+(a_{10}-8)^2}{4}=12$

$(a_7-8)^2+(a_8-8)^2+(a_9-8)^2+(a_{10}-8)^2=48$

따라서 10개의 수 전체의 분산은

$\frac{(a_1-8)^2+(a_2-8)^2+\cdots+(a_{10}-8)^2}{10}=\frac{54+48}{10}$

$=10.2$

답 평균: 8, 분산: 10.2

14 목표| 분산을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\frac{4+x+5+(11-x)+10}{5}=6$ ···㉠

이고, 분산이 9.2이므로

$\frac{(-2)^2+(x-6)^2+(-1)^2+(5-x)^2+4^2}{5}=9.2$

···㉡

$x^2-11x+18=0$, $x=2$ 또는 $x=9$ ···㉢

답 2, 9

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	평균 구하기	㉠	4점
	분산 구하는 식 세우기	㉡	3점
답 구하기	x의 값 구하기	㉢	2점

15 목표| 도수분포표에서 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) ㉠ $7\times4=28$, ㉡ $2+24+30+28=84$

(평균)$=\frac{84}{20}=4.2$(시간)이므로

㉢ $3-4.2=-1.2$

(2) (분산)$=\frac{67.2}{20}=3.36$, (표준편차)$=\sqrt{3.36}$(시간)

답 (1) ㉠ 28 ㉡ 84 ㉢ -1.2
(2) 분산: 3.36, 표준편차: $\sqrt{3.36}$시간

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정 및 답 구하기	㉠, ㉡, ㉢ 구하기	각 2점
	분산, 표준편차 구하기	각 2점

하·수준

1 목표| 평균과 중앙값을 구할 수 있게 한다.

답 평균: 6.2회, 중앙값: 4회

2 목표| 중앙값과 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 오이의 길이를 작은 값부터 차례로 나열하면

15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 19, 37

이므로 중앙값은 $\frac{17+17}{2}=17$(cm)이고, 최빈값은 17 cm이다.

답 중앙값: 17 cm, 최빈값: 17 cm

3 목표| 편차의 성질을 이해하게 한다.

풀이| ㄷ. 편차는 각 변량에서 평균을 뺀 값을 말한다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

4 목표| 도수분포표에서 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이|

계급 (시간)	도수 (명)	계급값 (시간)	(계급값) × (도수)	편차 (시간)	$(편차)^2$ × (도수)
0 이상 ~ 2 미만	2	1	2	−4	32
2 ~ 4	4	3	12	−2	16
4 ~ 6	6	5	30	0	0
6 ~ 8	8	7	56	2	32
합계	20		100		80

(분산)$=\frac{80}{20}=4$, (표준편차)$=\sqrt{4}=2$(시간)

답 풀이 참조

중·수준

1 목표| 최빈값의 의미를 이해하게 한다.

풀이|

음식	불고기	비빔밥	김밥	잡채	삼계탕	순두부	삼겹살
주문한 사람 수(명)	3	6	2	3	3	2	1

비빔밥을 주문한 사람이 가장 많으므로 비빔밥을 가장 많이 준비하는 것이 좋다. 답 비빔밥

2 목표| 변량들의 중앙값을 알 때, 나머지 변량을 구할 수 있게 한다.

풀이| 중앙값이 48이므로 나머지 변량을 x라고 하면 x의 위치는 42와 51 사이이다.

$\frac{x+51}{2}=48$, $x+51=96$, $x=45$ 답 45

3 목표| 평균과 중앙값, 최빈값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (평균)$=\frac{255}{12}=21.25(\text{m}^3)$

가스 사용량을 작은 값부터 차례로 나열하면

13, 16, 17, 18, 18, 19, 23, 25, 26, 26, 26, 28

이므로 중앙값은 $\frac{19+23}{2}=21(\text{m}^3)$이다.

최빈값은 가장 많이 나타난 26 m^3이다.

답 평균: 21.25 m^3, 중앙값: 21 m^3, 최빈값: 26 m^3

4 목표| 도수분포표에서 평균과 분산, 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이|

계급(점)	도수(명)	계급값(점)	(계급값)×(도수)	편차(점)	$(편차)^2$×(도수)
50 이상 ~ 60 미만	2	55	110	−22	968
60 ~ 70	2	65	130	−12	288
70 ~ 80	8	75	600	−2	32
80 ~ 90	6	85	510	8	384
90 ~ 100	2	95	190	18	648
합계	20		1540		2320

(평균)$=\frac{1540}{20}=77$(점), (분산)$=\frac{2320}{20}=116$

(표준편차)$=\sqrt{116}=10.77\cdots$(점) → 10.8점

답 평균: 77점, 분산: 116, 표준편차: 10.8점

상·수준

1 목표| 평균을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 학생 B, C, D의 점수를 각각 b, c, d라고 하면

$88=b-5$에서 $b=93$(점)

$93=c+7$에서 $c=86$(점)

$d=(88+93+86+d)\div4+6$에서 $d=97$(점)

답 B: 93점, C: 86점, D: 97점

2 목표| 표준편차를 이해하게 한다.

풀이| (1) (평균)$=\frac{6+8+9+10+12}{5}=\frac{45}{5}=9(^\circ\text{C})$

(분산)$=\frac{(-3)^2+(-1)^2+0^2+1^2+3^2}{5}=\frac{20}{5}=4$

(표준편차)$=\sqrt{4}=2(^\circ\text{C})$

(2) (평균)$=\frac{17+18+19+20+21}{5}=\frac{95}{5}=19(^\circ\text{C})$

(분산)$=\frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5}=\frac{10}{5}=2$

(표준편차)$=\sqrt{2}(^\circ\text{C})$

(3) $2>\sqrt{2}$이므로 일 최저 기온이 일 최고 기온보다 더 심한 기온 차이를 보인다.

답 (1) 2 ℃ (2) $\sqrt{2}$ ℃ (3) 일 최저 기온

3 목표| 도수분포다각형을 보고 도수분포표를 만들어 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 하루 평균 운동 시간

계급(분)	도수(명)
10 이상 ~ 20 미만	7
20 ~ 30	8
30 ~ 40	12
40 ~ 50	8
50 ~ 60	5
합계	40

(2) (평균)$=\frac{15\times7+25\times8+35\times12+45\times8+55\times5}{40}$

$=\frac{105+200+420+360+275}{40}=34$(분)

(3) (분산)$=\{(-19)^2\times7+(-9)^2\times8+1^2\times12+11^2\times8+21^2\times5\}\div40=6360\div40=159$

(표준편차)$=\sqrt{159}=12.60\cdots$(분) → 12.6분

답 (1) 풀이 참조 (2) 34분 (3) 12.6분

대푯값을 찾아라!

4명 또는 5명이 다음과 같은 게임을 하여 보아라.

준비물

1부터 10까지의 숫자가 각각 적힌 10장의 카드 4벌(40장)

게임 규칙

① 각각 5장씩 카드를 나누어 가진다. 이때 나누어 주고 남은 카드는 숫자가 보이지 않도록 중앙에 뒤집어 놓는다.

② 가위바위보를 해서 이긴 사람이 선두가 되어 5장의 카드에 적힌 수들의 대푯값(평균, 중앙값, 최빈값)을 구하고, 가장 큰 대푯값을 말한다. 예를 들어 평균이 가장 크면 “평균”이라고 말한다.

③ 선두를 제외한 다른 사람은 자신이 가지고 있는 카드를 중앙에 뒤집어 놓은 카드와 한 장씩 두 번에 한하여 바꿀 수 있다. 이때 한 번만 바꾸거나 한 번도 바꾸지 않아도 된다.

④ 각자 자신이 가지고 있는 5장의 카드로 선두가 말한 대푯값을 구하여 그 값에 해당하는 카드를 제시한다.

⑤ 가장 큰 수가 적힌 카드를 제시한 사람이 게임에서 이기게 된다.

유의 사항

5장의 카드가 모두 다른 수라면 최빈값은 없다. 또 5장의 카드에 대한 평균이 적힌 카드가 없을 수도 있다.

다다익선(多多益善)과 통계

경기도 과천에 있는 국립현대미술관에는 비디오 아티스트인 백남준의 작품 '다다익선(多多益善)'이 전시되어 있다. 이 작품은 1986년에 완성된 것으로 1003개의 TV 모니터를 위로 올라갈수록 점점 줄어드는 모양으로 쌓아올려 제작한 백남준의 대표작이다. 모니터가 1003개인 이유는 10월 3일 개천절을 의미하고 많을수록 좋다는 뜻의 고사성어인 '다다익선'을 작품 제목으로 하고 있다. 그의 작품명은 어떤 물건이 많다는 뜻이 아니고 오늘날의 대중 매체를 은유적으로 표현한 것이라고 한다.

고사성어 다다익선은 "사기(史記)"의 '회음후열전(淮陰侯列傳)'에서 유래되었다.

한(漢)나라 고조 유방(劉邦)은 천하 통일의 일등공신인 초왕(楚王) 한신(韓信)을 위험한 존재로 여겼다. 그래서 계략을 써 그를 포박한 후 회음후(淮陰侯)로 좌천시키고 도읍 장안(長安)을 벗어나지 못하게 하였다. 어느 날 고조는 한신과 여러 장군들의 능력에 대하여 이야기를 나누던 끝에 이렇게 물었다.

"과인은 몇 만의 군사를 통솔할 수 있는 장수감이라고 생각하오?"

"폐하께서는 한 10만쯤 거느릴 수 있으실 것으로 생각합니다."

"그렇다면 그대는?"

"신은 많으면 많을수록 좋습니다(多多益善)."

그 말에 고조는 한바탕 웃고 물었다.

"다다익선이란 그대가 어찌하여 10만의 장수감에 불과한 과인의 포로가 되었는가?"

한신은 이렇게 대답했다.

"폐하, 그것은 별개의 문제입니다. 폐하께서는 병사의 장수가 아니오라 장수의 장수입니다. 이것이 신이 폐하의 포로가 된 이유의 전부입니다."

우리 생활 주변에서 통계를 이용하는 경우는 많다. 특히 여러 가지 여론 조사는 적은 노력으로 여론 대상자 전체의 성향을 정확하게 파악하기 위하여 통계를 활용하고 있다. 예를 들어 어느 지역에 A, B, C 세 후보가 출마하는 국회 의원 선거에서 누가 당선될 것인가를 예측하기 위하여 언론사에서는 몇몇 사람을 임의로 선정하여 여론 조사를 한다. 이때 조사된 결과 중에서 A 후보를 지지하는 사람들이 나머지 두 후보를 지지하는 경우보다 월등히 많다면 전체 선거에서 A 후보가 국회 의원에 당선될 확률이 높다. 따라서 언론사에서는 여론 조사를 바탕으로 'A 후보가 국회 의원에 당선될 가능성이 높은 것으로 나타났다.'는 보도를 할 것이다. 그리고 이 경우에 표를 많이 얻은 쪽이 승리하게 되므로 다다익선이라고 할 수 있다.

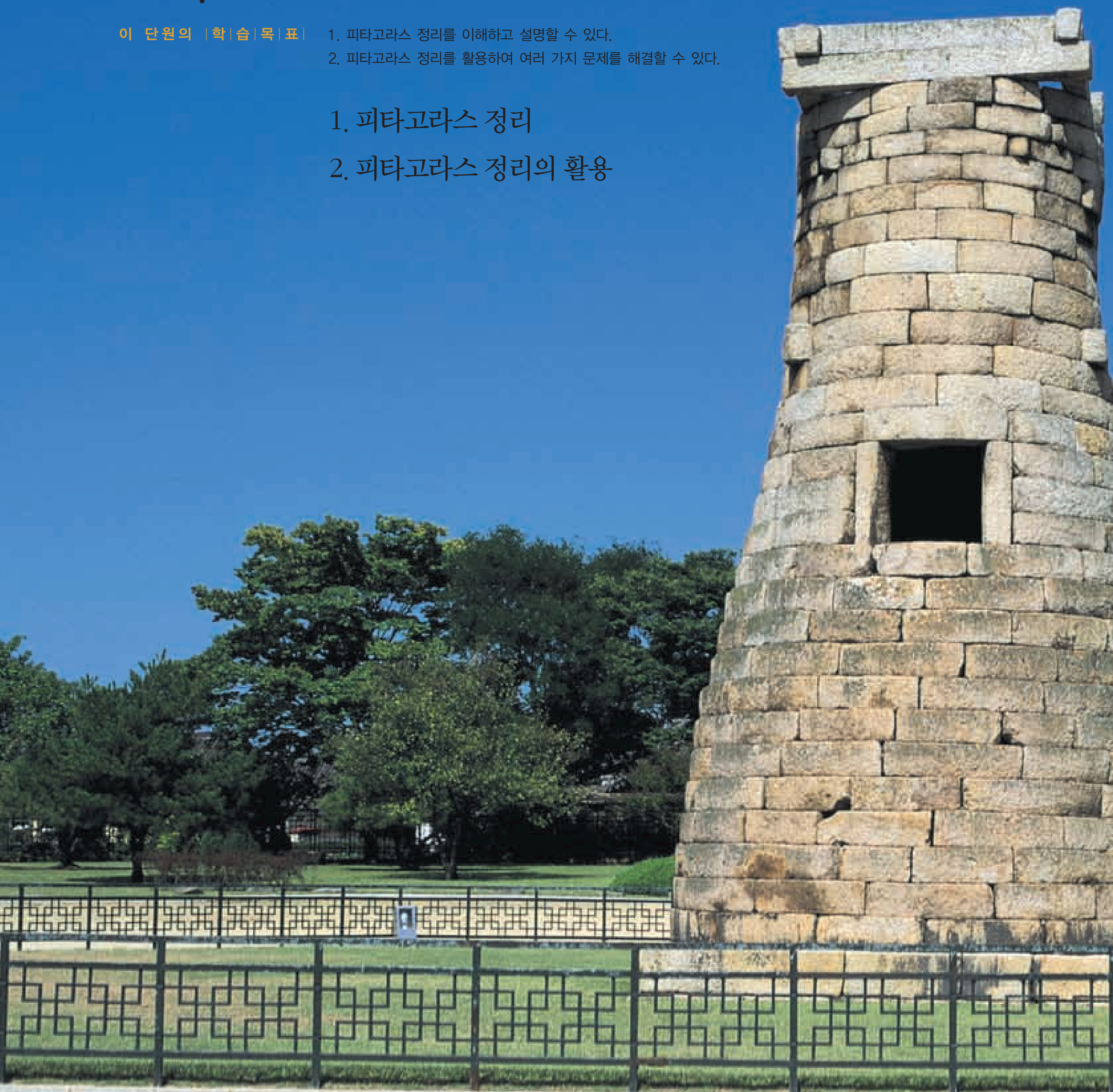
학문으로서의 통계학은 17세기에 이르러 독일, 영국, 프랑스에서 발전하였는데, 특히 18세기에 확률을 활용한 통계학이 과학적으로 체계화되었다. 그 후 피셔가 추측 통계학의 이론적 체계를 확립하여 현대 통계학의 기초를 확립하였다.

다다익선(多多益善) 多(많을 다), 益(더할 익), 善(착할 선)

V 피타고라스 정리

이 단원의 |학|습|목|표|

1. 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.
2. 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.



동서양을 막론하고 건물을 지을 때 대부분의 벽면은 바닥과 천장에 수직이 되게 세운다.

고대 이집트에서는 끈에 일정한 간격으로 매듭을 짓고, 이 매듭을 따라 끈을 12등분하여 세 변의 길이가 각각 3, 4, 5인 직각삼각형을 만들었고, 이를 본떠 직각을 만들었다.

동양의 수학 책 “주비산경(周髀算經)” 제1편에는 ‘구(句)를 3, 고(股)를 4라고 할 때 현(弦)은 5가 된다.’는 ‘구고현의 정리’가 실려 있다. 직각삼각형에서 구와 고는 직각을 낀 두 변을, 현은 빗변을 뜻한다. 동양에서는 이를 이용하여 직각을 만들었다. 특히 우리 조상들은 집이나 다리 또는 탑과 같은 건축물을 지을 때 직각을 가늠하기 위하여 구고현의 정리를 이용하였다.

단원을 시작하기 전에

고대 이집트에서는 나일 강이 자주 범람하여 어느 곳이 누구의 땅인지 구별하기 어려울 때가 많았다. 이집트 인들은 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 똑같은 간격으로 매듭을 지은 밧줄로 세 변의 길이의 비가 3 : 4 : 5인 직각삼각형을 만들어 활용하였다. 이 단원에서는 직각삼각형의 세 변의 길이에 관한 피타고라스 정리와 이를 활용하는 방법에 대하여 지도한다.

단원의 지도 목표

1. 피타고라스 정리

① 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있게 한다.
② 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.
③ 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있게 한다.

2. 피타고라스 정리의 활용

① 피타고라스 정리를 활용하여 평면도형에서 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.
② 피타고라스 정리를 활용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
③ 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형에서 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 피타고라스 정리를 설명하는 여러 가지 방법을 접할 수 있도록 지도한다.
② 직각삼각형이 되는 조건은 직관적으로 이해하게 한다.
③ 피타고라스 정리와 직각삼각형이 되는 조건은 문제 상황에 활용하는 데 중점을 둔다.
④ 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 때, 그림을 그려서 직관적으로 해결하게 한다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 삼각형의 합동조건 입체도형의 겉넓이와 부피 삼각형과 사각형의 성질 도형의 닮음 제곱근 이차방정식	1. 피타고라스 정리 피타고라스 정리 2. 피타고라스 정리의 활용 평면도형에의 활용 입체도형에의 활용	[중1~3학년군] 삼각비 [수학 I] 두 점 사이의 거리 [미적분 II] 삼각함수

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관			164~165	• 단원의 개관	
1. 피타고라스 정리	**준비 학습**		166	• 삼각형의 합동조건 • 닮은 도형의 성질 • 제곱근 • 제곱근의 성질	
	1-1 피타고라스 정리	1~4	167~172	• 피타고라스 정리 • 직각삼각형의 변의 길이 • 직각삼각형이 되는 조건	피타고라스 정리
	수준별 학습	5	173~175	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 피타고라스 정리의 활용	**준비 학습**		176	• 각뿔과 원뿔의 부피 • 직사각형의 성질 • 피타고라스 정리	
	2-1 평면도형에의 활용	6~7	177~180	• 직사각형의 대각선의 길이 • 삼각형의 높이와 넓이 • 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리	
	2-2 입체도형에의 활용	8~9	181~184	• 직육면체의 대각선의 길이 • 원뿔의 높이와 부피 • 정사각뿔의 높이와 부피	
	수준별 학습	10	185~187	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		11~12	188~195	• 수행 과제 • 학습에 대한 자기 평가 • 대단원 핵심 한눈에 보기 • 만화로 보는 수학 이야기 • 대단원 평가 문제 • 컴퓨터의 활용 • 수학 산책	

학습 지도 계획 수립 시 차시별 지도 계획을 바탕으로 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도에 따라 적절히 조정할 수 있다.

단원의 이론적 배경

1. 역사적 배경

피타고라스

피타고라스(Pythagoras: ?B.C. 569~?B.C. 475)는 기원전 569년경에 이오니아의 사모스 섬에서 태어난 것으로 추정되고 있다.

피타고라스는 젊었을 때 여러 곳을 유학하며 공부한 후 사모스 섬에 돌아와 가르치기 시작하였는데, 사모스 섬에는 폴리크라테스(Polycrates)가 학정을 실시하여 자유가 없었으므로, 크로톤으로 옮겨 학교를 창설하여 명성을 떨쳤다. 이 학교에는 학문에 뜻을 두고 진리를 갈구하는 많은 젊은 학도들이 구름같이 모여들어 그 수가 300명이 넘었으며, 그 당시 공개 석상에 나오지 못하게 되어 있던 여자들까지도 그의 강의를 들었다고 한다. 학생들을 '피타고라스학파'로 불리는 정식 학생과 청강생으로 나누었고, '그리스 인 중 가장 현명하고 가장 용감한 자'라는 존칭을 받은 피타고라스는 흰 가운에 별 모양의 오각형 무늬를 새긴 황금관을 쓰고 위풍당당하게 교단에 섰다고 한다. 그리고 학도들은 배운 내용에 관해서는 일체 비밀을 지켰으며, 특히 정식 학도들은 간소한 생활, 엄격한 교리, 극기, 절제, 순결, 순종의 미덕 증진을 목적으로 단체 행동을 하였다. 그리하여 이 교단은 세력을 가지게 되었고, 각 방면에서 선망의 대상이 된 동시에 질시의 표적이 되어 정치적 반대파로부터 불의의 공격을 받게 되었다. 피타고라스학파의 사람들은 이 사실을 알고 부녀자들을 배에 태워 시실리 방면으로 미리 피난시키고 피타고라스를 호위하면서 메소포타미아 쪽으로 도망을 갔으나 추격은 점점 심해지고, 피타고라스는 결국 체포되어 살해되고 말았다.

피타고라스학파의 특징은 '만물은 수이다.'라는 생각을 바탕으로 수론을 발전시키고 기하학과 수론의 관련을 연구한 점이다. 그러나 피타고라스는 전적으로 구두로 가르쳤고 그 학파의 모든 발견은 그들이 숭배하는 창시자에게 돌리는 전통 때문에 수학적인 발견 중 어떤 것이 피타고라스의 몫인지를 알아내기는 현재로서는 어렵다.

피타고라스 정리에 관해서 디오게네스 라에르티오스는 "피타고라스가 이 정리의 증명을 성공하였을 때, 너무 기뻐서 100마리의 황소를 잡아 신에게 바쳤다."라고 전하고 있다. 피타고라스는 이 정리를 길가에 깔린 타일을 보고 힌트를 얻어 발견하였다고도 한다.

'직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱은 다른 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다.'라는 피타고라스 정리를 피타고라스가 처음 증명하였는데 피타고라스는 이 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 정수로 찾아내는 방법도 생각하였고, 정사각형의 대각선의 길이에서 무리수를 발견하기도 하였다.

이외에도 피타고라스학파가 발견하였다고 전해지는 기하학에 관한 내용은 다음과 같다.

- 삼각형의 내각의 합은 2직각이다.
- 황금분할의 작도법
- 정오각형의 작도법
- 정다면체가 5개뿐임을 증명

2. 피타고라스 정리

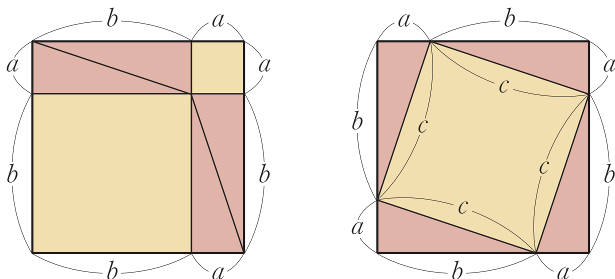
전통적으로 오늘날 피타고라스 이름을 따서 붙인 직각삼각형에 대한 정리는 피타고라스가 독립적으로 발견하였다는 데에 대부분 동의하고 있다. 이 정리는

1000년 이상 이전에 이미 함무라비 시대의 바빌로니아 인들에게 알려져 있었으나 최초의 일반적인 증명은 피타고라스에 의해 주어졌다고 해도 무방할 것이다.

피타고라스가 만든 것으로 추측되는 많은 증명들이 있긴 하지만 일반적으로 다음에서 예증하고 있듯이 분할법에 의한 증명이었을 것이다.

a, b, c(c가 빗변의 길이)가 주어진 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 한 변의 길이가 $a+b$인 두 정사각형을 살펴보자.

다음의 왼쪽 정사각형은 여섯 부분으로 나누어져 있고, 오른쪽 정사각형은 다섯 부분으로 나누어져 있다. 따라서 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.



오른쪽 분할의 가운데 부분이 한 변의 길이가 c인 정사각형임을 증명하기 위해서는 직각삼각형의 내각의 합이 직각의 2배와 같다는 사실을 이용해야 한다.

피타고라스 시대 이래로 피타고라스 정리에 대한 수많은 증명이 나왔으며 루미스(Loomis, E. S.)는 그의 책 "피타고라스 정리"의 제2판에서 이 정리에 대한 370여 개의 증명을 모아서 분류한 바 있다.

피타고라스 정리와 밀접하게 결부된 문제가 하나 있는데 그것은 직각삼각형의 세 변이 될 수 있는 정수 a, b, c의 쌍을 발견하는 것이다. 이를 피타고라스의 수(Pythagorean number)라고 부르는데 고대 바빌로니아 인들이 이미 이를 계산하는 방법을 알고 있었을 것이라는 상당히 설득력 있는 증거가 있다.

한편 피타고라스학파가 만든 것으로 여겨지는 공식

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

에서도 임의의 홀수 m에 대하여 이 항들이 피타고라스의 수를 만들어 낸다.

피타고라스의 수 a, b, c가 1 이외의 공약수를 가지지 않으면 원시 피타고라스의 수라고 하는데, 원시 피타고라스의 수는 다음과 같은 매개변수방정식으로 찾을 수 있다.

$$a=2uv,\ b=u^2-v^2,\ c=u^2+v^2$$

(u, v는 서로소, 모두는 홀수가 아님, $u>v$)

교수 · 학습 과정안 (기초)

대단원	Ⅴ. 피타고라스 정리	쪽수	교과서 170쪽
소단원	1. 피타고라스 정리　1-1 피타고라스 정리	차시	3/12
학습 목표	피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있다.		
단계	**학습 과정**	**교수 · 학습 활동**	**교수 · 학습상의 유의점**
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 제곱근의 개념에 대하여 질문하고, 제곱근 계산을 복습한다. ◎ 학습 목표를 제시한다. • 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있다.	
전개	개념 학습 문제 해결	◎ 학습 내용 설명 **피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이 구하기** 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ $a=\sqrt{c^2-b^2}$ $b=\sqrt{c^2-a^2}$ ◎ 문제 2를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라. (1) A, B, C, x cm, 6 cm, 9 cm　(2) A, B, C, 10 cm, 12 cm, x cm 답 (1) $3\sqrt{13}$　(2) $2\sqrt{11}$ ◎ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본)를 과제로 선택하도록 한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있다.	

수준별 학습지 (기초)

대단원	Ⅴ. 피타고라스 정리	쪽수	교과서 170쪽
소단원	1. 피타고라스 정리 1-1 피타고라스 정리	차시	3/12
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 다음은 직각삼각형의 한 변의 길이를 구하는 과정이다. 빈칸에 알맞게 써넣어라.

> 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여
> $3^2+\square^2=\square^2$
> 이 식을 정리하면
> $x^2=\square$, $x=\square$
> 이때 $x>0$이므로 $x=\square$

답 5, x, 34, $\pm\sqrt{34}$, $\sqrt{34}$

2 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.

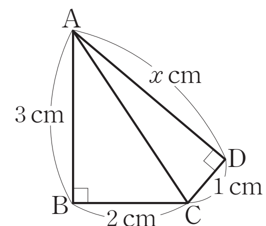
(1) (2)

(3) (4)

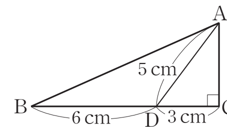
답 (1) $5\sqrt{2}$ (2) 15 (3) $\sqrt{5}$ (4) 12

3 오른쪽 그림에서 x의 값을 구하여라.

답 $2\sqrt{3}$



교수 · 학습 과정안 (기본)

대단원		Ⅴ. 피타고라스 정리	쪽수	교과서 170쪽
소단원		1. 피타고라스 정리 1-1 피타고라스 정리	차시	3/12
학습 목표		피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	⊙ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ⊙ 제곱근의 개념에 대하여 질문하고, 제곱근 계산을 복습한다. ⊙ 학습 목표를 제시한다. • 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있다.		
전개	개념 학습 문제 해결	⊙ 학습 내용 설명 **피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이 구하기** 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ $a=\sqrt{c^2-b^2}$ $b=\sqrt{c^2-a^2}$ ⊙ 문제 2를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	⊙ 본시의 학습 내용을 정리한다. ⊙ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 길이를 구하여라. 답 $\sqrt{97}$ cm  ⊙ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ⊙ 다음 차시를 예고한다. • 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있다.		

수준별 학습지 (기본)

대단원	V. 피타고라스 정리	쪽수	교과서 170쪽
소단원	1. 피타고라스 정리 1-1 피타고라스 정리	차시	3/12
(　　)학년 (　　)반 (　　)번 이름:			

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AD}=\overline{CD}$이고 $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BD}=3$ cm일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.

답 $4\sqrt{5}$ cm

2 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.

답 17

3 오른쪽 그림과 같은 사다리꼴 ABCD에서 x, y의 값을 구하여라.

답 $x=2\sqrt{13}$, $y=5$

4 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형의 넓이를 구하여라.

답 16 cm^2

교수 · 학습 과정안 (실력)

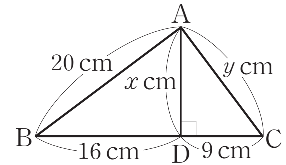
대단원		Ⅴ. 피타고라스 정리	쪽수	교과서 170쪽
소단원		1. 피타고라스 정리 1-1 피타고라스 정리	차시	3/12
학습 목표		피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 제곱근의 개념에 대하여 질문하고, 제곱근 계산을 복습한다. ◯ 학습 목표를 제시한다. • 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◯ 학습 내용 설명 **피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이 구하기** 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ $a=\sqrt{c^2-b^2}$ $b=\sqrt{c^2-a^2}$ ◯ 문제 2를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 다음 그림에서 $\angle ABC=\angle C=90^\circ$일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하여라. (그림: A, B, C, D, 10 cm, 13 cm, 12 cm) 답 13 cm ◯ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있다.		

수준별 학습지 (실력)

대단원	V. 피타고라스 정리	쪽수	교과서 170쪽
소단원	1. 피타고라스 정리　1-1 피타고라스 정리	차시	3/12
(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:			

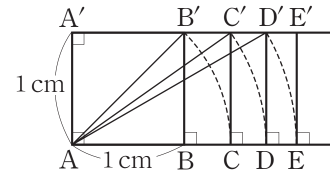
1 오른쪽 그림에서 x, y의 값을 구하여라.

답 $x=12$, $y=15$



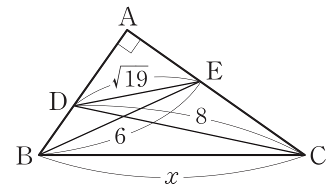
2 오른쪽 그림에서 $\overline{AE}$의 길이를 구하여라.

답 2 cm



3 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BE}=6$, $\overline{CD}=8$, $\overline{DE}=\sqrt{19}$일 때, x의 값을 구하여라.

답 9



4 직각삼각형의 세 변의 길이가 각각 x, $x+3$, $x+6$일 때, x의 값을 구하여라.

답 9

1 피타고라스 정리

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있게 한다.

② 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

③ 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
1-1 피타고라스 정리	피타고라스 정리
	직각삼각형의 변의 길이
	직각삼각형이 되는 조건
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 166 쪽

1 피타고라스 정리

준|비|학|습

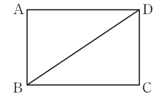
삼각형의 합동조건
- 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때
- 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때
- 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때

닮은 도형의 성질
닮음인 두 도형에 대하여
- 대응하는 변의 길이의 비는 일정하다.
- 대응하는 각의 크기는 각각 같다.

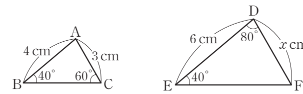
제곱근
$x^2=a$ $(a>0)$일 때
$x=\pm\sqrt{a}$

제곱근의 성질
$a>0$일 때,
- $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$
- $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

1 오른쪽 그림에서 □ABCD가 직사각형일 때, 합동인 두 삼각형을 찾아 기호로 나타내어라.



2 다음 그림에서 △ABC∽△DEF일 때, x의 값을 구하여라.



3 다음 등식을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

(1) $x^2=10$　　(2) $x^2=49$

(3) $5^2+12^2=x^2$　　(4) $5^2+x^2=7^2$

4 다음 수를 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{9}$　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$

(3) $\sqrt{3^2+4^2}$　　(4) $\sqrt{10^2-8^2}$

준비 학습의 해설

1

목표| 삼각형의 합동조건을 이해하고, 합동인 두 삼각형을 찾을 수 있게 한다.

풀이| △ABD와 △CDB에서

$\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AD}=\overline{CB}$, $\overline{BD}$는 공통

이므로　**△ABD≡△CDB**

참고| △ABD≡△CDB(SSS 합동)

또는 △ABD≡△CDB(SAS 합동)

또는 △ABD≡△CDB(ASA 합동)

2

목표| 닮은 도형의 성질을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{DF}$이므로

$4:6=3:x$

$4x=18$, $x=\mathbf{\frac{9}{2}}$

3

목표| 제곱근의 뜻을 알고 제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=\pm\sqrt{10}$

(2) $x=\pm 7$

(3) $x^2=25+144=169$이므로　$x=\pm 13$

(4) $x^2=7^2-5^2=49-25=24$이므로　$x=\pm 2\sqrt{6}$

4

목표| 제곱근의 성질을 이해하게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{9}=3$

(2) $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$

(3) $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

(4) $\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$

1-1 피타고라스 정리

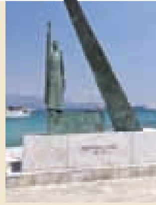
● 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.

피타고라스 정리란 무엇인가?

창의력 기르기

피타고라스

고대 그리스의 수학자 피타고라스(Pythagoras : ?B.C. 569~?B.C. 475)는 이오니아의 사모스 섬에서 태어났으며 이탈리아 남부의 한 도시 크로톤에 '피타고라스 학교'를 세우고 피타고라스학파를 이루었다. 그는 음악과 수학으로 우주의 질서를 설명할 수 있다고 믿었으며, 특히 직각삼각형에 대한 많은 연구를 하였다.



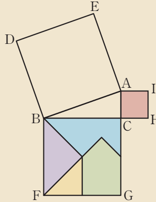
탐구 활동

●준비물
피타고라스 정리 퍼즐

오른쪽 그림은 직각삼각형 ABC의 빗변이 아닌 두 변 AC와 BC를 한 변으로 하는 두 정사각형을 총 다섯 조각으로 나눈 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1 이 조각들로 빗변 AB를 한 변으로 하는 정사각형을 채워 보자.

2 세 정사각형의 넓이 사이에는 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.



탐구 활동에서 직각삼각형 ABC의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 빗변이 아닌 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합과 같다는 것을 알아보았다. 즉,

$$\square ABDE = \square BFGC + \square ACHI$$

이다.

그런데 정사각형의 넓이는 한 변의 길이의 제곱과 같으므로 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이 사이에는

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

이 성립함을 알 수 있다.

3. 삼각형의 세 변의 길이가 각각 a, b, c일 때, $a^2+b^2=c^2$인 관계가 성립하면 주어진 삼각형이 직각삼각형인 것뿐만 아니라 빗변의 길이가 c인 직각삼각형임을 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 피타고라스 정리(Pythagorean theorem)

창의력 기르기 참/고/자/료

피타고라스는 크로톤에 피타고라스 학교를 세우고 철학, 수학, 자연 과학 등을 연구하였는데 이 단체를 '피타고라스학파'라고 한다. 이곳의 규율은 매우 엄격하였는데, 그들이 발견한 수학적 비밀을 회원이 아닌 사람에게는 절대로 알리지 않도록 하였으며 어떠한 기록도 남기는 것을 허용하지 않았다. 피타고라스학파는 만물의 근원을 수로 보았으며 수학, 음악, 천문학 분야에 많은 업적을 남겼다.

1-1 피타고라스 정리

소단원 지도 목표

① 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있게 한다.
② 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.
③ 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 구체적인 도형을 통하여 피타고라스 정리를 직관적으로 이해시킨 후 논리적으로 성립함을 보일 수 있게 한다.

2. 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별하는 것은 피타고라스 정리의 역을 이용하는 것이지만 '역'이라는 용어는 중학교 교육과정이 아님에 유의한다. 대신 이를 직관적으로 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직각삼각형 ABC의 빗변이 아닌 두 변을 한 변으로 하는 두 정사각형의 퍼즐 조각을 빗변을 한 변으로 하는 정사각형에 채워 봄으로써 피타고라스 정리를 이해하게 하려는 것이다.
준비물 • 피타고라스 정리 퍼즐

1.

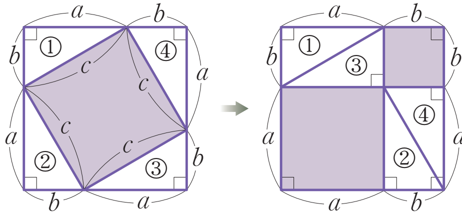
D E A I B C H F G → D E A I B C H F G

2. 직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변을 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합이 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다.

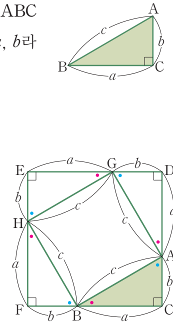
본문 해설

❶ □AGHB는 네 변의 길이가 같고, 한 내각의 크기가 90°이므로 정사각형이다.

❷ $a^2+b^2=c^2$이 성립하는 것을 다른 방법으로 보일 수 있다.
다음의 왼쪽 그림에서 네 개의 직각삼각형을 ①, ②, ③, ④라 하고, 직각삼각형 ②, ③, ④를 다음의 오른쪽 그림과 같이 이동한다. 이때 다음 두 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 같으므로 $a^2+b^2=c^2$이다.



교과서 168 쪽



이제 오른쪽 그림과 같이 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC에서 빗변의 길이를 c, 나머지 두 변의 길이를 각각 a, b라고 할 때,

$$a^2+b^2=c^2$$

이 성립함을 알아보자.

직각삼각형 ABC의 두 변 AC, BC를 각각 연장하여 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 CDEF를 만들고

$$\overline{DG}=\overline{EH}=b$$

인 점 G, H를 잡으면

$$\triangle ABC \equiv \triangle GAD \equiv \triangle HGE \equiv \triangle BHF$$

이므로

$$\overline{BA}=\overline{AG}=\overline{GH}=\overline{HB}=c \quad \cdots\cdots ①$$

$$\angle ABC=\angle GAD \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 그런데

$$\angle CAB+\angle ABC=90°$$

이므로 ②에 의하여

$$\angle CAB+\angle GAD=90°$$

$$\angle BAG=90° \quad \cdots\cdots ③$$

❶ 따라서 ①, ③에 의하여 □AGHB는 한 변의 길이가 c인 정사각형이므로 □CDEF는 서로 합동인 네 개의 직각삼각형과 한 개의 정사각형으로 나눌 수 있다. 즉,

$$□CDEF=4\times\triangle ABC+□AGHB$$

이므로

$$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$$

이고, 이 식을 정리하면

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

❷ $$a^2+b^2=c^2$$

이다.

네 개의 직각삼각형 ABC, GAD, HGE, BHF는 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로 서로 합동이다.

읽/기/자/료 피타고라스의 수

직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있는 세 개의 자연수 a, b, c를 피타고라스의 수(Pythagorean number)라고 한다.
일반적으로 세 자연수 a, b, c가
$a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ $(m>n>0)$
이면 a, b, c는 피타고라스의 수이다.
이것이 성립함을 설명하면 다음과 같다.
$m^2-n^2<m^2+n^2$이므로 $a<c$
$(m-n)^2=m^2-2mn+n^2>0$에서
$m^2+n^2>2mn$이므로 $c>b$
따라서 c가 가장 긴 변의 길이이고, 다음을 알 수 있다.

$$a^2=(m^2-n^2)^2=m^4-2m^2n^2+n^4$$
$$b^2=(2mn)^2=4m^2n^2$$
$$c^2=(m^2+n^2)^2=m^4+2m^2n^2+n^4$$
$$\begin{aligned}a^2+b^2&=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2\\&=m^4+2m^2n^2+n^4\\&=(m^2+n^2)^2\\&=c^2\end{aligned}$$

이로써 다음과 같이 피타고라스의 수를 찾을 수 있다.

m	n	a	b	c
		m^2-n^2	$2mn$	m^2+n^2
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41

교과서 169 쪽

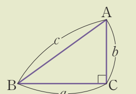
이상에서 직각삼각형의 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같음을 알 수 있다.

이와 같은 직각삼각형의 성질을 **피타고라스 정리**라고 한다.

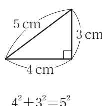
피타고라스 정리

직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면

$$a^2+b^2=c^2$$

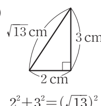


보기 (1)



$4^2+3^2=5^2$

(2)



$2^2+3^2=(\sqrt{13})^2$

문제

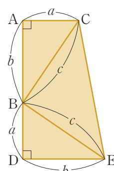
미국의 20대 대통령인 가필드(Garfield, J. A.: 1831~1881)가 1876년에 피타고라스 정리가 성립함을 설명한 방법이다.

오른쪽 그림에서 사다리꼴 ADEC는 합동인 두 직각삼각형 ABC와 DEB를 붙여서 만든 것이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 사다리꼴의 넓이를 구하여라.

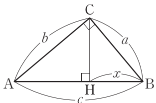
(2) 세 개의 삼각형 ABC, DEB, CBE의 넓이를 각각 구하여라.

(3) (1)과 (2)를 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여라.



추론

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 닮음인 세 삼각형을 찾고, 닮음비를 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여 보자.



목표| 사다리꼴의 넓이를 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{1}{2}\times(a+b)\times(a+b)=\boldsymbol{\frac{a^2+2ab+b^2}{2}}$

(2) $\triangle\text{ABC}=\boldsymbol{\frac{1}{2}ab}$, $\triangle\text{DEB}=\boldsymbol{\frac{1}{2}ab}$

$\triangle\text{ABC}\equiv\triangle\text{DEB}$이므로 $\angle\text{ACB}=\angle\text{DBE}$

$\angle\text{ABC}+\angle\text{ACB}=90^\circ$, $\angle\text{ABC}+\angle\text{DBE}=90^\circ$

따라서 $\triangle\text{CBE}$는 $\angle\text{CBE}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 $\triangle\text{CBE}=\boldsymbol{\frac{1}{2}c^2}$

(3) (1)에서 사다리꼴 ADEC의 넓이는

$\frac{a^2+2ab+b^2}{2}=ab+\frac{a^2+b^2}{2}$

(2)에서 세 개의 삼각형의 넓이는

$\triangle\text{ABC}+\triangle\text{DEB}+\triangle\text{CBE}$

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2=ab+\frac{c^2}{2}$

사다리꼴 ADEC의 넓이는 세 개의 삼각형 ABC, DEB, CBE의 넓이의 합과 같으므로

$ab+\frac{a^2+b^2}{2}=ab+\frac{c^2}{2}$

따라서 $a^2+b^2=c^2$이다.

추/론

|출제 의도| 닮은 삼각형을 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여 봄으로써 다양한 각도에서 피타고라스 정리를 생각해 보게 하기 위한 문제이다.

풀이| $\angle\text{BCA}=\angle\text{BHC}=90^\circ$이고

$\angle\text{CBA}=\angle\text{HBC}$이므로

$\triangle\text{CAB}\backsim\triangle\text{HCB}$

$\angle\text{BCA}=\angle\text{CHA}=90^\circ$이고

$\angle\text{CAB}=\angle\text{HAC}$이므로

$\triangle\text{CAB}\backsim\triangle\text{HAC}$

즉, $\triangle\text{CAB}\backsim\triangle\text{HCB}\backsim\triangle\text{HAC}$

$\triangle\text{CAB}\backsim\triangle\text{HCB}$이므로

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{CB}}=\overline{\text{CB}}:\overline{\text{HB}}$

$c:a=a:x$에서 $cx=a^2$ ……①

$\triangle\text{CAB}\backsim\triangle\text{HAC}$이므로

$\overline{\text{CA}}:\overline{\text{HA}}=\overline{\text{AB}}:\overline{\text{AC}}$

$b:c-x=c:b$, $b^2=c(c-x)$

$cx=c^2-b^2$ ……②

①, ②에서 $a^2=c^2-b^2$

따라서 $a^2+b^2=c^2$이다.

지/도/자/료

피타고라스 정리가 성립함을 보이는 방법은 수백 가지가 넘는다고 알려져 있다. 루미스(Loomis, E. S.)는 "피타고라스 정리"라는 책의 제2판에서 이 정리가 성립함을 보이는 370여 개의 방법을 모아 분류하였다. 현재에도 새로운 방법이 계속 발견되고 있다.

본문 해설

❶ 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2+b^2=c^2$$

이다.

이를 이용하면 a, b의 값을 알 때 c의 값을 구하는 식은

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

임을 알 수 있다. 또 b, c의 값을 알 때 a의 값을 구하는 식은

$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

이고, a, c의 값을 알 때 b의 값을 구하는 식은

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

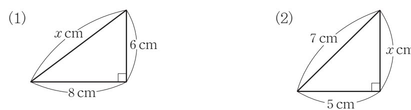
임도 알 수 있다.

❷ 직각삼각형의 세 변의 길이가 자연수나 유리수가 아닌 무리수가 되는 경우도 있다.

교과서 170 쪽

❶ ...라스 정리를 이용하면 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 ... 이를 구할 수 있다.

예제 1 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.



풀이 (1) 피타고라스 정리에 의하여

$8^2+6^2=x^2$, $x^2=100$

$x=\pm10$

그런데 $x>0$이므로

$x=10$

(2) 피타고라스 정리에 의하여

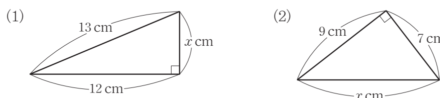
$5^2+x^2=7^2$, $x^2=24$

$x=\pm2\sqrt{6}$

그런데 $x>0$이므로

답 (1) 10 (2) $2\sqrt{6}$

문제 2 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.



2

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 피타고라스 정리에 의하여

$12^2+x^2=13^2$, $x^2=13^2-12^2=25$

$x=\pm5$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=\mathbf{5}$

(2) 피타고라스 정리에 의하여

$9^2+7^2=x^2$, $x^2=130$

$x=\pm\sqrt{130}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=\sqrt{\mathbf{130}}$

읽/기/자/료 유팔리노스 터널과 피타고라스 정리

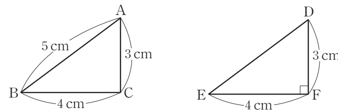
그리스 에게 해(Aegean Sea)의 사모스 섬에는 2500년 전 인류가 최초로 양방향에서 뚫었다는 직선 터널인 유팔리노스 터널이 있다. 이 터널의 흥미로운 점은 산의 남쪽과 북쪽을 동시에 뚫어 중간 지점에서 만나도록 하였다는 것이다. 후대 사람들은 여기에 피타고라스 정리가 이용되었을 것이라 추정하고 있는데, 만약 아주 작은 오차라도 있었다면 양쪽에서 산을 파고 들어갔던 사람들은 중간 지점에서 만나지 못하고 엉뚱한 곳에 구멍을 뚫었을지도 모른다.

하지만 이 터널이 어떤 설계에 의해 완성되었는지 정확하게 아는 사람은 아무도 없다. 터널이 완성된 지 500년이 지난 후 그리스의 헤론(Heron: ?10~?75)은 자신이 고안한 측량기로 이와 같은 터널을 만들 수 있다고 기록하였으나, 터널이 만들어졌던 당시에는 나침반, 지도, 측량 장비도 없었다. 또한 유클리드의 원론이 나오기 200년 전, 헤론의 측량 기구가 발명되기 500년 전의 일이었다.

지금까지 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같음을 살펴보았다.

이제 한 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합과 같은 삼각형은 직각삼각형인지 알아보자.

다음 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 3 cm, 4 cm, 5 cm인 삼각형 ABC와 빗변이 아닌 나머지 두 변의 길이가 각각 3 cm, 4 cm인 직각삼각형 DEF가 주어져 있다.



이때 삼각형 DEF는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

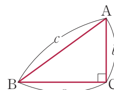
$$\overline{DE}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm})$$

이며 두 삼각형 ABC와 DEF는 대응하는 세 변의 길이가 각각 같으므로 서로 합동[illegible] 따라서 ∠C=∠F=90°이므로 삼각형 ABC도 직각삼각형이다.

❶ [illegible]이 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 △ABC에서

$$a^2+b^2=c^2$$

이 성립하면 △ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형이다.



보기 세 변의 길이가 각각 6 cm, 8 cm, 10 cm인 삼각형은 $6^2+8^2=10^2$이므로 직각삼각형이다.

문제 3 세 변의 길이가 각각 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형인 것을 모두 찾아라.

가장 긴 변의 길이의 제곱과 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합을 비교한다.

㉠ 9 cm, 12 cm, 15 cm	㉡ 7 cm, 24 cm, 25 cm
㉢ 4 cm, 6 cm, 9 cm	㉣ 1 cm, $\sqrt{3}$ cm, 2 cm

문제 4 문제 3과 같이 세 변의 길이가 주어진 삼각형 중에서 직각삼각형을 찾는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

4

|출제 의도| 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 직각삼각형이 되는 조건을 이해하게 하려는 문제이다.

예시| 세 변의 길이가 각각 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형인 것을 모두 찾아라.

> ㉠ 3 cm, 3 cm, 4 cm
> ㉡ $\sqrt{7}$ cm, 3 cm, 4 cm
> ㉢ 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm, 6 cm
> ㉣ 5 cm, 6 cm, $2\sqrt{30}$ cm

풀이| ㉠ $3^2+3^2=9+9=18\neq4^2$
㉡ $(\sqrt{7})^2+3^2=7+9=16=4^2$
㉢ $3^2+(3\sqrt{3})^2=9+27=36=6^2$
㉣ $5^2+6^2=25+36=61\neq(2\sqrt{30})^2$
따라서 직각삼각형인 것은 ㉡, ㉢이다.

본문 해설

❶ 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형에서 반드시 길이가 가장 긴 변의 길이의 제곱(c^2)과 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합(a^2+b^2)을 비교해야 한다. 그렇지 않으면 직각삼각형일지라도 피타고라스 정리의 등식($a^2+b^2=c^2$)이 성립하지 않을 수 있기 때문이다.

3

목표| 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $9^2+12^2=81+144=225=15^2$
㉡ $7^2+24^2=49+576=625=25^2$
㉢ $4^2+6^2=16+36=52\neq9^2$
㉣ $1^2+(\sqrt{3})^2=1+3=4=2^2$
따라서 직각삼각형인 것은 ㉠, ㉡, ㉣이다.

지/도/자/료

1. 삼각형의 각의 크기에 대한 변의 길이

△ABC에서 세 꼭짓점 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때 (단, c는 가장 긴 변의 길이)

(1) ∠C<90°(예각)이면 $c^2<a^2+b^2$
(2) ∠C=90°(직각)이면 $c^2=a^2+b^2$
(3) ∠C>90°(둔각)이면 $c^2>a^2+b^2$

2. 삼각형의 변의 길이에 대한 각의 크기

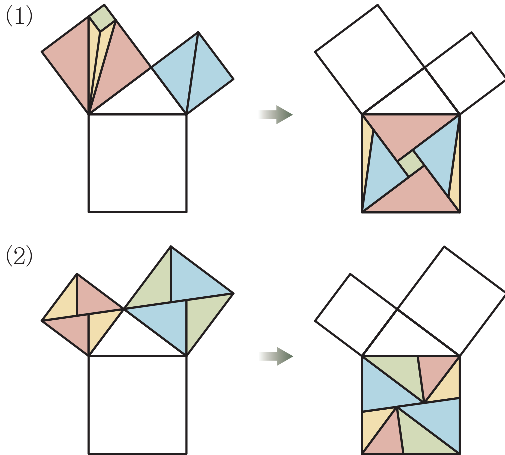
△ABC에서 세 꼭짓점 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때 (단, c는 가장 긴 변의 길이)

(1) $c^2<a^2+b^2$이면 ∠C<90°(예각삼각형)
(2) $c^2=a^2+b^2$이면 ∠C=90°(직각삼각형)
(3) $c^2>a^2+b^2$이면 ∠C>90°(둔각삼각형)

추/론

|출제 의도| 피타고라스 정리 퍼즐을 이용한 활동을 통하여 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합이 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같음을 알게 하고, 이는 피타고라스 정리가 성립함을 설명하는 방법 중의 하나임을 알게 하기 위한 문제이다.

풀이



(1), (2)에서 볼 수 있듯이 직각삼각형에서 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 직각을 낀 두 변을 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합과 같다.
그런데 정사각형의 넓이는 한 변의 길이의 제곱과 같으므로 직각삼각형에서 빗변의 길이의 제곱은 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다.
따라서 피타고라스 정리가 성립한다.

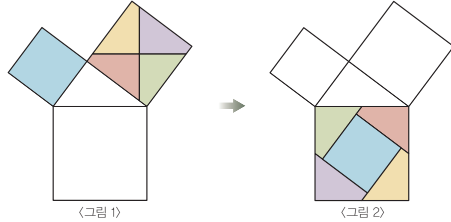
교과서 172 쪽

추론

●준비물
피타고라스 정리 퍼즐
활동지 5

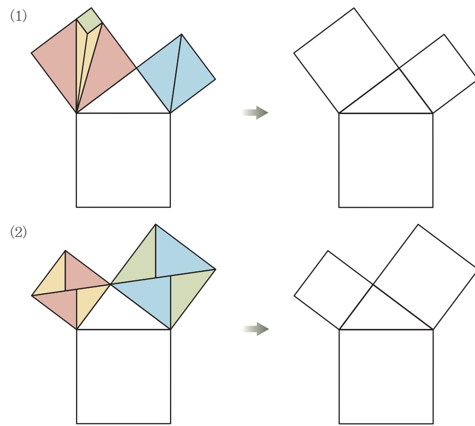
피타고라스 정리가 성립함을 설명하는 방법은 수백 가지가 넘는다고 알려져 있다.
다음 활동을 해 보고 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여 보자.

〈그림 1〉과 같이 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 한 변으로 하는 두 정사각형의 나눈 조각을 모두 사용하여 〈그림 2〉와 같이 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 빈틈없이 채운다.



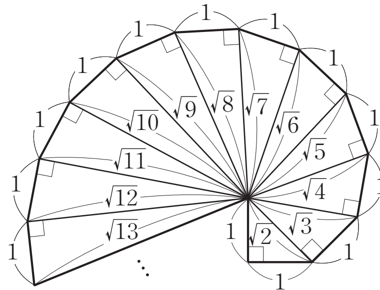
〈그림 1〉 〈그림 2〉

위와 같은 방법으로 활동지 5 의 피타고라스 정리 퍼즐을 이용하여 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 빈틈없이 채워 보자.



지/도/자/료 길이가 무리수인 선분의 작도

피타고라스 정리를 이용하여 다음 그림과 같이 길이가 무리수 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\cdots$인 선분을 작도할 수 있다.



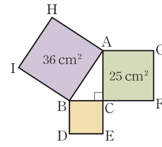
❶ 세 변의 길이가 1, 1, $\sqrt{2}$인 직각삼각형을 작도한다.

❷ 위의 그림과 같이 ❶에서 그린 직각삼각형의 빗변과 수직으로 만나는 길이가 1인 선분을 그어 직각삼각형을 작도한다. 이 직각삼각형의 빗변의 길이가 $\sqrt{3}$이다.

❸ 같은 방법으로 빗변의 길이가 $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\cdots$인 직각삼각형을 작도할 수 있다.

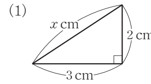
중/단/원 기초

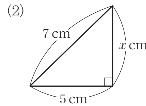
1 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형이 있다. □ABIH$=36$ cm^2, □ACFG$=25$ cm^{2}일 때, □BDEC의 넓이를 구하여라.

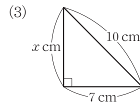


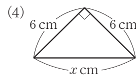
직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$

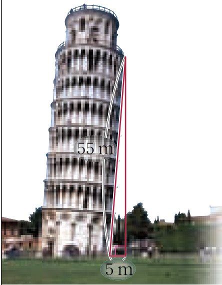
2 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.

(1)


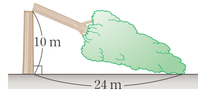
(2)


(3)


(4)




3 오른쪽 그림과 같이 어떤 나무가 부러져 있다. 부러진 부분의 길이를 구하여라.



4 왼쪽 그림과 같이 기울어진 피사의 사탑에서 지면과 수직 방향으로 쇠공을 떨어뜨렸을 때, 쇠공이 이동한 거리를 구하여라. (단, 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구한다.)

중/단/원 기초

1

목표| 피타고라스 정리를 이해하게 한다.

풀이| 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$이므로

□ABIH$=$□BDEC$+$□ACFG

$36=$□BDEC$+25$

□BDEC$=$**11(cm^2)**

2

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 피타고라스 정리에 의하여

$3^2+2^2=x^2$, $x^2=13$

$x=\pm\sqrt{13}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\mathbf{\sqrt{13}}$

(2) 피타고라스 정리에 의하여

$5^2+x^2=7^2$, $x^2=7^2-5^2$

$x^2=24$

$x=\pm\sqrt{24}=\pm2\sqrt{6}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\mathbf{2\sqrt{6}}$

(3) 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+7^2=10^2$, $x^2=10^2-7^2$

$x^2=51$

$x=\pm\sqrt{51}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\mathbf{\sqrt{51}}$

(4) 피타고라스 정리에 의하여

$6^2+6^2=x^2$, $x^2=72$

$x=\pm\sqrt{72}=\pm6\sqrt{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\mathbf{6\sqrt{2}}$

3

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 부러지지 않은 부분의 나무가 지면과 직각이므로 피타고라스 정리에 의하여

(부러진 부분의 길이)$^2=10^2+24^2$

$=100+576$

$=676=26^2$

따라서 부러진 부분의 길이는 **26 m**이다.

4

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 쇠공이 이동한 거리를 x m라고 하자.

피타고라스 정리에 의하여

$5^2+x^2=55^2$, $x^2=55^2-5^2$

$x^2=3000$, $x=\pm\sqrt{3000}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{3000}=54.772\cdots$

따라서 쇠공이 이동한 거리는 **54.77 m**이다.

중/단/원 기본

1

목표| 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^2+b^2=c^2$이므로 표를 완성하면

a	3	8	**10**	11	**$5\sqrt{2}$**
b	**4**	15	10	**12**	$5\sqrt{2}$
c	5	**17**	$10\sqrt{2}$	$\sqrt{265}$	10

2

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정사각형 CEFG의 넓이가 25 cm^2이므로 $\overline{CE}=5$(cm)이다.
직각삼각형 ABE에서
$\overline{AB}=15$(cm), $\overline{BE}=15+5=20$(cm)이므로
피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{BE}^2=15^2+20^2=y^2$
$y^2=625,\ y=\pm25$
$y>0$이므로 $\quad y=\mathbf{25}$

교과서 174 쪽

중/단/원 기본

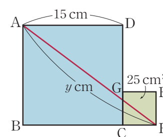
피타고라스 정리

1 직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 할 때, 다음 표를 완성하여라.

a	3	8		11	
b		15	10		$5\sqrt{2}$
c	5		$10\sqrt{2}$	$\sqrt{265}$	10

피타고라스 정리

2 오른쪽 그림에서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 15 cm이고, 정사각형 CEFG의 넓이가 25 cm^2일 때, y의 값을 구하여라.

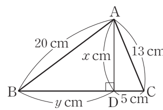


직각삼각형이 되는 조건

3 세 변의 길이가 각각 a, $a+2$, $a+4$인 삼각형이 직각삼각형이 되기 위한 a의 값을 구하여라.

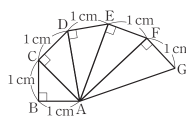
직각삼각형의 변의 길이

4 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$이고
$\overline{AB}=20$ cm, $\overline{AC}=13$ cm, $\overline{CD}=5$ cm
일 때, x, y의 값을 구하여라.



직각삼각형의 변의 길이

5 오른쪽 그림에서 $\overline{AG}$의 길이를 구하여라.



3

목표| 직각삼각형이 되는 조건을 이해하게 한다.

풀이| $a<a+2<a+4$이므로 삼각형의 세 변 중에서 가장 긴 변의 길이는 $a+4$이다.
따라서 주어진 삼각형이 직각삼각형이 되려면
$a^2+(a+2)^2=(a+4)^2$이어야 하므로 이 식을 정리하면
$a^2+a^2+4a+4=a^2+8a+16,\ a^2-4a-12=0$
$(a+2)(a-6)=0,\ a=-2$ 또는 $a=6$
그런데 $a>0$이므로 $\quad a=\mathbf{6}$

4

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △ADC에서 $\quad x=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=\mathbf{12}$
△ABD에서 $\quad y=\sqrt{20^2-x^2}=\sqrt{20^2-12^2}=\sqrt{256}=\mathbf{16}$

5

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

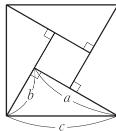
풀이| 삼각형 ABC, ACD, ADE, AEF, AFG는 모두 직각삼각형이므로
$\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$(cm)
$\overline{AD}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$(cm)
$\overline{AE}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$(cm)
$\overline{AF}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$(cm)
$\overline{AG}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\mathbf{\sqrt{6}(cm)}$

교과서 175 쪽

중 / 단 / 원 실력

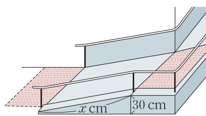
수준별

1 오른쪽 그림은 12세기 인도의 수학자 바스카라(Bhaskara, A.: 1114~1185)가 합동인 네 개의 직각삼각형을 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명할 때 사용한 그림이다. 이 그림을 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여라.



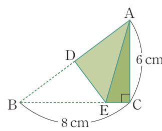
• 경사로의 기울기는 경사로의 높이를 수평 거리로 나누어 계산한다.

2 휠체어를 탄 장애인이나 노약자를 위해 만든 경사로의 기울기는 최대 $\frac{1}{12}$이라고 한다. 오른쪽 그림과 같이 높이가 30 cm인 경사로의 기울기가 $\frac{1}{12}$일 때, 경사로의 길이 x의 값을 구하여라. (단, 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구한다.)

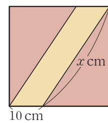


• $\overline{AE}$의 길이를 먼저 구한 후, 피타고라스 정리를 이용한다.

3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}=6$ cm, $\overline{BC}=8$ cm인 종이로 된 직각삼각형 ABC에서 꼭짓점 B가 꼭짓점 A에 포개어지도록 접었을 때, 접힌 선 DE의 길이를 구하여라.



4 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 두 평행선으로 나누었다. 나누어진 세 부분의 넓이가 같을 때, x의 값을 구하여라.



2

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{1}{12}=\frac{30}{(\text{경사로의 수평 거리})}$에서

(경사로의 수평 거리)$=360$(cm)

따라서

$x=\sqrt{30^2+360^2}=\sqrt{130500}=361.24\cdots$

➡ **361.2**

3

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AE}=\overline{BE}=x$ cm라고 하면

$\overline{EC}=(8-x)$ cm

△AEC에서 $x^2=(8-x)^2+6^2$

$16x=100$, $x=\frac{25}{4}$

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$(cm)이므로 $\overline{AD}=5$(cm)

△ADE는 직각삼각형이므로

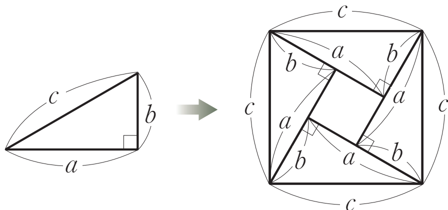
$\overline{DE}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\mathbf{\frac{15}{4}}$**(cm)**

중/단/원 실력

1

목표| 주어진 그림을 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명할 수 있게 한다.

풀이| 다음 그림과 같이 직각삼각형 4개가 배열되어 한 변의 길이가 c인 큰 정사각형을 이루고 있다.



직각삼각형 하나의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이고 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $a-b$이므로 다음 등식이 성립한다.

$c^2=(a-b)^2+4\times\frac{1}{2}ab=a^2-2ab+b^2+2ab=a^2+b^2$

따라서 $c^2=a^2+b^2$이 성립한다.

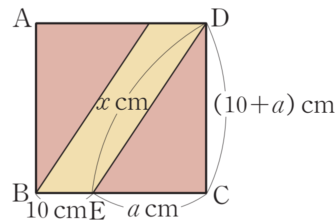
4

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{EC}=a$ cm라고 하면 □ABCD는 정사각형이므로

$\overline{DC}=(10+a)$ cm

나누어진 세 부분의 넓이가 같으므로 직각삼각형 DEC의 넓이는 정사각형 넓이의 $\frac{1}{3}$이다.



$\frac{1}{2}a(10+a)=\frac{1}{3}(10+a)^2$, $(a+10)(a-20)=0$

$a=-10$ 또는 $a=20$

$a>0$이므로 $a=20$

△DEC에서

$x=\sqrt{a^2+(10+a)^2}=\sqrt{20^2+30^2}$

$=\sqrt{1300}=\mathbf{10\sqrt{13}}$

2 피타고라스 정리의 활용

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 피타고라스 정리를 활용하여 직사각형의 대각선의 길이, 정삼각형의 높이를 구할 수 있게 한다.

② 피타고라스 정리를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

③ 피타고라스 정리를 활용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

④ 피타고라스 정리를 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

⑤ 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔과 정사각뿔의 높이와 부피를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
2-1 평면도형에의 활용	직사각형의 대각선의 길이
	삼각형의 높이와 넓이
	좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
2-2 입체도형에의 활용	직육면체의 대각선의 길이
	원뿔의 높이와 부피
	정사각뿔의 높이와 부피
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

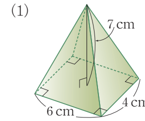
교과서 176 쪽

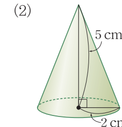
2 피타고라스 정리의 활용

준|비|학|습

각뿔과 원뿔의 부피
밑면의 넓이가 S이고, 높이가 h인 각뿔이나 원뿔의 부피 V는
$V=\frac{1}{3}Sh$

1 다음 입체도형의 부피를 구하여라.

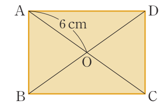
(1)


(2)


직사각형의 성질
직사각형에서 두 대각선은 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.

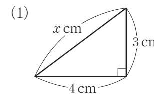
2 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O라고 하자. $\overline{AO}=6$ cm일 때, 다음을 구하여라.

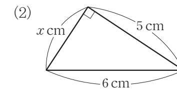
(1) $\overline{CO}$의 길이
(2) $\overline{BD}$의 길이



피타고라스 정리
직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면
$a^2+b^2=c^2$

3 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.

(1)


(2)


준비 학습의 해설

1

목표| 각뿔과 원뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{1}{3}\times(6\times4)\times7=\mathbf{56(cm^3)}$

(2) $\frac{1}{3}\times(\pi\times2^2)\times5=\mathbf{\frac{20}{3}\pi(cm^3)}$

2

목표| 직사각형의 대각선의 성질을 알게 한다.

풀이| (1) 직사각형에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로
$\overline{CO}=\overline{AO}=\mathbf{6(cm)}$

(2) 직사각형에서 두 대각선은 길이가 같으므로
$\overline{BD}=\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{CO}$
$=6+6=\mathbf{12(cm)}$

3

목표| 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$

(2) $x=\sqrt{6^2-5^2}=\mathbf{\sqrt{11}}$

교과서 177 쪽

2-1 평면도형에의 활용

- 피타고라스 정리를 평면도형에 활용할 수 있다.
- 피타고라스 정리를 실생활 문제에 활용할 수 있다.

피타고라스 정리를 평면도형에서 어떻게 활용할 수 있는가?

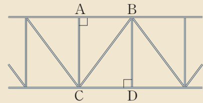
창의력 기르기

트러스(truss)

대부분의 철교는 트러스(truss)로 되어 있다. 트러스란 직선으로 된 여러 개의 뼈대 재료를 삼각형이나 오각형 모양으로 이은 구조를 말하는데, 이는 모양에 따라 아치 형식, 현수 형식, 보 형식으로 나뉜다. 특히 영종대교는 주로 직각삼각형 모양의 트러스로 이루어져 있다.

탐구 활동

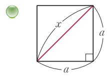
다음 그림과 같은 트러스를 만들려고 한다. 물음에 답하여 보자.



1 $\overline{AB}=3$ m, $\overline{AC}=4$ m가 되도록 하려면 $\overline{BC}$의 길이는 몇 m여야 하는가?

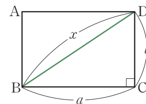
2 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$ m, $\overline{BD}=2$ m가 되도록 하려면 $\overline{CD}$의 길이는 몇 m여야 하는가?

피타고라스 정리를 이용하여 직사각형의 대각선의 길이를 구하여 보자.



한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이 x는 $x=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형 ABCD에서 대각선 BD의 길이를 x라고 하면 피타고라스 정리에 의하여 $x^2=a^2+b^2$이다. 그런데 $x>0$이므로



$$x=\sqrt{a^2+b^2}$$

이다.

2. 정사각형도 직사각형에 포함되므로 정사각형의 대각선의 길이도 직사각형의 대각선의 길이의 한 형태로 생각하여 구할 수 있도록 지도한다.

창의력 기르기 참/고/자/료

트러스는 기원전 2500년경 청동기 시대 초기의 가옥에 처음으로 사용되었던 것으로 보이며 초기의 트러스는 나무로 만들어졌다. 그리스 인은 지붕을 만들 때 트러스를 널리 사용하였고, 중세에 와서 그 사용 범위가 넓어졌다. 트러스는 19세기 초 미국에서 지붕이 있는 다리를 개발하면서 크게 발전하였으며 재료도 주철과 연철 대신 강철이 사용되었다. 트러스는 지붕이나 다리뿐만 아니라 기중기, 승강기 등의 여러 기계와 비행기의 날개, 동체 등에 사용된다.

2-1 평면도형에의 활용

소단원 지도 목표

① 피타고라스 정리를 활용하여 직사각형의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.
② 피타고라스 정리를 활용하여 이등변삼각형과 등변사다리꼴의 높이를 구할 수 있게 한다.
③ 피타고라스 정리를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.
④ 피타고라스 정리를 활용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 직사각형의 대각선의 길이를 구할 때 공식에 의존하지 않고 직각삼각형을 생각하여 구할 수 있도록 지도한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 트러스에서 삼각형의 변의 길이를 구하도록 함으로써 피타고라스 정리를 활용하게 하려는 것이다.

1. △ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여
$3^2+4^2=\overline{BC}^2$
$\overline{BC}^2=25$
그런데 $\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=5(\text{m})$

2. △BCD는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여
$2^2+\overline{CD}^2=(2\sqrt{2})^2$
$\overline{CD}^2=4$
그런데 $\overline{CD}>0$이므로 $\overline{CD}=2(\text{m})$

1

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 직사각형의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 액자의 대각선의 길이를 x cm라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$20^2+15^2=x^2$, $x^2=625$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{625}=25$

따라서 구하는 대각선의 길이는 **25 cm**이다.

(2) 모니터 화면의 대각선의 길이를 x cm라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$64^2+36^2=x^2$, $x^2=5392$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{5392}=4\sqrt{337}$

따라서 구하는 대각선의 길이는 $\mathbf{4\sqrt{337}}$ **cm**이다.

2

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정사각형의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 홈에서 2루까지의 거리를 x m라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

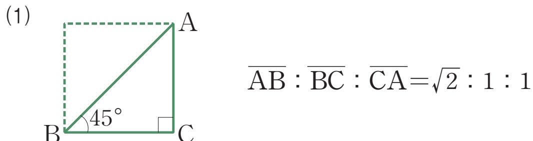
$x=\sqrt{27.4^2+27.4^2}=\sqrt{1501.52}=38.749\cdots$

따라서 구하는 거리는 **38.75 m**이다.

지/도/자/료

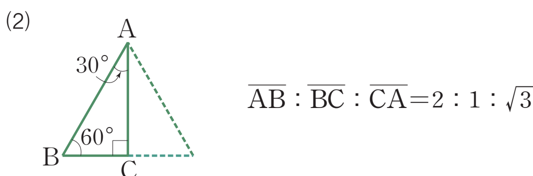
한 각의 크기가 45°이거나 60°인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는 다음과 같음을 알 수 있다.

(1)



$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\sqrt{2}:1:1$

(2)

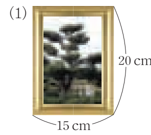


$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=2:1:\sqrt{3}$

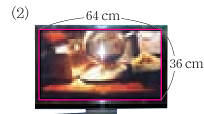
교과서 178 쪽

실생활 **문제 1** 가로, 세로의 길이가 각각 다음과 같은 직사각형의 대각선의 길이를 구하여라.

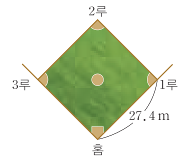
(1)



(2)



문제 2 오른쪽 그림과 같은 야구장에서 내야는 한 변의 길이가 27.4 m인 정사각형 모양이라고 할 때, 홈에서 2루까지의 거리를 구하여라. (단, 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구한다.)



예제 1 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 구하여라.

정삼각형의 한 꼭짓점에서 대변에 그은 수선은 그 대변을 이등분한다.

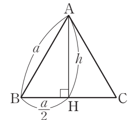
풀이 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{BH}=\overline{CH}=\frac{a}{2}$

△ABH에서 $\overline{AH}=h$라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2$, $h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2$

$h>0$이므로 $h=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$



답 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

문제 3 다음을 구하여라.

(1) 한 변의 길이가 8 cm인 정삼각형의 높이

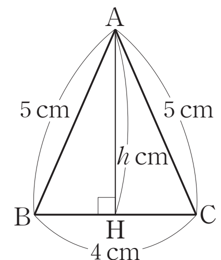
(2) 밑변의 길이가 4 cm이고, 나머지 두 변의 길이가 모두 5 cm인 이등변삼각형의 높이

3

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 삼각형의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 정삼각형의 한 변의 길이가 8 cm이므로 구하는 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times8=\mathbf{4\sqrt{3}}$**(cm)**

(2) 주어진 이등변삼각형을 오른쪽 그림과 같이 △ABC로 놓고, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2$(cm)

△ABH에서 $\overline{AH}=h$ cm라고 하면

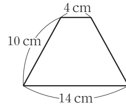
$2^2+h^2=5^2$, $h^2=21$

$h>0$이므로 $h=\sqrt{21}$

따라서 구하는 높이는 $\mathbf{\sqrt{21}}$ **cm**이다.

교과서 179 쪽

문제 4 오른쪽 그림과 같은 등변사다리꼴의 높이를 구하여라.

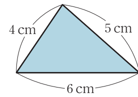


아랫변의 양 끝 각의 크기가 같은 사다리꼴을 등변사다리꼴이라고 한다.

예제 2 세 변의 길이가 각각 5 cm, 8 cm, 9 cm인 삼각형의 넓이를 구하여라.

삼각형에서 세 변의 길이만 알면 피타고라스 정리를 이용하여 넓이를 구할 수 있다.

풀이 주어진 삼각형을 오른쪽 그림과 같이 △ABC로 놓고, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{AH}=h$ cm, $\overline{BH}=x$ cm라고 하면 두 직각삼각형 ABH, ACH에서 피타고라스 정리에 의하여

$h^2=5^2-x^2$ …… ①

$h^2=8^2-(9-x)^2$ …… ②

①, ②로부터 $5^2-x^2=8^2-(9-x)^2$, $18x=42$이므로 $x=\frac{7}{3}$

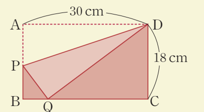
$x=\frac{7}{3}$을 ①에 대입하면 $h^2=5^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2=25-\frac{49}{9}=\frac{176}{9}$

$h>0$이므로 $h=\sqrt{\frac{176}{9}}=\frac{4\sqrt{11}}{3}$

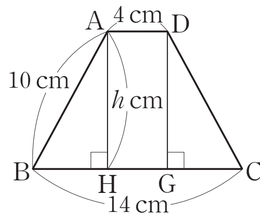
따라서 구하는 넓이는 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 9\times\frac{4\sqrt{11}}{3}=6\sqrt{11}(\text{cm}^2)$

답 $6\sqrt{11}$ cm²

문제 5 오른쪽 그림과 같은 삼각형의 넓이를 구하여라.



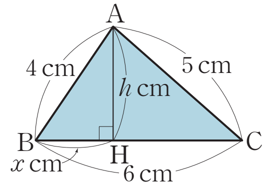
창의 UP 직사각형 모양의 색종이 ABCD를 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A가 변 BC 위의 한 점 Q에 오도록 접었을 때, 접힌 선 DP를 한 변으로 하는 △PQD의 넓이를 구하는 방법을 설명하여라.



5

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 △ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{AH}=h$ cm, $\overline{BH}=x$ cm라고 하면 직각삼각형 ABH에서 $h^2=4^2-x^2$ …… ①

직각삼각형 AHC에서

$h^2=5^2-(6-x)^2$ …… ②

①, ②에서 $4^2-x^2=5^2-(6-x)^2$

이 식을 정리하면 $12x=27$, $x=\frac{9}{4}$

$x=\frac{9}{4}$를 ①에 대입하면

$h^2=4^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{175}{16}$

$h>0$이므로 $h=\sqrt{\frac{175}{16}}=\frac{5\sqrt{7}}{4}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{5\sqrt{7}}{4}=\mathbf{\frac{15\sqrt{7}}{4}(cm^2)}$

4

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 등변사다리꼴의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 등변사다리꼴 ABCD의 꼭짓점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, G라고 하면

$\overline{BH}=\overline{CG}$

$=\frac{1}{2}(14-4)=5(\text{cm})$

△ABH에서 $\overline{AH}=h$ cm라고 하면

$5^2+h^2=10^2$, $h^2=75$

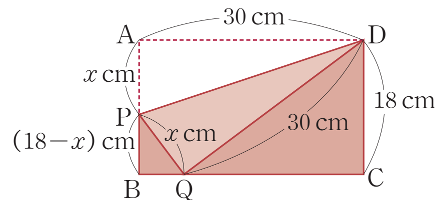
$h>0$이므로 $h=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

따라서 구하는 높이는 $\mathbf{5\sqrt{3}}$ **cm**이다.

창의 UP

|출제 의도| 피타고라스 정리를 활용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이|



$\overline{AP}=x$ cm로 놓으면 $\overline{BP}=(18-x)$ cm, $\overline{PQ}=x$ cm

△DQC는 직각삼각형이고

$\overline{DQ}=\overline{AD}=30(\text{cm})$, $\overline{DC}=18(\text{cm})$이므로

$\overline{QC}=\sqrt{30^2-18^2}=24(\text{cm})$, $\overline{BQ}=30-24=6(\text{cm})$

△PBQ는 직각삼각형이므로

$x^2=(18-x)^2+6^2$, $x=10$

△PQD는 직각삼각형이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\times 30=\mathbf{150(cm^2)}$

본문 해설

❶ 좌표평면 위의 두 점 A와 B 사이의 거리를 구할 때, 점 A에서는 x축과 평행하게 점 B에서는 y축과 평행하게 선분을 긋거나 점 A에서는 y축과 평행하게 점 B에서는 x축과 평행하게 직선을 그어서 $\overline{AB}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 만든 다음 피타고라스 정리를 이용한다.

교과서 180 쪽

피타고라스 정리를 이용하면 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

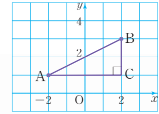
예제 3 좌표평면 위의 두 점 A$(-2,\ 1)$, B$(2,\ 3)$ 사이의 거리를 구하여라.

❶ 오른쪽 그림과 같이 좌표축에 평행한 선분 AC, BC를 각각 그려서 직각삼각형 ACB를 만들면 점 C의 좌표는 $(2,\ 1)$이다. 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4^2+2^2=20$

$\overline{AB}>0$이므로

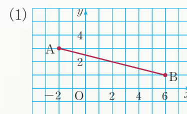
$\overline{AB}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$



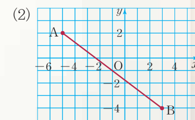
답 ● $2\sqrt{5}$

문제 6 다음 좌표평면 위의 두 점을 잇는 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 그리고, 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1)



(2)

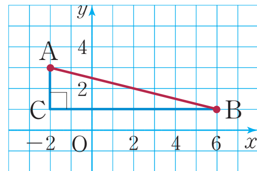


문제해결 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 80 cm이고, 세로의 길이가 2 m인 직사각형 모양의 문으로 정사각형 모양의 얇은 나무 판을 통과시켜 옮기려고 한다. 이때 한 변의 길이가 몇 cm인 나무 판까지 이 문을 통과하여 옮길 수 있는지 구하여 보자. (단, 나무 판의 두께는 생각하지 않는다.)

6

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 점 A와 점 B에서 각각 y축과 x축에 평행한 선분을 그어 만나는 점을 C라고 하면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이고, 점 C의 좌표는 C$(-2,\ 1)$이다.

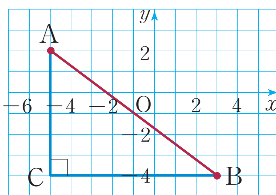


피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2^2+8^2=68$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{68}=\mathbf{2\sqrt{17}}$

(2) 점 A와 점 B에서 각각 y축과 x축에 평행한 선분을 그어 만나는 점을 C라고 하면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이고, 점 C의 좌표는 C$(-5,\ -4)$이다.



피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=6^2+8^2=100$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{100}=\mathbf{10}$

문/제/해/결

|출제 의도| 피타고라스 정리를 활용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있음을 알게 하기 위한 문제이다.

풀이| 문을 통과할 수 있는 가장 긴 길이는 문의 대각선의 길이이므로 이 길이를 x cm라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$200^2+80^2=x^2$, $x^2=46400$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{46400}=40\sqrt{29}$

따라서 한 변의 길이가 **$40\sqrt{29}$ cm**인 정사각형 모양의 나무 판까지 문을 통과하여 옮길 수 있다.

2-2 입체도형에의 활용

● 피타고라스 정리를 입체도형에 활용할 수 있다.
● 피타고라스 정리를 실생활 문제에 활용할 수 있다.

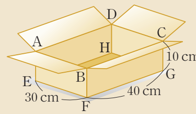
피타고라스 정리를 입체도형에서 어떻게 활용할 수 있는가?

창의력 기르기 온라인 쇼핑

온라인 쇼핑은 텔레비전, 상품 안내서, 인터넷 등에서 상품 정보를 보고 인터넷이나 전화 등으로 물건을 사는 것을 말한다. 1977년 미국 플로리다 주의 한 라디오 방송국에서 처음으로 상업적인 무점포 판매 방식의 쇼핑 방송을 시작한 것이 그 시초이다.

탐구 활동

어느 온라인 쇼핑몰 회사에서 오른쪽 그림과 같이 세 모서리의 길이가 각각 30 cm, 40 cm, 10 cm인 직육면체 모양의 상자에 막대 모양의 물건을 담으려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.



1 $\triangle$DFH는 어떤 삼각형인가?

2 $\overline{FH}$의 길이를 구하여 보자.

3 이 상자에 들어갈 수 있는 가장 긴 막대의 길이를 구하는 방법을 말하여 보자.

❶ [illegible]라스 정리를 이용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구하여 보자.

[illegible]른쪽 그림과 같이 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체에서 직각삼각형 FGH의 빗변 FH의 길이를 d라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$d^2=a^2+b^2 \quad \cdots\cdots ①$$

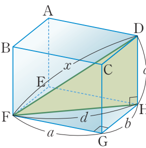
이다. 또 직각삼각형 DFH의 빗변 DF의 길이를 x라고 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2=d^2+c^2 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 따라서 ①, ②로부터 $x^2=a^2+b^2+c^2$이고, $x>0$이므로

$$x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

이다.



● 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 선분 DF를 직육면체의 대각선이라고 한다.

● $\overline{DH}\perp\overline{EH}$, $\overline{DH}\perp\overline{GH}$이므로 $\overline{DH}$는 평면 EFGH와 수직이다. 따라서 $\overline{DH}\perp\overline{FH}$이므로 $\triangle$DFH는 직각삼각형이다.

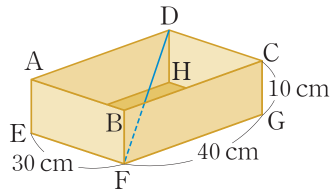
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 피타고라스 정리를 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 방법을 이해하게 하려는 것이다.

1. $\overline{DH}\perp\overline{EH}$, $\overline{DH}\perp\overline{HG}$이므로 $\overline{DH}$는 평면 EFGH 위의 모든 직선과 수직이다. 따라서 $\overline{DH}\perp\overline{HF}$이므로 $\triangle$DFH는 **직각삼각형**이다.

2. $\overline{FH}$는 $\triangle$EFH의 빗변이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{FH}^2=30^2+40^2=2500$
따라서 $\overline{FH}=$**50(cm)**이다.

3.



막대의 두께를 무시하면 위의 그림과 같이 막대를 넣을 때 가장 긴 막대를 넣을 수 있다. 따라서 상자에 들어갈 수 있는 가장 긴 막대의 길이는 $\overline{DF}$의 길이와 같다.

2-2 입체도형에의 활용

소단원 지도 목표

① 피타고라스 정리를 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

② 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 높이와 부피를 구할 수 있게 한다.

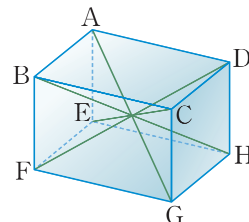
③ 피타고라스 정리를 활용하여 정사각뿔의 높이와 부피를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 입체도형에서의 선분의 길이, 겉넓이, 부피는 그림을 통해 직각삼각형을 찾아 피타고라스 정리를 이용하여 구할 수 있도록 한다.

본문 해설

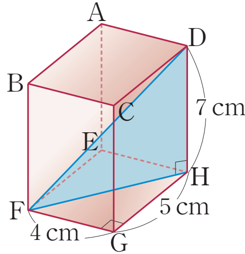
❶ 다음 그림과 같은 직육면체에서 선분 AG, BH, CE, DF를 직육면체의 대각선이라고 한다. 이때 4개의 대각선의 길이는 모두 같다. 즉, $\overline{AG}=\overline{BH}=\overline{CE}=\overline{DF}$이다.



1

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)



위와 같은 직육면체에서 △HFG가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{FH}^2=\overline{FG}^2+\overline{GH}^2=4^2+5^2=41$

△DFH가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DF}^2=\overline{FH}^2+\overline{DH}^2=41+49=90$

$\overline{DF}>0$이므로 $\overline{DF}=\sqrt{90}=\mathbf{3\sqrt{10}\,(cm)}$

(2) 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 △HFG가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{FH}^2=\overline{FG}^2+\overline{GH}^2$

$=3^2+6^2=45$

△DFH가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

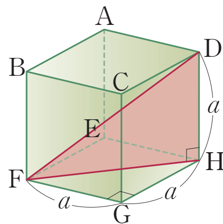
$\overline{DF}^2=\overline{FH}^2+\overline{DH}^2=45+81=126$

$\overline{DF}>0$이므로 $\overline{DF}=\sqrt{126}=\mathbf{3\sqrt{14}\,(cm)}$

2

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정육면체에서 △HFG는 직각삼각형이므로



$\overline{FH}^2=\overline{FG}^2+\overline{GH}^2$

$=a^2+a^2=2a^2$

△DFH는 직각삼각형이므로

$\overline{DF}^2=\overline{FH}^2+\overline{DH}^2=2a^2+a^2=3a^2$

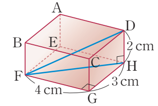
$\overline{DF}>0$이므로 $\overline{DF}=\sqrt{3a^2}=\mathbf{\sqrt{3}a}$

교과서 182 쪽

예 제 1 세 모서리의 길이가 각각 다음과 같은 직육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

(1) 4 cm, 3 cm, 2 cm　　(2) 5 cm, 12 cm, 13 cm

● 풀이 (1) 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 △HFG가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{FH}^2=\overline{FG}^2+\overline{GH}^2=25$

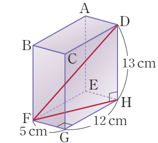
$\overline{FH}>0$이므로 $\overline{FH}=\sqrt{25}=5(cm)$

△DFH가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DF}^2=\overline{FH}^2+\overline{DH}^2=29$

$\overline{DF}>0$이므로 $\overline{DF}=\sqrt{29}(cm)$

(2) 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 △HFG가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{FH}^2=\overline{FG}^2+\overline{GH}^2=169$

$\overline{FH}>0$이므로 $\overline{FH}=\sqrt{169}=13(cm)$

△DFH가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DF}^2=\overline{FH}^2+\overline{DH}^2=338$

$\overline{DF}>0$이므로 $\overline{DF}=\sqrt{338}=13\sqrt{2}(cm)$

답 ● (1) $\sqrt{29}$ cm　(2) $13\sqrt{2}$ cm

문제 1 세 모서리의 길이가 각각 다음과 같은 직육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

(1) 4 cm, 5 cm, 7 cm　　(2) 3 cm, 6 cm, 9 cm

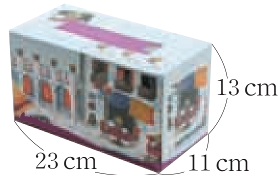
문제 2 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

문제해결　실생활에서 직육면체 모양을 찾아 직육면체의 대각선의 길이를 구하여 보자.

문/제/해/결

|출제 의도| 피타고라스 정리를 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구하여 실생활에 활용할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이|



위와 같은 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{23^2+11^2+13^2}=\sqrt{819}=\mathbf{3\sqrt{91}\,(cm)}$

이다.

교과서 183 쪽

한편 피타고라스 정리를 이용하여 원뿔의 높이와 부피, 각뿔의 높이와 부피도 구할 수 있다.

예 제 2 밑면인 원의 반지름의 길이가 5 cm이고, 모선의 길이가 13 cm인 원뿔의 높이와 부피를 각각 구하여라.

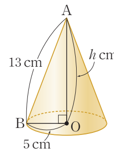
❶ 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 h cm라고 하면 △ABO는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$h^2+5^2=13^2$, $h^2=13^2-5^2=144$

$h>0$이므로 $h=\sqrt{144}=12$

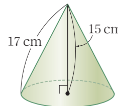
따라서 구하는 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times12=100\pi(\text{cm}^3)$

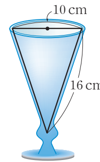


답 ● 높이: 12 cm, 부피: 100π cm^3

문제 3 오른쪽 그림과 같이 모선의 길이가 17 cm이고, 높이가 15 cm인 원뿔의 부피를 구하여라.



문제 4 오른쪽 그림과 같은 유리컵의 안쪽은 밑면인 원의 지름의 길이가 10 cm이고 모선의 길이가 16 cm인 원뿔 모양일 때, 이 컵에 가득 담을 수 있는 물의 부피를 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구하여라. (단, π는 3.14로 계산한다.)



함께 만들어요 **문제 5** 원뿔의 모선의 길이와 밑면인 원의 반지름의 길이를 알 때 원뿔의 부피를 구하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

본문 해설

❶ 밑면인 원의 반지름의 길이와 모선의 길이가 주어졌을 때 원뿔의 높이를 구하려면, 원뿔의 꼭짓점과 밑면인 원의 중심을 지나는 평면으로 잘라서 잘린 면인 이등변삼각형의 높이를 구하면 된다.

3

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.

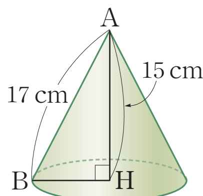
풀이| 오른쪽 그림과 같은 원뿔의 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{BH}^2=17^2-15^2=64$

$\overline{BH}>0$이므로 $\overline{BH}=8(\text{cm})$

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times15=$ **$320\pi(\text{cm}^3)$**



4

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 컵에 가득 담을 수 있는 물의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원뿔의 높이를 h cm라고 하면

$5^2+h^2=16^2$, $h^2=16^2-5^2=231$

$h>0$이므로 $h=\sqrt{231}$ (cm)

따라서 물의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times\sqrt{231}=\frac{25\sqrt{231}\,\pi}{3}$

$=\frac{25\sqrt{231}}{3}\times3.14$

$=397.69\cdots(\text{cm}^3)$

➡ **397.7 cm^3**

5

|출제 의도| 원뿔의 부피를 구하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 피타고라스 정리를 입체도형에 활용할 수 있게 하기 위한 문제이다.

예시| 모선의 길이가 10 cm이고 밑면인 원의 반지름의 길이가 6 cm인 원뿔의 부피를 구하여라.

풀이| 원뿔의 높이는

$\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8(\text{cm})$

따라서 원뿔의 부피는

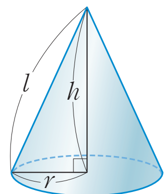
$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8=96\pi(\text{cm}^3)$

지/도/자/료

밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고, 모선의 길이가 l인 원뿔의 높이를 h, 부피를 V라고 하면

$h=\sqrt{l^2-r^2}$

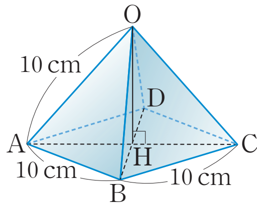
$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$



6

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정사각뿔의 높이와 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이



위의 그림과 같이 주어진 정사각뿔의 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 밑면의 두 대각선의 교점이다. 이때 선분 AC는 한 변의 길이가 10 cm인 정사각형의 대각선이므로

$\overline{AC}=10\sqrt{2}=2\overline{AH}$

$\overline{AH}=5\sqrt{2}(\text{cm})$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}^2=\overline{OA}^2-\overline{AH}^2=10^2-(5\sqrt{2})^2=50$

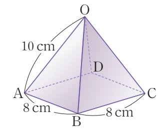
$\overline{OH}>0$이므로 $\overline{OH}=\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}(cm)}$

따라서 정사각뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times10^2\times5\sqrt{2}=\mathbf{\frac{500\sqrt{2}}{3}(cm^3)}$

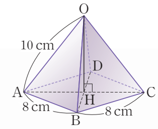
교과서 184 쪽

예제 3 오른쪽 그림과 같은 정사각뿔의 높이와 부피를 각각 구하여라.



이등변삼각형 OAC와 OBD의 꼭짓점 O에서 각 밑변에 내린 수선의 발은 각 밑변의 중점이다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정사각뿔 O−ABCD의 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 밑면의 두 대각선의 교점이다. 이때 선분 AC는 한 변의 길이가 8 cm인 정사각형의 대각선이므로



$\overline{AC}=8\sqrt{2}=2\overline{AH}$에서 $\overline{AH}=4\sqrt{2}(\text{cm})$

직각삼각형 OAH에서 피타고라스 정리에 의하여

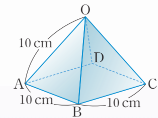
$$\overline{OH}^2=\overline{OA}^2-\overline{AH}^2=10^2-(4\sqrt{2})^2=68$$

$\overline{OH}>0$이므로 $\overline{OH}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}(\text{cm})$

따라서 (부피)$=\frac{1}{3}\times8^2\times2\sqrt{17}=\frac{128}{3}\sqrt{17}(\text{cm}^3)$이다.

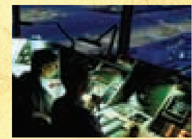
답 ● 높이: $2\sqrt{17}$ cm, 부피: $\frac{128}{3}\sqrt{17}$ cm³

문제 6 오른쪽 그림과 같은 정사각뿔의 높이와 부피를 각각 구하여라.



수학이 만난 **세상 속 직업 이야기**

항공 교통 관제사

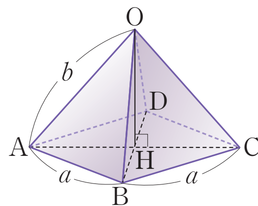


항공 교통 관제사는 비행기의 이착륙을 유도하고, 공항에 진입하는 비행기의 조종사에게 기상 상태를 알려 주며, 이착륙하고 있는 비행기와 공중의 비행기가 서로 충돌하지 않도록 비행기 사이에 적절한 거리를 유지하도록 유도한다. 비행기를 안전하게 이착륙시키기 위한 활주 거리나 하늘에 떠 있는 비행기 사이의 거리는 피타고라스 정리를 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

지/도/자/료

1. 정사각뿔의 높이

오른쪽 그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 a인 정사각형이고, 옆면의 모서리의 길이는 모두 b인 정사각뿔 O−ABCD의 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 정사각형 ABCD의 대각선의 교점이 되므로



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

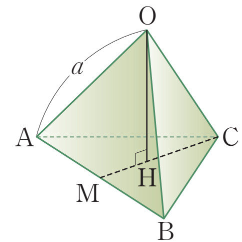
△OAH에서

$\overline{OH}^2=\overline{OA}^2-\overline{AH}^2=b^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=b^2-\frac{a^2}{2}=\frac{2b^2-a^2}{2}$

$\overline{OH}>0$이므로 $\overline{OH}=\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}$

2. 정사면체의 높이

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정사면체 O−ABC의 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 정삼각형 ABC의 무게중심이 되므로



$\overline{CH}=\frac{2}{3}\overline{CM}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

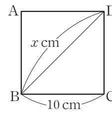
△OHC에서

$\overline{OH}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=a^2$, $\overline{OH}^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=\frac{2}{3}a^2$

$\overline{OH}>0$이므로 $\overline{OH}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

중/단/원 기초

1 오른쪽 그림과 같은 정사각형에서 x의 값을 구하여라.

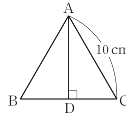


> 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이 h는
> $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

2 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 할 때, 다음을 구하여라.

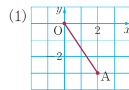
(1) $\overline{BD}$의 길이

(2) △ABC의 높이

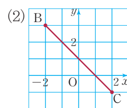


3 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1)



(2)

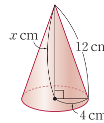


> 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이 l은
> $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

4 세 모서리의 길이가 각각 다음과 같은 직육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

(1) 4 cm, 6 cm, 8 cm　　　(2) 3 cm, 4 cm, 5 cm

5 오른쪽 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 4 cm이고 모선의 길이가 12 cm인 원뿔에서 x의 값을 구하여라.



중/단/원 기초

1

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정사각형의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $10^2+10^2=x^2$, $x^2=200$

$x>0$이므로　$x=\sqrt{200}=\mathbf{10\sqrt{2}}$

2

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정삼각형의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\mathbf{5(cm)}$

(2) △ABD에서

$\overline{AD}=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=\mathbf{5\sqrt{3}(cm)}$

3

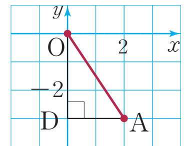
목표| 피타고라스 정리를 활용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{OA}$

$=\sqrt{\overline{OD}^2+\overline{AD}^2}$

$=\sqrt{3^2+2^2}$

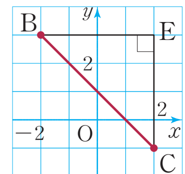
$=\mathbf{\sqrt{13}}$



(2) $\overline{BC}=\sqrt{\overline{EC}^2+\overline{BE}^2}$

$=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}$

$=\mathbf{4\sqrt{2}}$



4

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 대각선의 길이는

(1) $\sqrt{4^2+6^2+8^2}=\sqrt{116}=\mathbf{2\sqrt{29}(cm)}$

(2) $\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}(cm)}$

5

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+4^2=12^2$, $x^2=128$

$x>0$이므로　$x=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

직/업/관/련/자/료　항공 교통 관제사

근무 환경 ● 항공 교통 관제사가 되기 위해서는 반드시 국가에서 발행하는 자격증을 취득해야 한다. 자격증은 일정 자격을 가진 사람에 한해 응시할 수 있으며 자격증을 취득하면 국토 해양부의 공무원 채용 시험에 응시할 수 있고, 채용이 되면 수습 기간을 거쳐 국토 해양부 소속의 공무원 신분으로 업무를 수행하게 된다. 주로 항공 교통 센터의 관제실 및 비행 정보실, 민간 및 군공항의 관제탑, 레이더 관제실, 운항실 등에서 근무한다.

적성 및 능력 ● 항공 교통 관제사는 끊임없이 정보를 받아 이를 바로 이해하고 해석하고 기억해야 하기 때문에 지능과 기억력이 좋아야 한다. 또 소음과 산만한 주위 환경 속에서 자주 신속한 결정을 내려야 하기 때문에 집중력과 판단력이 좋아야 한다. 그리고 모든 업무가 영어로 이루어지므로 일정 수준의 영어 구사 능력도 요구된다.

중/단/원 기본

1

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$이므로

$\overline{BD}=\overline{CD}=5(cm)$

$\overline{AD}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12(cm)$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times10\times12=\mathbf{60(cm^2)}$

(2) $\triangle ABD$에서

$\overline{AD}=\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{225}=15(cm)$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times44\times15=\mathbf{330(cm^2)}$

참고| 직각삼각형의 합동조건

- 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같다.
- 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같다.

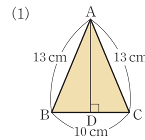
교과서 186 쪽

중/단/원 기본

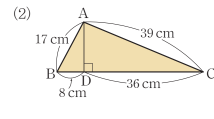
삼각형의 넓이

1 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.

(1)

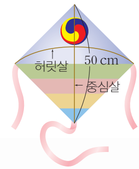


(2)



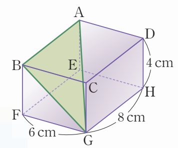
정사각형의 대각선의 길이

2 오른쪽 그림은 재석이가 만든 정사각형 모양의 가오리연이다. 중심살의 길이가 50 cm일 때, 가오리연의 한 변의 길이를 구하여라.



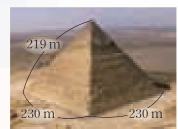
직육면체의 대각선의 길이

3 오른쪽 그림과 같이 세 모서리의 길이가 각각 6 cm, 8 cm, 4 cm인 직육면체에서 $\triangle ABG$의 둘레의 길이를 구하여라.



정사각뿔의 높이

4 이집트에 있는 어떤 피라미드는 밑면은 한 변의 길이가 230 m인 정사각형이고, 옆면의 모서리의 길이는 모두 219 m인 정사각뿔 모양이다. 이 피라미드의 높이를 구하여라. (단, 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구한다.)



2

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정사각형의 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 가오리연의 한 변의 길이를 x cm라고 하면

$x^2+x^2=50^2$, $x^2=1250$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}$

따라서 가오리연의 한 변의 길이는 $\mathbf{25\sqrt{2}}$ **cm**이다.

3

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형에서의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BG}$는 직사각형 BFGC의 대각선의 길이이므로

$\overline{BG}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}(cm)$

$\overline{AG}$는 직육면체의 대각선의 길이이므로

$\overline{AG}=\sqrt{6^2+8^2+4^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}(cm)$

따라서 $\triangle ABG$의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BG}+\overline{AG}=\mathbf{8+2\sqrt{13}+2\sqrt{29}(cm)}$

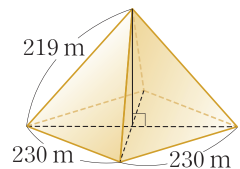
4

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정사각뿔인 피라미드의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 밑면인 정사각형의 대각선의 길이는

$\sqrt{230^2+230^2}=230\sqrt{2}(m)$

따라서 피라미드의 높이는



$\sqrt{219^2-\left(\frac{230\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

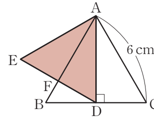
$=\sqrt{219^2-(115\sqrt{2})^2}=\sqrt{47961-26450}$

$=\sqrt{21511}=146.66\cdots(m)$ → **146.7 m**

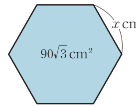
중/단/원 실력

• 먼저 정삼각형 ABC의 높이를 구한다.

1 오른쪽 그림에서 △ABC는 한 변의 길이가 6 cm인 정삼각형이고, △AED는 △ABC의 높이를 한 변의 길이로 하는 정삼각형이다. 이때 △AED의 넓이를 구하여라.

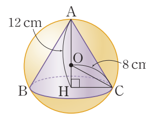


2 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 x cm인 정육각형의 넓이가 $90\sqrt{3}$ cm^2일 때, x의 값을 구하여라.

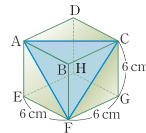


• $\overline{OH}=\overline{AH}-\overline{AO}$

3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 8 cm인 구 모양의 옥돌을 깎아 높이가 12 cm인 원뿔 모양의 옥 장식품을 만들려고 한다. 이때 원뿔 모양의 옥 장식품의 부피를 구하여라.



4 오른쪽 그림과 같은 정육면체를 세 꼭짓점 A, F, C를 지나는 평면으로 잘라 사면체 B-AFC를 만들었다. 이때 꼭짓점 B에서 밑면 AFC에 내린 수선의 길이를 구하여라.



중/단/원 실력

1

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정삼각형 ABC의 높이는

$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$(cm)

△AED는 한 변의 길이가 $3\sqrt{3}$ cm인 정삼각형이므로

△AED의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{3}=\frac{9}{2}$(cm)

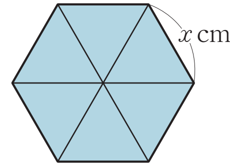
따라서 △AED의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{9}{2}=$ $\mathbf{\frac{27\sqrt{3}}{4}}$ **(cm^2)**

2

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정육각형의 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이|



위의 그림과 같이 정육각형은 합동인 정삼각형 6개로 이루어져 있다. 한편 한 변의 길이가 x cm인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm이므로

넓이는 $\frac{1}{2}\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$($cm^2$)

정육각형의 넓이가 $90\sqrt{3}$ cm^2이므로

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=90\sqrt{3}$, $x^2=60$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{60}=\mathbf{2\sqrt{15}}$

3

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{OH}=12-8=4$(cm)

△OHC에서 $\overline{HC}=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$(cm)

따라서 원뿔 모양의 옥 장식품의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times(4\sqrt{3})^2\times12=$ $\mathbf{192\pi}$ **(cm^3)**

4

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형에서의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AF}=\overline{FC}=\overline{AC}=6\sqrt{2}$(cm)

따라서 △AFC는 한 변의 길이가 $6\sqrt{2}$ cm인 정삼각형이므로 △AFC의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{6}$(cm)

△AFC$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}=18\sqrt{3}$($cm^2$)

꼭짓점 B에서 밑면 AFC에 내린 수선의 길이를 x cm라고 하면 사면체 B-AFC의 부피는

$\frac{1}{3}\times18\sqrt{3}\times x=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times6$

$6\sqrt{3}x=36$, $x=\frac{36}{6\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 수선의 길이는 $\mathbf{2\sqrt{3}}$ **cm**이다.

수행 과제

● 수행 과제 의도

과제 1 _예시

- 피타고라스의 수 **5**, **12**, **13**은 다음과 같이 사각수를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\underbrace{\underbrace{1+3+5+\cdots+21+23}_{12^2}+\underbrace{25}_{25=5^2}}_{13^2}$$

- 피타고라스의 수 **7**, **24**, **25**도 다음과 같이 사각수를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\underbrace{\underbrace{1+3+5+\cdots+45+47}_{24^2}+\underbrace{49}_{49=7^2}}_{25^2}$$

교과서 188 쪽

수 행 과 제

사각수로부터 얻을 수 있는 피타고라스의 수

피타고라스

유클리드

피타고라스 정리는 피타고라스(Pythagoras : ?B.C. 569～?B.C. 475) 이전에 이미 발견되었으며, 이 정리가 성립함을 설명한 역사의 기록은 유클리드(Euclid : ?B.C. 325～?B.C. 265)가 한 것이라는 견해도 있지만 피타고라스에 관한 기록이 남아 있지 않아 확실한 것은 알 수 없다.

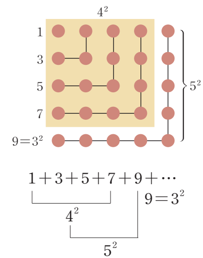
그런데 피타고라스 정리는 사각수로부터 얻어졌다는 학설도 있다. 사각수란 정사각형이 되도록 배열한 물건의 수를 뜻하며 1부터 홀수를 차례로 더한 결과는 제곱수이므로 사각수이다.

$a^2+b^2=c^2$을 만족시키는 세 자연수 a, b, c를 피타고라스의 수라고 하며, 3, 4, 5는 사각수로부터 얻을 수 있는 피타고라스의 수이다. 즉,

$$1+3+5+7=4^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$1+3+5+7+9=5^2 \quad \cdots\cdots ②$$

이고, ①에 $9=3^2$을 더하면 ②에서 5^2이 되어 $4^2+3^2=5^2$을 만족시킨다.



$$\underbrace{\underbrace{1+3+5+7}_{4^2}+\underbrace{9}_{9=3^2}}_{5^2}+\cdots$$

과제 1 사각수로부터 얻을 수 있는 피타고라스의 수를 2가지 찾아라.

과제 2 피타고라스 정리가 사각수로부터 얻어졌다는 학설은 어느 정도 일반성을 가지고 있지만 직각삼각형의 긴 두 변의 길이의 차가 1인 특수한 경우에 한한 것이었다. 사각수를 이용하여 구할 수 없는 피타고라스의 수를 2가지 찾아라.

교과서 189 쪽

학습에 대한 자/기/평/가

이름: ____________

점검 항목				
학습 내용	피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있는가?			
	피타고라스 정리를 평면도형에 활용할 수 있는가?			
	피타고라스 정리를 입체도형에 활용할 수 있는가?			
	피타고라스 정리를 실생활 문제에 활용할 수 있는가?			
학습 태도	학습 준비물을 잘 준비하였는가?			
	수업 시간에 적극적으로 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			

재미있었거나 어려웠던 내용 적어 보기

더 알고 싶거나 궁금한 점 적어 보기

스스로 평가하기

선생님 의견

과제 2 _예시

- 피타고라스의 수 **6**, **8**, **10**은 다음과 같이 사각수의 성질을 만족시키지 않는다.

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11}_{6^2}+\underbrace{13}_{13\neq 8^2}$$

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15}_{8^2}+\underbrace{17}_{17\neq 6^2}$$

- 피타고라스의 수 **8**, **15**, **17**도 다음과 같이 사각수의 성질을 만족시키지 않는다.

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15}_{8^2}+\underbrace{17}_{17\neq 15^2}$$

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+27+29}_{15^2}+\underbrace{31}_{31\neq 8^2}$$

교과서 190 쪽

V. 피타고라스 정리

대단원 핵심 한눈에 보기

① 피타고라스 정리

피타고라스 정리	직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$
직각삼각형이 되는 조건	세 변의 길이가 각각 a, b, c인 △ABC에서 $a^2+b^2=c^2$ 이 성립하면 △ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형이다.

② 피타고라스 정리의 평면도형에의 활용

직사각형의 대각선의 길이	(1) 가로, 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 대각선의 길이 l은 $l=\sqrt{a^2+b^2}$ (2) 한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이 l은 $l=\sqrt{2}\,a$
정삼각형의 높이	한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이 h는 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

③ 피타고라스 정리의 입체도형에의 활용

직육면체의 대각선의 길이	(1) 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이 l은 $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (2) 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 대각선의 길이 l은 $l=\sqrt{3}\,a$

이번 단원에서 배운 용어와 기호

• 피타고라스 정리

지도 내용

1. 피타고라스 정리와 직각삼각형이 되는 조건을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있도록 한다.

2. 피타고라스 정리를 활용하여 평면도형에서의 선분의 길이, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리, 입체도형에서의 선분의 길이와 높이를 구할 수 있도록 한다.

교과서 191 쪽

만화로 보는 수학 이야기

사다리의 길이는?

생각 키/우/기 | 공주는 필요한 사다리의 길이를 어떻게 구하였는지 말하여 보자.

만화로 보는 수학 이야기

만화에서는 사다리를 빗변으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하여 사다리의 길이를 구할 수 있음을 보여 준다.

생각 키/우/기

사다리의 길이를 직각삼각형의 빗변의 길이, 강의 폭과 탑의 높이를 직각을 낀 두 변의 길이라고 하면 피타고라스 정리를 이용하여 사다리의 길이를 구할 수 있다.

$(\text{사다리의 길이})^2=(\text{강의 폭})^2+(\text{탑의 높이})^2$

$=5^2+12^2=169=13^2$

따라서 필요한 사다리의 길이는 13 m이다.

대/단/원 평가 문제

1

목표| 피타고라스 정리를 이해하게 한다.

풀이| 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는
$56-27=29(cm^2)$

답 ①

2

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

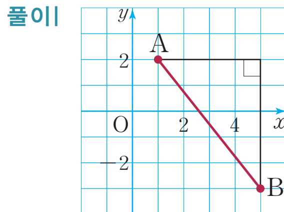
풀이| $\overline{BC}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}(cm)$

답 ②

3

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이|



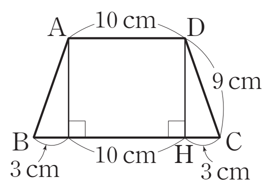
$\overline{AB}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$

답 ①

4

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 등변사다리꼴의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{HC}=3(cm)$이므로 등변사다리꼴의 높이는
$\overline{DH}=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}$
$=6\sqrt{2}(cm)$



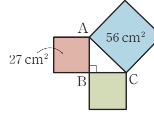
답 ③

교과서 192 쪽

대/단/원 평가 문제

선/택/형

1 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 각각 27 cm², 56 cm²일 때, $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는?



① 29 cm² ② 45 cm² ③ 51 cm²
④ 67 cm² ⑤ 83 cm²

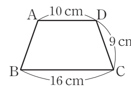
2 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC에서
$\overline{AB}=5$ cm, $\overline{AC}=2$ cm
일 때, $\overline{BC}$의 길이는?

① 3 cm ② $\sqrt{21}$ cm ③ $3\sqrt{3}$ cm
④ $3\sqrt{5}$ cm ⑤ $3\sqrt{7}$ cm

3 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(5, −3) 사이의 거리는?

① $\sqrt{41}$ ② $\sqrt{42}$ ③ $\sqrt{43}$
④ $2\sqrt{11}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

4 오른쪽 그림과 같은 등변사다리꼴 ABCD의 높이는?

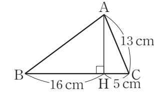


① $4\sqrt{2}$ cm ② $5\sqrt{2}$ cm ③ $6\sqrt{2}$ cm
④ $5\sqrt{3}$ cm ⑤ $6\sqrt{3}$ cm

5 △ABC의 세 변의 길이가 각각 다음과 같을 때, 직각삼각형인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

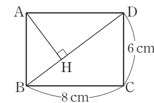
① 5, 5, $5\sqrt{2}$ ② 6, 8, 11
③ 5, 12, 13 ④ 7, 8, 9
⑤ 10, 10, $10\sqrt{3}$

6 다음 그림과 같은 △ABC에서 $\overline{AB}$의 길이는?



① 16 cm ② 17 cm ③ 18 cm
④ 19 cm ⑤ 20 cm

7 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 8 cm, 6 cm인 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{AH}$의 길이는?



① $\frac{23}{10}$ cm ② $\frac{12}{5}$ cm ③ $\frac{27}{10}$ cm
④ $\frac{43}{15}$ cm ⑤ $\frac{24}{5}$ cm

5

목표| 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있게 한다.

풀이| ① $5^2+5^2=50=(5\sqrt{2})^2$
② $6^2+8^2=100\neq11^2$
③ $5^2+12^2=169=13^2$
④ $7^2+8^2=113\neq9^2$
⑤ $10^2+10^2=200\neq(10\sqrt{3})^2$

답 ①, ③

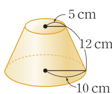
6

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △AHC와 △ABH는 직각삼각형이므로
$\overline{AH}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12(cm)$
$\overline{AB}=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{400}=20(cm)$

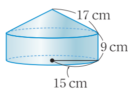
답 ⑤

8 오른쪽 그림과 같은 원뿔대의 높이는?



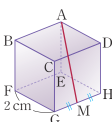
① 7 cm ② 8 cm
③ $\sqrt{119}$ cm ④ $2\sqrt{30}$ cm
⑤ $3\sqrt{17}$ cm

9 오른쪽 그림과 같은 입체도형의 부피는?



① $1025\pi\ cm^3$ ② $1275\pi\ cm^3$
③ $2625\pi\ cm^3$ ④ $3075\pi\ cm^3$
⑤ $3825\pi\ cm^3$

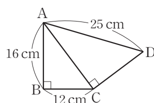
10 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2 cm인 정육면체에서 $\overline{GH}$의 중점을 M이라고 할 때, $\overline{AM}$의 길이는?



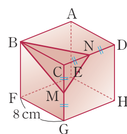
① 2 cm ② 3 cm ③ 4 cm
④ 5 cm ⑤ 6 cm

서/답/형

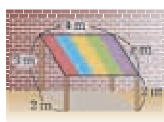
11 다음 그림에서 $\overline{CD}$의 길이를 구하여라.



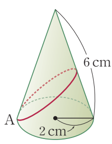
12 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8 cm인 정육면체에서 $\overline{CG}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, △BMN의 넓이를 구하여라.



|서술형|
13 혜진이네는 주차장을 만들기 위하여 다음 그림과 같이 담 옆에 4 m의 폭으로 직사각형 모양의 차양을 치려고 한다. 이때 x의 값과 차양을 만드는 데 필요한 천의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서술형|
14 오른쪽 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 2 cm이고, 모선의 길이가 6 cm인 원뿔이 있다. 이 밑면의 원주 위의 한 점 A에서 옆면을 한 바퀴 돌아 다시 점 A로 오는 최단 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



7

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △ABD는 직각삼각형이므로

$\overline{BD}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10(cm)$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24(cm^2)$

한편 $\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AH}$이므로

$24=\frac{1}{2}\times 10\times\overline{AH}$, $24=5\overline{AH}$

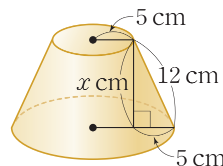
$\overline{AH}=\frac{24}{5}(cm)$

답 ⑤

8

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔대의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원뿔대의 높이를 x cm라고 하면



$x=\sqrt{12^2-5^2}$

$=\sqrt{119}$

따라서 원뿔대의 높이는 $\sqrt{119}$ cm이다.

답 ③

9

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원기둥의 부피는

$\pi\times 15^2\times 9=2025\pi(cm^3)$

원뿔의 높이는

$\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{64}=8(cm)$

원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times 15^2\times 8=600\pi(cm^3)$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$2025\pi+600\pi=2625\pi(cm^3)$

답 ③

10

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형에서 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △EMH는 직각삼각형이므로

$\overline{EM}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}(cm)$

△AEM은 직각삼각형이므로

$\overline{AM}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9}=3(cm)$

답 ②

11

목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △ABC는 직각삼각형이므로

$\overline{AC}=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{400}=20(\text{cm})$

△ACD는 직각삼각형이므로

$\overline{CD}=\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{225}=15(\text{cm})$

답 15 cm

12

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형에서의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 M, N이 각각 $\overline{CG}$, $\overline{CD}$의 중점이므로

$\overline{CM}=\overline{CN}=4(\text{cm})$

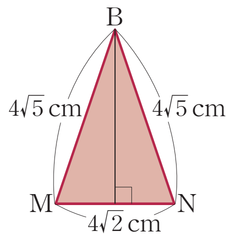
△BCM과 △BCN에서

$\overline{BM}=\overline{BN}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}(\text{cm})$

△CMN에서

$\overline{MN}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}(\text{cm})$

따라서 △BMN은 오른쪽 그림과 같은 이등변삼각형이므로 이 삼각형의 높이는



$\sqrt{(4\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{72}$

$=6\sqrt{2}(\text{cm})$

$\triangle BMN=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}$

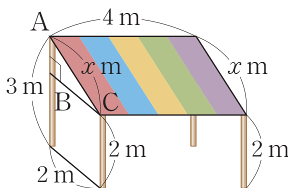
$=24(\text{cm}^2)$

답 24 cm²

13

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 천의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이|



위의 그림에서 △ABC는 직각삼각형이고

$\overline{AB}=1\text{ m}$ …㉠

$\overline{BC}=2\text{ m}$ …㉡

$\overline{AC}=x\text{ m}$

이므로

$x=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

따라서 필요한 천의 넓이는 $4\sqrt{5}\text{ m}^2$이다. …㉢

답 $x=\sqrt{5}$, 천의 넓이: $4\sqrt{5}\text{ m}^2$

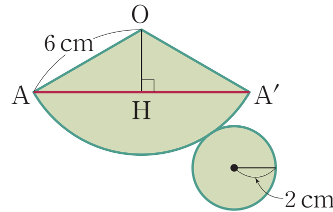
채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\overline{AB}$의 길이 구하기	㉠	30%
	$\overline{BC}$의 길이 구하기	㉡	30%
답 구하기	x의 값과 천의 넓이 구하기	㉢	40%

14

목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형에서의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이|



구하는 최단 거리는 위의 전개도에서 $\overline{AA'}$의 길이와 같다. 한편 $\overset{\frown}{AA'}$의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times6\times\dfrac{\angle AOA'}{360^\circ}=2\pi\times2$

$\angle AOA'=120^\circ$

$\angle AOH=60^\circ$ …㉠

$\overline{AH}$는 한 변의 길이가 6 cm인 정삼각형의 높이와 같으므로

$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}(\text{cm})$ …㉡

따라서 구하는 최단 거리는

$\overline{AA'}=2\overline{AH}=6\sqrt{3}(\text{cm})$ …㉢

답 $6\sqrt{3}$ cm

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	∠AOH의 크기 구하기	㉠	40%
	$\overline{AH}$의 길이 구하기	㉡	40%
답 구하기	최단 거리 구하기	㉢	20%

교과서 194 쪽

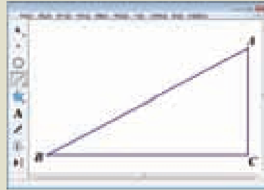
컴퓨터의 활용

컴퓨터로 피타고라스 정리를 확인하여 보자.

도형과 관련된 적절한 프로그램을 이용하여 직각삼각형에서 피타고라스 정리가 성립함을 확인하여 보자.

1 **$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형을 그려 보자.**

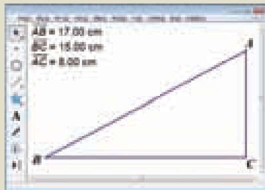
아이콘 을 클릭하여 $\overline{BC}$를 그린 후, 점 C를 클릭하고 키보드에서 ⇧Shift 를 누르면서 마우스를 $\overline{BC}$와 수직인 방향으로 움직여 $\overline{CA}$를 그린다. 이제 $\overline{AB}$를 그리면 $\triangle ABC$는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이 된다.

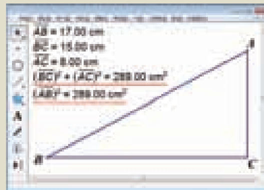


2 **$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$과 $\overline{AB}^2$의 값을 각각 구하고, 비교하여 보자.**

아이콘 을 선택한 후 메뉴에서 [측정] – [길이]를 클릭하여 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$의 길이를 구한 후, [수] – [계산]을 클릭하여 계산식을 적고 확인을 누르면 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$과 $\overline{AB}^2$의 값이 구해진다.

이때 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$임을 확인할 수 있다. 즉, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리가 성립함을 알 수 있다.





교과서 195 쪽

수학 산책

피타고라스도 모르는 말도 안 되는 이야기

라이[●]–타고라스는 피타고라스가 피타고라스 정리로 유명해진 것을 부러워하고 있었다. 그러던 중 그는 '내가 피타고라스 정리보다 더 쉬운 정리를 만들면 나도 피타고라스처럼 유명해질 수 있을 거야.' 라고 생각하였다. 그래서 피타고라스 정리보다 더 쉬운 정리가 없을지 고민하다 다음과 같은 생각을 하게 되었다.

세 수 3, 4, 5는 피타고라스 정리를 만족시키는 동시에 $3^2=4+5$이다. 또 피타고라스 정리를 만족시키는 세 수 5, 12, 13과 7, 24, 25도 각각 $5^2=12+13$, $7^2=24+25$를 만족시킨다는 것을 알고는 세 수 사이의 관계식을 찾았다고 생각하였다. 그래서 자신의 이름을 붙여 다음과 같은 정리를 만들었다.

> 라이–타고라스 정리
> 피타고라스 정리를 만족시키는 세 수 중에서 가장 작은 수를 제곱한 것은 나머지 두 수의 합과 같다. 즉, a, b, c가 피타고라스 정리를 만족시키고 a가 가장 작은 수이면
> $$a^2=b+c$$

그리고 자신이 잘 아는 수학자에게 달려가 이 정리에 대해 말하고 문제가 없는지 물었다. 하지만 6, 8, 10의 경우 $10^2=6^2+8^2$이지만 $6^2\neq10+8$이기 때문에 이 정리는 옳지 않다며 수학자는 웃었다.

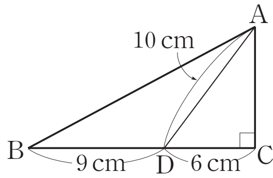
● lie: 거짓말

선/택/형

1 세 변의 길이가 각각 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형이 아닌 것은? [5점]

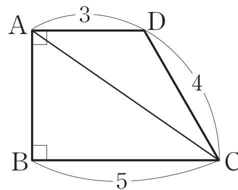
① 3, 4, 5 ② 5, 8, 9
③ 5, 12, 13 ④ 6, 8, 10
⑤ 6, 9, $3\sqrt{13}$

2 다음 그림에서 $\overline{AB}$의 길이는? [5점]



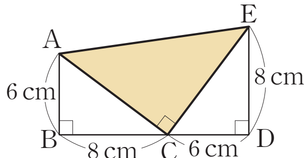
① 14 cm ② 15 cm ③ 16 cm
④ 17 cm ⑤ 20 cm

3 오른쪽 그림의 □ABCD에서 대각선 AC의 길이는? [5점]



① $\sqrt{35}$ ② 6
③ $\sqrt{37}$ ④ $\sqrt{38}$
⑤ $\sqrt{39}$

4 다음 그림에서 두 직각삼각형 ABC, CDE가 합동일 때, 삼각형 ACE의 넓이는? [5점]



① 48 cm^2 ② 50 cm^2 ③ 52 cm^2
④ 54 cm^2 ⑤ 56 cm^2

5 넓이가 $25\sqrt{3}$ cm^2인 정삼각형의 둘레의 길이는? [6점]

① $15\sqrt{3}$ cm ② $20\sqrt{3}$ cm ③ 30 cm
④ 50 cm ⑤ 150 cm

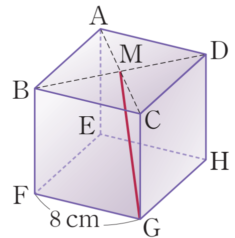
6 좌표평면 위에서 두 점 A$(-2,\ 2)$와 B$(5,\ -1)$ 사이의 거리는? [5점]

① 3 ② 4 ③ 7
④ $\sqrt{51}$ ⑤ $\sqrt{58}$

7 세 모서리의 길이가 3 cm, 3 cm, 6 cm인 직육면체의 대각선의 길이는? [5점]

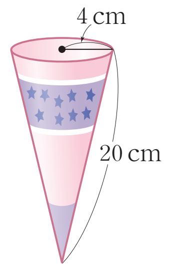
① 3 cm ② $2\sqrt{3}$ cm ③ $2\sqrt{6}$ cm
④ 6 cm ⑤ $3\sqrt{6}$ cm

8 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8 cm인 정육면체에서 면 ABCD의 대각선의 교점을 M이라고 할 때, $\overline{MG}$의 길이는? [6점]



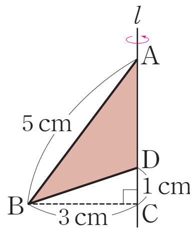
① $2\sqrt{6}$ cm ② $4\sqrt{6}$ cm ③ $6\sqrt{6}$ cm
④ $8\sqrt{6}$ cm ⑤ $10\sqrt{6}$ cm

9 오른쪽 그림과 같이 원뿔을 거꾸로 한 모양의 아이스크림콘이 있다. 밑면인 원의 반지름의 길이가 4 cm이고, 모선의 길이가 20 cm일 때, 이 아이스크림콘의 부피는? [5점]



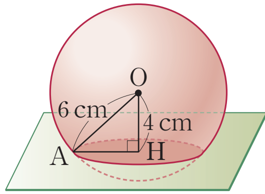
① $\frac{128\sqrt{6}}{3}\pi$ cm^3 ② $43\sqrt{6}\pi$ cm^3
③ $\frac{130\sqrt{6}}{3}\pi$ cm^3 ④ $\frac{131\sqrt{6}}{3}\pi$ cm^3
⑤ $44\sqrt{6}\pi$ cm^3

10 오른쪽 그림에서 색칠한 부분을 직선 l을 축으로 하여 1회 전시켰을 때 생기는 입체도형의 부피는? [6점]



① $\frac{26}{3}\pi\ \text{cm}^3$ ② $9\pi\ \text{cm}^3$
③ $\frac{28}{3}\pi\ \text{cm}^3$ ④ $\frac{29}{3}\pi\ \text{cm}^3$ ⑤ $10\pi\ \text{cm}^3$

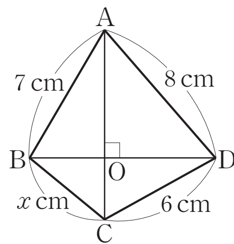
11 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 6 cm인 구를 중심 O에서 4 cm 떨어진 지점에서 $\overline{OH}$와 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면인 원의 넓이를 구하여라. [7점]



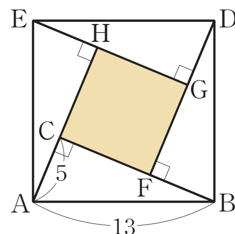
① $10\pi\ \text{cm}^2$ ② $20\pi\ \text{cm}^2$ ③ $30\pi\ \text{cm}^2$
④ $40\pi\ \text{cm}^2$ ⑤ $50\pi\ \text{cm}^2$

서/답/형

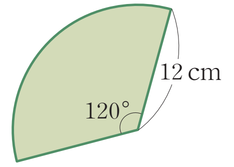
12 오른쪽 그림과 같은 사각형 ABCD에서 x의 값을 구하여라. [7점]



13 오른쪽 그림은 합동인 4개의 직각삼각형을 이용하여 정사각형을 만든 것이다. 정사각형 CFGH의 넓이를 구하여라. [7점]

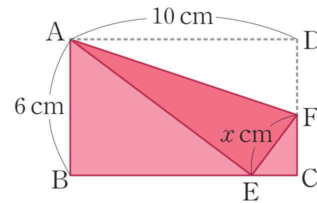


14 오른쪽 그림은 원뿔의 옆면을 펼쳐 놓은 것이다. 이 원뿔의 높이를 구하여라. [7점]



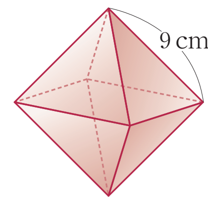
|서술형|

15 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 D를 $\overline{BC}$ 위의 점 E에 오도록 접었을 때, x의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [9점]



|서술형|

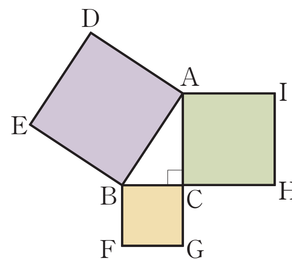
16 정팔면체는 합동인 2개의 사각뿔로 나눌 수 있다. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 9 cm인 정팔면체의 부피를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [10점]



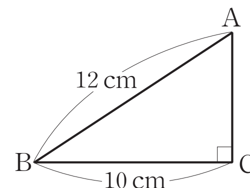
60점 미만이면 **하 · 수준** 문제를, 60점 이상 80점 미만이면 **중 · 수준** 문제를, 80점 이상이면 **상 · 수준** 문제를 풀어 보세요.

하·수준

1 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형이 있다.
□ADEB$=36$ cm^2, □BFGC$=11$ cm^{2}일 때, □ACHI의 넓이를 구하여라.



2 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서
$\overline{AB}=12$ cm, $\overline{BC}=10$ cm
일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.

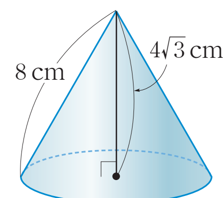


3 삼각형의 세 변의 길이가 각각 다음과 같을 때, 직각삼각형인 것을 모두 찾아라.

㉠ 2, 2, 3	㉡ $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$
㉢ 2, 3, $\sqrt{10}$	㉣ 5, 12, 13

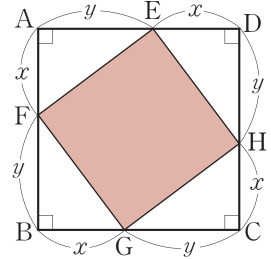
4 대각선의 길이가 $5\sqrt{2}$ cm인 정사각형의 넓이를 구하여라.

5 오른쪽 그림과 같이 모선의 길이가 8 cm이고, 높이가 $4\sqrt{3}$ cm인 원뿔의 부피를 구하여라.

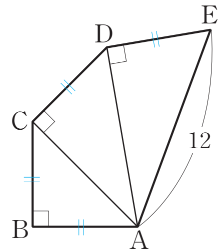


중·수준

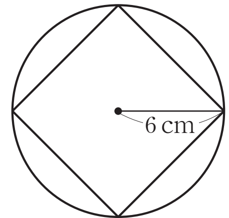
1 오른쪽 그림에서 $x^2+y^2=225$일 때, □EFGH의 넓이를 구하여라.



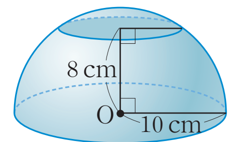
2 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.



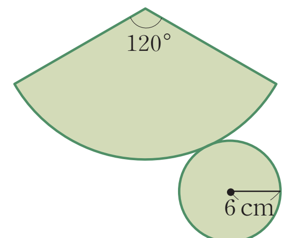
3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 6 cm인 원에 내접하고 있는 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



4 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10 cm인 반구를 중심 O에서 8 cm 떨어진 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이를 구하여라.

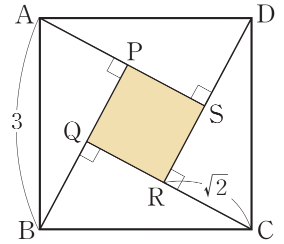


5 오른쪽 그림과 같은 전개도로 만든 원뿔의 부피를 구하여라.

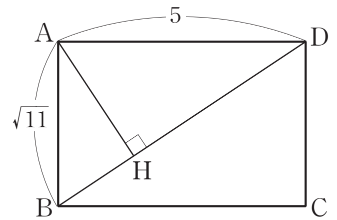


상 · 수준

1 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD에서 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=\sqrt{2}$일 때, □PQRS의 넓이를 구하여라.

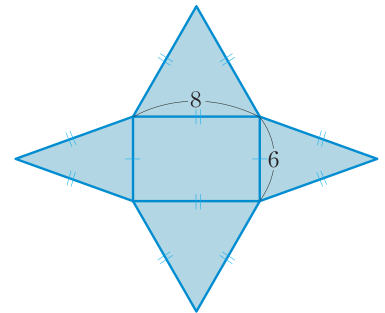


2 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 5, $\sqrt{11}$인 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{AH}$의 길이를 구하여라.

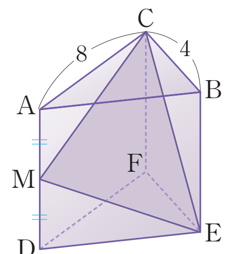


3 직각삼각형의 두 변의 길이가 각각 8 cm, 15 cm일 때, 나머지 한 변의 길이를 모두 구하여라.

4 오른쪽 그림과 같은 전개도로 만들어지는 사각뿔의 부피를 구하여라.



5 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서 점 M은 $\overline{AD}$의 중점이다. △CME가 정삼각형일 때, 이 삼각기둥의 부피를 구하여라.



1 목표| 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있게 한다.

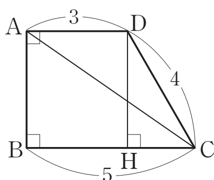
풀이| ② $5^2+8^2=25+64=89\neq9^2$ 답 ②

2 목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △ADC에서 $\overline{AC}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8(\text{cm})$
△ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{15^2+8^2}=17(\text{cm})$ 답 ④

3 목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{DH}=\sqrt{4^2-(5-3)^2}$
$=2\sqrt{3}$
$\overline{AC}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{37}$ 답 ③

4 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

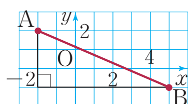
풀이| $\overline{AC}=\overline{CE}=\sqrt{6^2+8^2}=10(\text{cm})$이므로
△ACE의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10\times10=50(\text{cm}^2)$ 답 ②

5 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정삼각형의 둘레의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정삼각형의 한 변의 길이를 a cm라고 하면
높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ cm이므로 넓이는
$\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=25\sqrt{3}(\text{cm}^2)$, $a=10$
따라서 정삼각형의 둘레의 길이는 $3\times10=30(\text{cm})$
답 ③

6 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$
답 ⑤



7 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{3^2+3^2+6^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}(\text{cm})$ 답 ⑤

8 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{8^2+8^2}=4\sqrt{2}(\text{cm})$
$\overline{MG}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+8^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}(\text{cm})$ 답 ②

9 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 아이스크림콘의 높이는 $\sqrt{20^2-4^2}=8\sqrt{6}$
따라서 아이스크림콘의 부피는
$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times8\sqrt{6}=\frac{128\sqrt{6}}{3}\pi(\text{cm}^3)$ 답 ①

10 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AC}=\sqrt{5^2-3^2}=4(\text{cm})$
따라서 구하는 입체도형의 부피는
$\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4-\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times1=9\pi(\text{cm}^3)$ 답 ②

11 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AH}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}(\text{cm})$
따라서 단면인 원의 넓이는
$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi(\text{cm}^2)$ 답 ②

12 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$이므로
$7^2+6^2=x^2+8^2$, $x=\sqrt{21}$ 답 $\sqrt{21}$

13 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BC}=\sqrt{13^2-5^2}=12$이므로 $\overline{CF}=12-5=7$
$\square CFGH=\overline{CF}^2=49$ 답 49

14 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 밑면인 원의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

$2\pi\times12\times\frac{120°}{360°}=2\pi r,\ r=4$

따라서 원뿔의 높이는 $\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$(cm)

답 $8\sqrt{2}$ cm

15 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AE}=\overline{AD}=10$(cm)

$\overline{BE}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$(cm) …㉠

$\overline{BC}=10$(cm)이므로 $\overline{EC}=10-8=2$(cm) …㉡

$\overline{DF}=\overline{EF}=x$(cm)이므로 $\overline{FC}=6-x$(cm)

$x^2=(6-x)^2+2^2,\ x=\frac{10}{3}$ …㉢

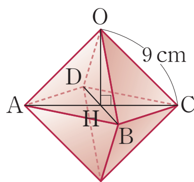
답 $\frac{10}{3}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\overline{BE}$의 길이 구하기	㉠	4점
	$\overline{EC}$의 길이 구하기	㉡	2점
답 구하기	x의 값 구하기	㉢	3점

16 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정팔면체의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$(cm)



△OHC에서

$\overline{OH}=\sqrt{9^2-\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$=\frac{9\sqrt{2}}{2}$(cm) …㉠

사각뿔 O-ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times9^2\times\frac{9\sqrt{2}}{2}=\frac{243\sqrt{2}}{2}$(cm^3) …㉡

따라서 구하는 정팔면체의 부피는

$2\times\frac{243\sqrt{2}}{2}=243\sqrt{2}$(cm^3) …㉢

답 $243\sqrt{2}$ cm^3

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\overline{OH}$의 길이 구하기	㉠	4점
	사각뿔의 부피 구하기	㉡	4점
답 구하기	정팔면체의 부피 구하기	㉢	2점

하·수준

1 목표| 피타고라스 정리를 이해하게 한다.

풀이| □ACHI$=36-11=25$(cm^2) 답 25 cm^2

2 목표| 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AC}=\sqrt{12^2-10^2}=2\sqrt{11}$(cm) 답 $2\sqrt{11}$ cm

3 목표| 삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 직각삼각형임을 판별할 수 있게 한다.

풀이| ㉡ $(\sqrt{5})^2+(\sqrt{6})^2=(\sqrt{11})^2$

㉣ $5^2+12^2=13^2$ 답 ㉡, ㉣

4 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정사각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정사각형의 한 변의 길이를 a cm라고 하면

$\sqrt{2}a=5\sqrt{2},\ a=5$

따라서 구하는 정사각형의 넓이는 $5\times5=25$(cm^2)

답 25 cm^2

5 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 밑면인 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{8^2-(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$(cm)

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times4\sqrt{3}=\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$(cm^3) 답 $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^3

중·수준

1 목표| 피타고라스 정리를 이해하게 한다.

풀이| □EFGH는 정사각형이므로 그 넓이는

$\overline{EF}^2=x^2+y^2=225$ 답 225

2 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}=x$라고 하면

$\overline{AC}^2=x^2+x^2=2x^2,\ \overline{AD}^2=2x^2+x^2=3x^2$

$\overline{AE}=\sqrt{3x^2+x^2}=2x=2\overline{AB}=12,\ \overline{AB}=6$

답 6

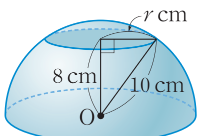
3 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 정사각형의 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정사각형의 대각선의 길이는 12 cm이므로 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면

$\sqrt{2}x=12$, $x=\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ 답 $6\sqrt{2}$ cm

4 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 단면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 $r=\sqrt{10^2-8^2}=6$



따라서 구하는 단면의 넓이는

$\pi\times6^2=36\pi(\text{cm}^2)$ 답 36π cm^2

5 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 원뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원뿔의 모선의 길이를 r cm라고 하면 밑면의 둘레의 길이는 부채꼴의 호의 길이와 같으므로

$2\pi\times6=2\pi\times r\times\dfrac{120^\circ}{360^\circ}$, $r=18$

원뿔의 높이는 $\sqrt{18^2-6^2}=\sqrt{288}=12\sqrt{2}(\text{cm})$

따라서 원뿔의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times\pi\times6^2\times12\sqrt{2}=144\sqrt{2}\pi(\text{cm}^3)$ 답 $144\sqrt{2}\pi$ cm^3

상·수준

1 목표| 피타고라스 정리를 이해하게 한다.

풀이| △APB≡△BQC≡△CRD≡△DSA이므로 □PQRS는 정사각형이다.

$\overline{PQ}=\overline{BP}-\overline{BQ}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}-\sqrt{2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

$\square PQRS=\overline{PQ}^2=(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2=9-2\sqrt{14}$

답 $9-2\sqrt{14}$

2 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BD}=\sqrt{5^2+(\sqrt{11})^2}=\sqrt{36}=6$

△ABD의 넓이에서 $\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times5\times\sqrt{11}$

$\overline{AH}=\dfrac{5\sqrt{11}}{6}$ 답 $\dfrac{5\sqrt{11}}{6}$

3 목표| 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 변의 길이를 x cm라고 하면

가장 긴 변의 길이가 15 cm일 때

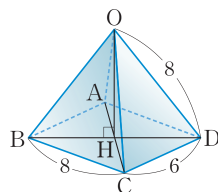
$x=\sqrt{15^2-8^2}=\sqrt{161}$

가장 긴 변의 길이가 x cm일 때

$x=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17$ 답 $\sqrt{161}$ cm, 17 cm

4 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 사각뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 전개도로 사각뿔을 만들면 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{HD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6^2+8^2}=5$

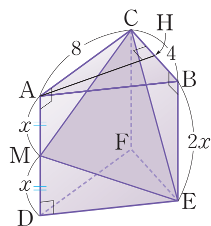
$\overline{OH}=\sqrt{8^2-5^2}=\sqrt{39}$

따라서 구하는 사각뿔의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times8\times6\times\sqrt{39}=16\sqrt{39}$ 답 $16\sqrt{39}$

5 목표| 피타고라스 정리를 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AM}=\overline{DM}=x$라고 하자. △CME가 정삼각형이므로 $\overline{CM}^2=\overline{EC}^2$에서



$8^2+x^2=(2x)^2+4^2$, $x=4$

$\overline{CM}=\overline{ME}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$

△MDE에서

$(4\sqrt{5})^2=4^2+\overline{DE}^2$, $\overline{DE}=8$

$\overline{AB}=\overline{DE}=8$이므로 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. 따라서 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{BH}=\overline{CH}=2$

△ABH에서 $\overline{AH}=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{15}=4\sqrt{15}$

따라서 삼각기둥의 부피는 $4\sqrt{15}\times8=32\sqrt{15}$

답 $32\sqrt{15}$

미니 당구 게임

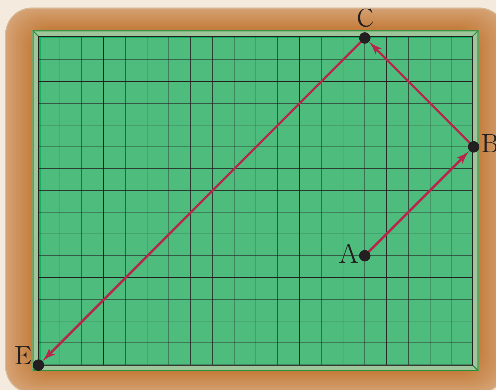
두 사람이 다음과 같은 미니 당구 게임을 하여 보아라.

준비물

미니 당구대

게임 방법

① 미니 당구대에 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 같은 격자를 그린다.
② 미니 당구대의 왼쪽 아래 모서리에 끝 점 E를 표시한다.
③ 두 사람이 가위바위보를 하여 이긴 사람이 먼저 원하는 격자점에 당구공을 놓는다.
④ 당구공을 쳐서 공이 왼쪽 변을 제외한 세 변 중 두 변 이상을 치고 끝 점 E에 도착하면 이긴다.



수행 과제 ● 1. 위의 그림과 같이 공이 A지점에서 시작하여 B와 C를 거쳐 끝 점 E에 도착하였을 때, 이 공이 움직인 거리를 구하여 보자. (단, 격자의 가로, 세로의 길이는 1이다.)
2. 적당한 격자점에 당구공을 놓고 칠 때, 공이 각 변을 친 위치를 표시하고 공이 움직인 거리를 구하여 보자.

수행 과제 ●

1. $\overline{AB}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
$\overline{BC}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
$\overline{CE}=\sqrt{15^2+15^2}=\sqrt{450}=15\sqrt{2}$
따라서 공이 움직인 거리는
$5\sqrt{2}+5\sqrt{2}+15\sqrt{2}=25\sqrt{2}$

2. 피타고라스 정리를 이용하면 공이 움직인 거리를 구할 수 있다.

기우(杞憂)와 우주

'경기에 질 것이라는 걱정은 기우에 지나지 않았다.'와 같이 '기우'는 불필요한 걱정을 한다는 의미이다. 그런데 기우(杞憂)는 기인지우(杞人之憂)를 줄인 말로 글자 그대로 풀면 '기(杞)나라 사람의 근심'이라는 뜻이다. '기나라 사람의 근심'이 왜 불필요한 걱정이 되었을까? "열자(列子)"의 '천서편(天瑞篇)'에는 다음과 같은 이야기가 있다.

옛날 기나라에 하늘과 땅이 무너져 내려앉으면 어떻게 할 것인가를 늘 근심하는 사람이 있었다. 그 사람의 걱정이 어찌나 심했던지 잠도 못 자고 밥도 먹지 못할 정도였다. 어느 날 그의 친구가 이를 딱하게 지켜보다가 말하였다.

"하늘은 기운이 쌓여 이루어진 것이며 기운은 어느 곳이나 있다네. 우리가 몸을 굽혔다 펴고, 숨을 들이마셨다 내쉬는 모든 것들이 이런 하늘 속에서 하는 일이라네. 그런데 어찌하여 하늘이 무너져 내릴 것을 근심하고 있는가?"

그러자 그 사람이 말했다.

"하늘이 과연 기운이 쌓여 이루어진 것이라면, 해와 달과 별들이 떨어질 것이 아닌가?"

"해와 달과 별들도 또한 기운이 쌓여 빛나고 있는 것일세. 그리고 만일 떨어진다고 할지라도 사람을 맞추어 다치게 하지는 못하네."

그러자 그 사람이 또 물었다.

"그러면 땅이 무너진다면 어떻게 하겠는가?"

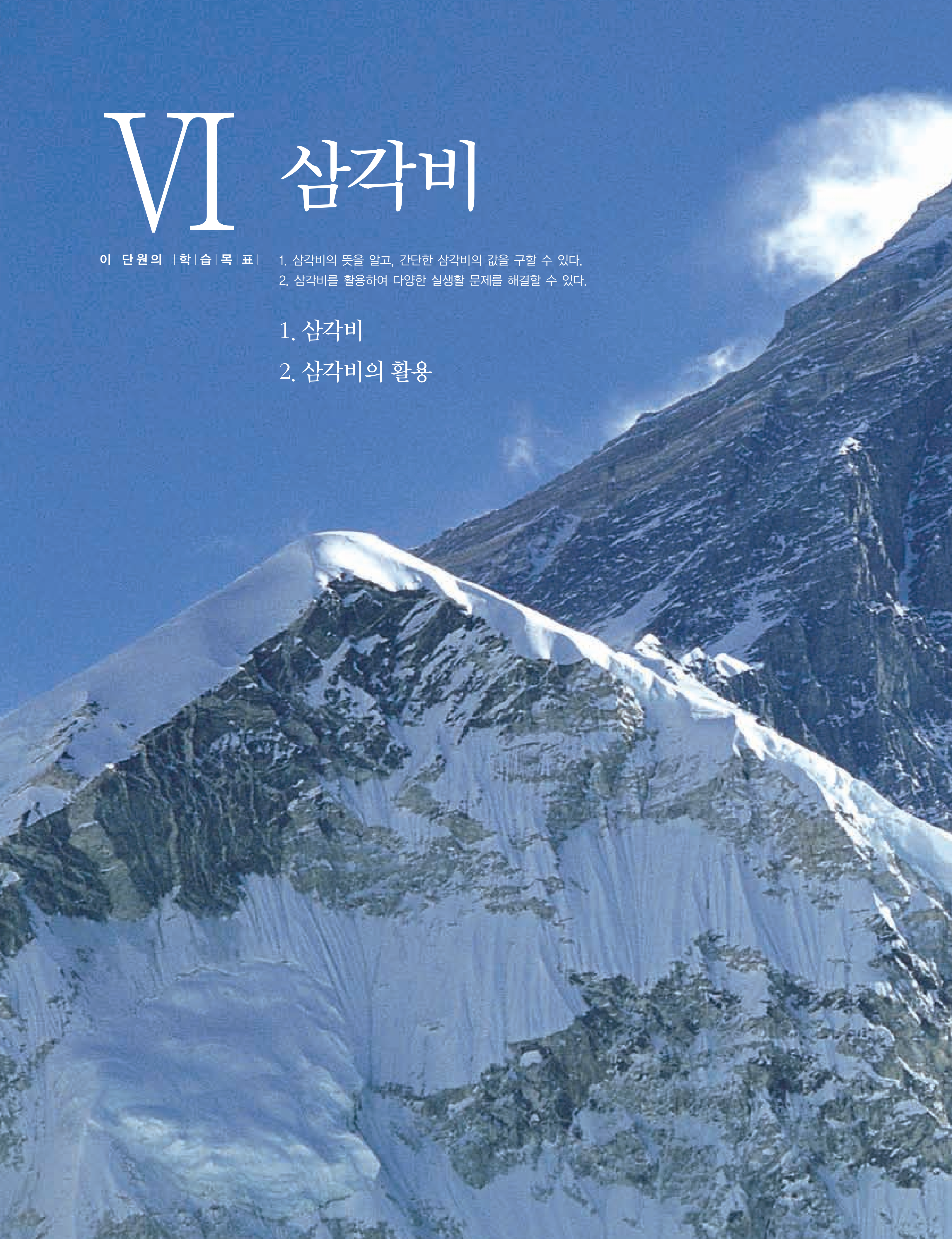
"땅은 흙이 쌓인 것으로 사방의 빈 곳을 꽉 채우고 막아서 어느 곳이나 흙이 없는 곳이 없다네. 사람들이 걸음을 걷고 땅을 밟는 일이 종일 땅 위에서 이루어지고 그치니 않으니 어찌 땅이 무너질 것을 근심하는가?"

이 말을 듣고 기나라 사람은 마음이 놓여 크게 기뻐하였다.

우리는 기우의 유래를 통해 지금으로부터 약 3000년 전 사람들의 우주관을 엿볼 수 있다. 그들의 우주관에 관심을 갖는 이유는 고대 문명에서 수학의 발전이 천문학과 역법에 깊은 관련이 있기 때문이다. 고대인들은 농사를 짓거나 제사를 지내기 위하여 천문학적인 사건들을 주의 깊게 관찰하였다. 그들은 하늘을 관찰한 결과를 토대로 시간을 재는 역법을 만들었는데, 이런 모든 과정에서 수학 지식과 기술이 필요하였다. 특히 중국은 농경 사회였으므로 가뭄이나 홍수 등을 미리 점치고, 씨앗을 뿌리거나 수확할 시기를 알기 위하여 정확한 역법이 필요하였다. 이와 같은 이유로 천문학 책과 수학 책이 만들어지게 되었다.

중국의 가장 오래된 천문학 책이자 수학 책은 "주비산경(周髀算經)"이다. 이 책이 집필된 시기는 정확하지 않지만 대략 기원전 100년경의 서한(西漢) 시대이며 그 내용은 그보다 훨씬 이전의 것으로 추정하고 있다. 이 책에는 하늘은 우산처럼 둥근 뚜껑 모양으로 생겼고, 지구는 대야를 엎어 놓은 것과 같이 생겼다는 개천설(蓋天設)이 소개되어 있다. 또 그림자를 이용하여 여러 가지 거리를 계산하였다. 이때 이용된 것이 피타고라스 정리인데, 동양에서는 이 정리를 구고현(句股弦)의 정리라고 불렀다.

기우(杞憂) 杞(나라이름 기), 憂(근심할 우)



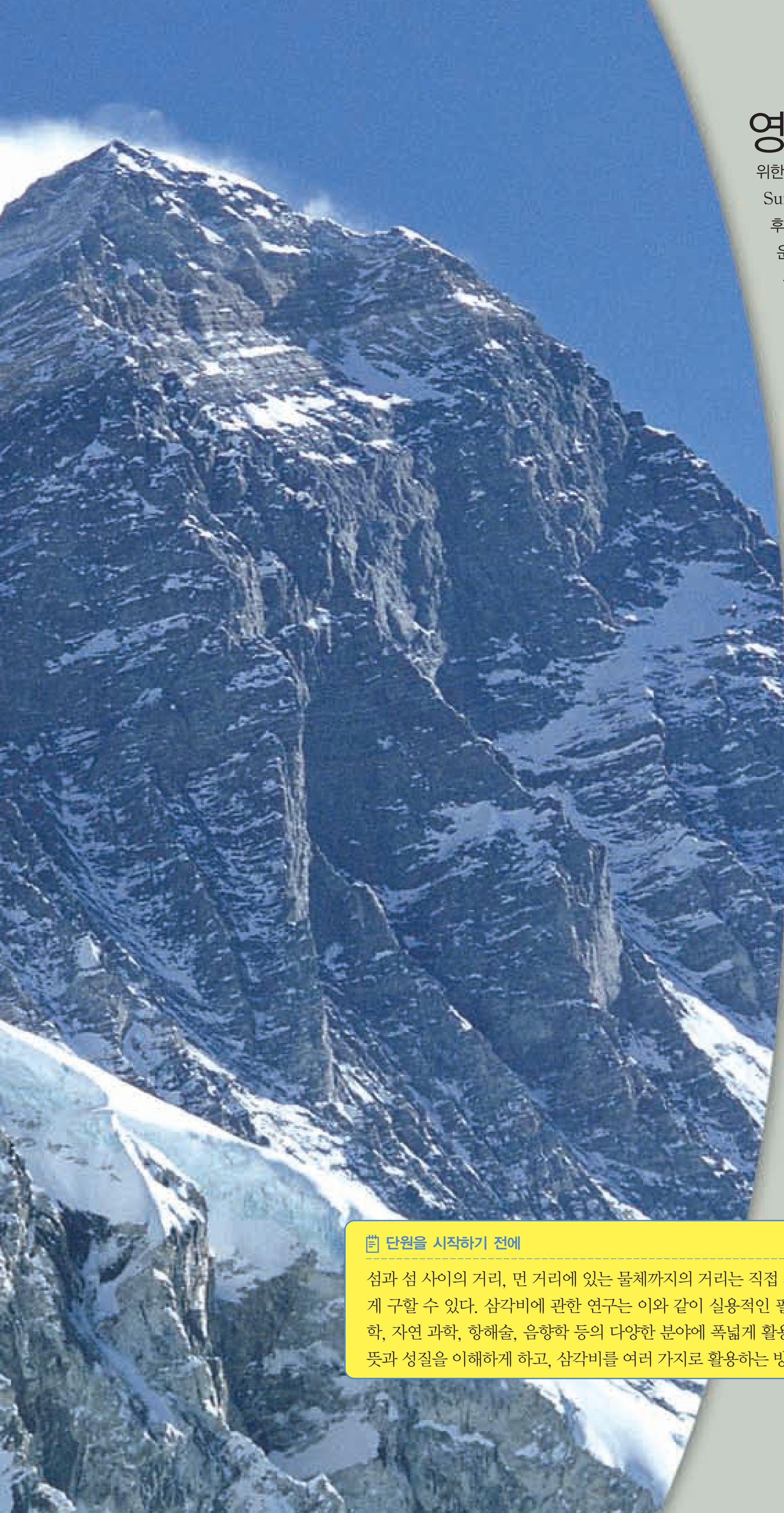
VI 삼각비

이 단원의 |학|습|목|표|

1. 삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.
2. 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.

1. 삼각비

2. 삼각비의 활용



영국은 19세기에 당시 식민지였던 인도 대륙의 지도를 만들기 위한 '대삼각 측량(Great Trigonometrical Survey)' 사업에서 땅을 삼각형으로 나눈 후 삼각비를 사용하여 직접 측량하기 어려운 거리를 계산하였다. 이 측량 사업은 컴퓨터나 인공위성을 이용한 위치 측정 시스템(GPS)이 개발되기 전에 과학계에서 이루어진 가장 어려운 작업 중의 하나였다고 한다.

이 측량으로 에베레스트 산이 세계에서 가장 높은 산이라 밝혀졌고, 산의 이름은 이 사업의 책임자였던 조지 에베레스트(George Everest)의 이름을 따서 지어졌다.

단원을 시작하기 전에

섬과 섬 사이의 거리, 먼 거리에 있는 물체까지의 거리는 직접 재기 어려우나 삼각비를 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 삼각비에 관한 연구는 이와 같이 실용적인 필요에 의해 시작되었으며 건축학, 공학, 자연 과학, 항해술, 음향학 등의 다양한 분야에 폭넓게 활용되어 왔다. 이 단원에서는 삼각비의 뜻과 성질을 이해하게 하고, 삼각비를 여러 가지로 활용하는 방법을 지도한다.

단원의 지도 목표

1. 삼각비

① 삼각비의 뜻을 알게 한다.
② 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.
③ 임의의 예각의 삼각비의 값을 구하는 방법을 이해하게 한다.
④ 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

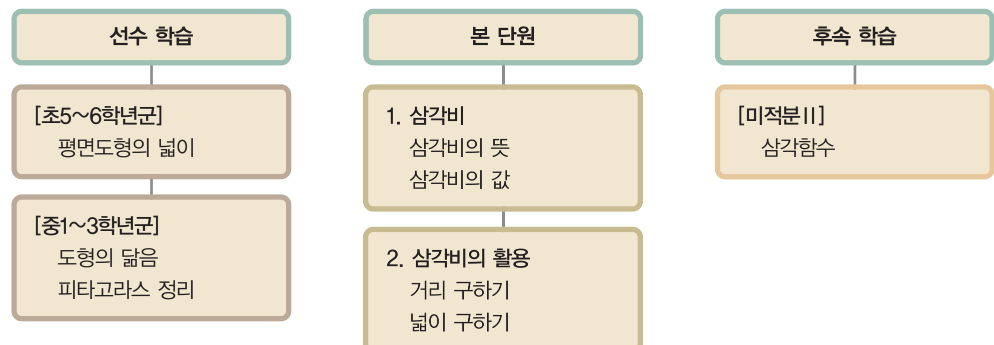
2. 삼각비의 활용

① 삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있게 한다.
② 삼각비를 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.
③ 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 삼각비 사이의 관계는 다루지 않는다.
② 삼각비의 값은 0°에서 90°까지의 각도에 대한 것만 다룬다.
③ 0°와 90°에 대한 삼각비의 값은 직관적으로 이해하도록 지도한다.
④ 삼각비의 활용은 단순한 소재를 간단히 다룬다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관			196~197	• 단원의 개관	
1. 삼각비	**준비 학습**		198	• 평면도형에서 닮음의 성질 • 삼각형의 닮음조건 • 피타고라스 정리	
	1-1 삼각비의 뜻	1~2	199~202	• 삼각비의 뜻	삼각비, 사인, 코사인, 탄젠트, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$
	1-2 삼각비의 값	3~5	203~208	• 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값 • 임의의 예각에 대한 삼각비의 값	
	수준별 학습	6	209~211	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 삼각비의 활용	**준비 학습**		212	• 삼각형의 넓이 • 피타고라스 정리 • 삼각비의 값	
	2-1 거리 구하기	7~8	213~215	• 거리 구하기	
	2-2 넓이 구하기	9~10	216~218	• 삼각형의 넓이 구하기 • 사각형의 넓이 구하기	
	수준별 학습	11	219~221	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		12~13	222~229	• 수행 과제 • 학습에 대한 자기 평가 • 대단원 핵심 한눈에 보기 • 만화로 보는 수학 이야기 • 대단원 평가 문제 • 수학 산책	

학습 지도 계획 수립 시 차시별 지도 계획을 바탕으로 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도에 따라 적절히 조정할 수 있다.

단원의 이론적 배경

1. 인도와 아라비아의 삼각법

인도의 수학이 이룬 가장 큰 업적은 정수에 대한 현대적인 기수법을 발전시켰다는 것과 그리스의 현표를 대신하는 삼각법의 사인함수에 해당하는 것을 도입하였다는 것이다.

그중에서 현재 사인함수의 표는 "싯단타"와 "아리아바티야"에 남아 있는 것이 가장 오래되었다. 굽타 왕조 체제 하의 산스크리스트 문화의 산물이라고 할 수 있는 '싯단타스(천문학)'는 "파울리사 싯단타", "수리아 싯단타", "파이타마하 싯단타", "로만카 싯단타", "바시시스타 싯단타"의 서로 다른 다섯 개의 저서로 되어 있는데, 그중에서 400년경에 쓰여진 "수리아 싯단타(태양계)"만이 온전하게 남아 있다. 특히 "파울리사 싯단타"는 다른 싯단타보다 먼저 작성된 것으로 여겨지고 있으며, "싯단타"의 일부와 프톨레마이오스(Ptolemaios, C.: ?~?)의 삼각법과 천문학 사이에서 발견되는 유사점을 쉽게 설명하고 있다. 이런 점에서 고대 인도인들은 이미 사인이라는 현대 삼각법의 기초를 사용한 것으로 추정된다.

프톨레마이오스

$\left(3\frac{3}{4}\right)^{\circ}$의 사인값에 대하여 "싯단타"와 "아리아바티야"는 호의 단위수, 즉 $60\times3\frac{3}{4}=225$를 사용하고 있는데, 이것은 현대 기하학의 의미에서 보면 아주 작은 각의 사인값은 그 각을 호도법으로 측정한 값과 거의 같음을 의미한다.

그리고 인도인들은 사인표를 완성하기 위해서 각각의 사인값을 항으로 하는 수열 s_n의 합 S_n에 대하여 다음과 같은 점화식을 사용하였다.

$$s_{n+1}=s_n+s_1-\frac{S_n}{s_1}$$

이 점화식을 사용하면 여러 가지 크기의 각에 대한 사인값을 구할 수 있으며 $\sin 90^{\circ}=3438$까지 유도된다. 그리고 이렇게 구한 수표의 각 항을 3438로 나누어 보면 그 결과가 오늘날의 삼각함수의 표의 값과 거의 일치함을 알 수 있다.

천문학의 계산을 위해 아라비아에서는 두 종류의 삼각법을 적용하였다. 그것은 "알마게스트(Almagest)"에 보이는 그리스의 현의 기하학과 "신드힌드(Sindhind)"에서 유래하는 인도의 사인표인데, 이 두 종류의 삼각법은 오랜 시간의 논쟁을 거친 끝에 인도의 삼각법 쪽이 채택되었다. 그리고 대부분의 아라비아의 삼각법은 사인함수를 바탕으로 확립되었으며 이후 서양 세계로 전파되었다.

사인은 알바타니(Al-Battani: ?850~929)의 천문학에서 전파되기 시작하였는데, "천체의 운행"이라는 그의 저서에는 다음과 같은 공식이 제시되어 있다.

$$b=\frac{a\sin(90^{\circ}-A)}{\sin A}$$

이런 공식들은 고대 측량술과 측정 기술에 머물던 삼각법이 현대의 수학적 삼각법에 가까워지는 통로가 된다고 할 수 있다.

아라비아의 삼각법은 사인함수에서 탄젠트를 이끌어 냈고, 인도의 사인함수와는 달리 일반적으로 단위원을 사용함으로써 좀 더 체계적인 형식을 갖춘 것이었으며 배각이나 반각의 공식 등과 같은 정리를 증명해 놓았다.

2. 르네상스 시대의 삼각법

15세기의 수학자 레기오몬타누스(Regiomontanus: 1436~1476)는 "알마게스트"를 라틴어로 번역한 사람이다. 이 번역 작업은 "프톨레마이오스의 알마게스트 요약"이라는 부산물을 낳았는데, 이 천문학 입문용

의 책은 수학적인 측면을 중심적으로 다루었다는 점에서 주목할 만하다. 그러나 수학적인 면에서 가장 중요한 저술은 "삼각법의 모든 것"이었다. 삼각법의 부활은 삼각형의 풀이법을 체계적으로 엮은 이 책에 의해서 이루어졌기 때문이다. 피보나치(Fibonacci: 1170~1250)의 "기하학의 실용"과 브래드워딘(Bradwardine, T.: 1290~1349)의 몇 가지 저술에는 이슬람의 문헌 중에서 모은 얼마간의 삼각법의 기초적인 지식이 소개되어 있었지만 레기오몬타누스의 책이 나오기 이전에 유럽에서는 삼각법에 대한 연구가 본격화되지 않았었다.

1464년경에 쓰여진 "삼각법의 모든 것" 제I권은 양(量)이나 비(比)에 관한 기본적인 개념의 설명부터 시작하고 있는데, 대부분 유클리드(Euclid: ?B.C. 325~?B.C. 265)의 "원론(Elements)"에서 인용한 것들이고 이것에 이어 피타고라스 정리를 이용하는 것들이다. 여기에는 피타고라스 정리를 이용하는 삼각형의 풀이법 55문제가 실려 있다. 제II권은 사인법칙에 관한 설명과 증명을 비롯하여 주어진 조건에 의해서 삼각형의 변, 각, 넓이를 구하는 문제를 다루고 있다. 제III권은 삼각법이 쓰이기 이전에 고대 그리스의 구면기하학에 관한 정리를, 그리고 제IV권은 사인법칙을 비롯한 구면삼각법을 주제로 하고 있다.

유클리드

탄젠트함수를 다룬 그의 삼각법에 관한 또 하나의 논문 '방향표'는 그가 갑작스럽게 죽은 지 14년이 지난 후의 일이었지만, 이보다 중요한 논문 '삼각형의 모든 것'이 출판된 것은 훨씬 뒤인 1533년의 일이었다.

천문학자는 필연적으로 삼각법을 연구하게 된다. 실제 지동설에 의해 종래의 세계관을 뒤집어 놓았던 "천구의 회전에 관하여"의 저자 코페르니쿠스(Copernicus, N.: 1473~1543)는 천문학과 마찬가지로 수학에 관한 유산을 남겼다. 그의 '지동설'에서는 상당 부분이 삼각법에 관해 쓰여져 있는데, 그의 뛰어난 수학적인 재능은 인쇄에서 제외된 초기의 원고 중에서도 볼 수 있다. 여기에 실린 유명한 명제 코페르니쿠스의 정리는 두 개의 원 운동의 합성으로 이루어진 직선 운동에 관한 나시르(Nasir al-Din al-Tusi: 1201~1274)의 정리를 일반화한 것이다.

코페르니쿠스의 "천구의 회전에 관하여"에 실린 삼각법의 정리를 통해 레기오몬타누스의 업적을 널리 세상에 알리는 결과를 가져왔지만, 그의 제자인 레티쿠스(Rheticus: 1514~1576)의 연구는 한 걸음 더 앞섰다. 레티쿠스는 코페르니쿠스와 레기오몬타누스의 업적에 자신의 견해를 덧붙여 두 권으로 된 '삼각법의 궁전'이라는 당시로서는 가장 상세한 논문을 썼는데, 이때 비로소 삼각법이 독립된 학문의 지위를 획득하게 된다. 그가 작성한 사인부터 코시컨트까지의 6가지 표는 오늘날 우리가 사용하고 있는 삼각함수에 관한 공식, 즉 $\sin 2\theta$나 $\sin 3\theta$의 값을 $\sin\theta$, $\cos\theta$로 나타낸다든지, 원을 사용하지 않고도 직각삼각형의 변 사이의 비에 의해서 삼각함수를 정의할 수 있음을 보여 준다. 이 논문에는 사인, 코사인의 덧셈정리, 즉

$$\sin(\alpha\pm\beta) \text{와 } \cos(\alpha\pm\beta)$$

의 공식이 실려 있기도 하다.

교수 · 학습 과정안 (기초)

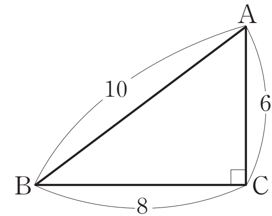
대단원	Ⅵ. 삼각비	쪽수	교과서 201~202쪽
소단원	1. 삼각비　1-1 삼각비의 뜻	차시	2/13
학습 목표	직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 피타고라스 정리에 대하여 질문한다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	개념 학습	◐ 학습 내용 설명 • $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\sin B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\cos B=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\tan B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	
	문제 해결	◐ 문제 1, 2, 3을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◐ 문제 해결을 모둠별로 해결하도록 한다. 문제 해결 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.	두 변의 길이가 주어진 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 때, 나머지 한 변의 길이를 피타고라스 정리를 이용하여 구하므로 사전에 피타고라스 정리를 충분히 복습할 수 있게 한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 ∠B의 삼각비의 값을 구하여라. 답 $\sin B=\dfrac{7}{25}$, $\cos B=\dfrac{24}{25}$, $\tan B=\dfrac{7}{24}$	
	수준별 과제 차시 예고	◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 안다.	

수준별 학습지 (기초)

대단원	Ⅵ. 삼각비	쪽수	교과서 201~202쪽
소단원	1. 삼각비 1-1 삼각비의 뜻	차시	2/13
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 오른쪽 그림을 보고 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.



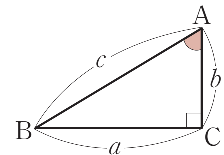
(1) $\sin B=\frac{\square}{10}=\frac{\square}{5}$

(2) $\cos B=\frac{\square}{10}=\frac{\square}{5}$

(3) $\tan B=\frac{\square}{8}=\frac{\square}{4}$

답 (1) 6, 3 (2) 8, 4 (3) 6, 3

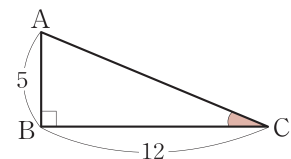
2 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 대변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때, 다음 중에서 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$를 나타낸 것을 각각 찾아라.



$\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$

답 $\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$, $\tan A=\frac{a}{b}$

3 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 다음을 구하여라.



(1) $\overline{AC}$의 길이

(2) $\angle C$의 삼각비의 값

답 (1) 13 (2) $\sin C=\frac{5}{13}$, $\cos C=\frac{12}{13}$, $\tan C=\frac{5}{12}$

교수 · 학습 과정안 (기본)

대단원	Ⅵ. 삼각비	쪽수	교과서 201~202쪽
소단원	1. 삼각비 1-1 삼각비의 뜻	차시	2/13
학습 목표	**직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.**		

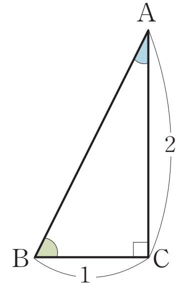
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 피타고라스 정리에 대하여 질문한다. ◯ 학습 목표를 제시한다. • 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	개념 학습 문제 해결	◯ 학습 내용 설명 • $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ [그림: 직각삼각형 A, B, C] ◯ 문제 1, 2, 3을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◯ 문제 해결을 모둠별로 해결하도록 한다. 문제 해결 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.	두 변의 길이가 주어진 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 때, 나머지 한 변의 길이를 피타고라스 정리를 이용하여 구하므로 사전에 피타고라스 정리를 충분히 복습할 수 있게 한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 삼각비의 값을 구하여라. [그림: 직각삼각형 A, B, C, 1, 3] 답 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan A=3$ ◯ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 안다.	

수준별 학습지 (기본)

대단원	Ⅵ. 삼각비	쪽수	교과서 201~202쪽
소단원	1. 삼각비　1-1 삼각비의 뜻	차시	2/13
(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:			

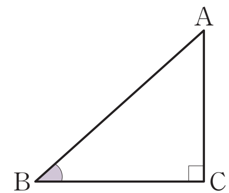
1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\sin A$, $\sin B$의 값을 구하여라.

답 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$



2 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{2}{3}$일 때, $\cos B$, $\tan B$의 값을 구하여라.

답 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

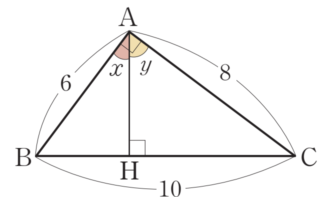


3 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\tan B=\frac{2}{5}$일 때, $\frac{\cos B}{\sin B}$의 값을 구하여라.

답 $\frac{5}{2}$

4 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\cos x \div \cos y$의 값을 구하여라.

답 $\frac{4}{3}$



교수 · 학습 과정안 (실력)

대단원	Ⅵ. 삼각비	쪽수	교과서 201~202쪽
소단원	1. 삼각비　1-1 삼각비의 뜻	차시	2/13
학습 목표	직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 피타고라스 정리에 대하여 질문한다. ◎ 학습 목표를 제시한다. • 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	개념 학습	◎ 학습 내용 설명 • $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	
	문제 해결	◎ 문제 1, 2, 3을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◎ 문제 해결을 모둠별로 해결하도록 한다. 문제 해결 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다.	두 변의 길이가 주어진 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 때, 나머지 한 변의 길이를 피타고라스 정리를 이용하여 구하므로 사전에 피타고라스 정리를 충분히 복습할 수 있게 한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\tan B=\frac{5}{12}$일 때 $\sin B$, $\cos B$의 값을 구하여라. 답 $\sin B=\frac{5}{13}$, $\cos B=\frac{12}{13}$	
	수준별 과제 차시 예고	◎ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 안다.	

수준별 학습지 (실력)

대단원	Ⅵ. 삼각비	쪽수	교과서 201~202쪽
소단원	1. 삼각비　1-1 삼각비의 뜻	차시	2/13
(　　)학년 (　　)반 (　　)번　　이름:			

1 $\angle B=90^{\circ}$인 직각삼각형 ABC에서 $\tan A=3$일 때, $\sin A$의 값을 구하여라.

답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에 대하여 변 AB 위의 한 점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E라 고 하자. $\overline{BD}=5$, $\overline{DE}=3$이라고 할 때, $\sin C$의 값을 구하여라.

답 $\frac{4}{5}$

3 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=6$ cm, $\sin A=\frac{3}{5}$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\overline{AB}$의 길이

(2) $\tan A$

답 (1) 10 cm　(2) $\frac{3}{4}$

4 오른쪽 그림은 세로의 길이가 4 cm인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 점 D가 점 B에 겹치도록 접은 것이다. $\overline{RD}=6$ cm, $\angle BRQ=x$라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $\overline{BQ}$의 길이

(2) $\overline{QC}$의 길이

(3) $\tan x$

답 (1) 6 cm　(2) $2\sqrt{5}$ cm　(3) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

1 삼각비

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 삼각비의 뜻을 이해하게 한다.
② 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 알게 한다.
③ 임의의 예각에 대한 삼각비의 값을 알게 한다.
④ 0°, 90°의 삼각비의 값을 알게 한다.
⑤ 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
1-1 삼각비의 뜻	삼각비의 뜻
1-2 삼각비의 값	30°, 45°, 60°의 삼각비의 값
	임의의 예각에 대한 삼각비의 값
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 198 쪽

1 삼각비

우린 특별해! 45° 30° 60°

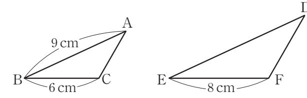
준 | 비 | 학 | 습

평면도형에서 닮음의 성질
두 닮은 평면도형에서
• 대응하는 변의 길이의 비는 일정하다.
• 대응하는 각의 크기는 각각 같다.

삼각형의 닮음조건
• 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때
• 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때
• 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때

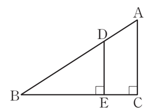
피타고라스 정리
직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면
$$a^2+b^2=c^2$$
이다.

1 아래 그림에서 △ABC∽△DEF일 때, 다음을 구하여라.

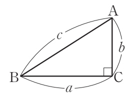


(1) △ABC와 △DEF의 닮음비
(2) $\overline{DE}$의 길이

2 오른쪽 그림에서 △ABC와 △DBE가 서로 닮음인 이유를 말하여라.



3 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.



(1) $a^2+b^2=$□
(2) $a=\sqrt{□}$
(3) $b=\sqrt{□}$

준비 학습의 해설

1

목표| 닮음의 성질을 이용하여 닮은 두 삼각형에서 닮음비와 대응하는 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{BC}$와 $\overline{EF}$는 대응하는 변이므로 닮음비는
$\overline{BC}:\overline{EF}=6:8=\mathbf{3:4}$
(2) $\overline{AB}:\overline{DE}=3:4$에서
$9:\overline{DE}=3:4$, $3\overline{DE}=36$
$\overline{DE}=\mathbf{12(cm)}$

2

목표| 삼각형의 닮음조건을 말할 수 있게 한다.

풀이| △ABC와 △DBE에서
$\angle ACB=\angle DEB=90^\circ$, $\angle B$는 공통
따라서 △ABC와 △DBE는 **두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로** 서로 닮음이다.

3

목표| 피타고라스 정리를 알고 이를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^2+b^2=\boxed{c^2}$
(2) $a=\sqrt{\boxed{c^2-b^2}}$
(3) $b=\sqrt{\boxed{c^2-a^2}}$

교과서 199 쪽

1-1 삼각비의 뜻

● 삼각비의 뜻을 안다.

삼각비란 무엇인가?

창의력 기르기

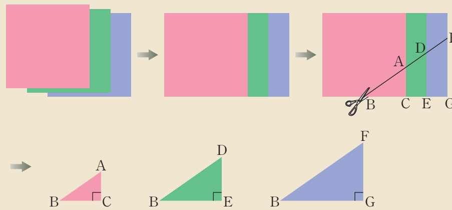
피라미드의 높이

사각뿔 모양의 거대한 건축물인 피라미드는 현대의 최신식 기술과 장비를 가지고도 만들기 힘들 만큼 정교하고 불가사의한 구조물이다. 한편 고대 그리스의 수학자 탈레스(Thales : ?B.C. 624～?B.C. 546)는 막대기와 피라미드의 그림자의 길이로 구한 닮음비를 이용하여 피라미드의 높이를 구하였다고 한다.

탐구 활동

●준비물
색종이, 가위

정사각형 모양의 색종이 세 장을 나란히 겹친 후 다음 그림과 같이 잘라서 ∠B를 공통으로 가지는 직각삼각형을 만든다. 이때 생긴 세 개의 삼각형에 대하여 물음에 답하여 보자.



1 세 삼각형은 서로 닮은 도형인가?

2 세 삼각형에 대하여 다음 값이 일정한가?

(1) $\dfrac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}$ (2) $\dfrac{(\text{밑변의 길이})}{(\text{빗변의 길이})}$ (3) $\dfrac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}$

새로 나온 용어와 기호

- 삼각비(三角比, trigonometric ratio)
- 사인(sine)
- 코사인(cosine)
- 탄젠트(tangent)
- $\sin A$
- $\cos A$
- $\tan A$

창의력 기르기 참/고/자/료

탈레스(Thales: ?B.C. 624～?B.C. 546)는 소아시아의 그리스 식민지 밀레토스라는 도시에서 태어났으며 철학을 비롯하여 수학, 천문학 등 여러 분야에 학식이 넓었다.
아리스토텔레스의 기록에 의하면 사람들이 철학자인 빈곤한 탈레스를 비난하며 철학을 쓸모없는 학문이라고 하자 그는 겨울에 별을 관찰하여 다음 해 감람나무가 대풍할 것이라는 것을 예측하고 기름을 짜는 기계를 먼저 사용할 권리를 얻어 놓았다고 한다. 다음 해 감람나무가 풍작이 되어 모두 기름을 짜는 기계를 얻으려 했지만 그 권리는 탈레스에게 있었기에 모두 그에게 비싼 값을 치르고 기계를 빌려야 했고, 이를 통하여 탈레스는 세상 사람들에게 철학자는 원하면 언제나 부유해질 수 있지만 그들의 야심은 다른 종류의 것이라는 것을 보여주었다고 한다.

1-1 삼각비의 뜻

소단원 지도 목표

① 삼각비의 뜻을 이해하게 한다.
② 변의 길이가 주어진 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 서로 닮음인 두 직각삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 일정함을 이해하고, 이를 바탕으로 삼각비의 뜻을 알게 한다.

2. 한 예각의 크기가 같은 직각삼각형은 모두 닮음이므로 직각삼각형에서 한 예각의 크기에 대한 삼각비의 값을 정할 수 있음을 이해하게 한다.

3. ∠A의 삼각비는 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$로 나타냄을 알게 하고, 회전하거나 뒤집힌 형태의 직각삼각형에서도 삼각비를 구할 수 있도록 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 색종이를 이용하여 닮음인 직각삼각형에서 두 변의 길이의 비가 일정함을 알게 하려는 것이다.
준비물 • 색종이, 가위

1. △ABC, △DBE, △FBG에서
∠C=∠E=∠G=90°, ∠B는 공통
이므로 △ABC∽△DBE∽△FBG
즉, 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로 **세 삼각형은 서로 닮은 도형이다.**

2. 서로 닮은 도형은 대응하는 변의 길이의 비가 일정하므로 주어진 값도 **일정하다.**

본문 해설

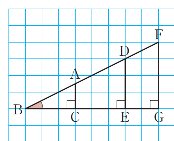
❶ 직각삼각형 ABC에서 ∠B의 삼각비, 즉 $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$가 어느 두 변의 길이의 비인지를 쉽게 구별하기 위한 방법으로 본문의 그림과 같이 $\sin B$에서 s를 $\mathscr{s}$, $\cos B$에서 c를 $\mathscr{c}$, $\tan B$에서 t를 $\mathscr{t}$로 연관시켜 생각할 수 있다.

❷ 삼각비에서는 ∠B의 크기를 간단히 B로 나타낸다.
즉, sin∠B, cos∠B, tan∠B로 나타내지 않고 간단히 $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$로 나타낸다.

교과서 200 쪽

직각삼각형에서 두 변의 길이의 비에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림에서 직각삼각형 ABC, DBE, FBG는 ∠B를 공통으로 가지므로 서로 닮은 도형이다.



따라서 이들 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 각각 같으므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{FB}}$$
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{FB}}$$
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{BG}}$$

일반적으로 ∠C$=90°$인 직각삼각형 ABC에서 ∠B의 크기가 정해지면 직각삼각형의 크기에 관계없이

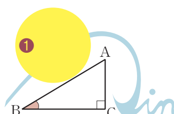
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}},\ \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

의 값은 일정하다.

❶ 이때 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}$를 ∠B의 **사인**이라 하고, 이것을 기호로

sin *B*

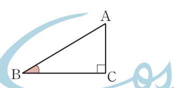
와 같이 나타낸다.



또 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{(\text{밑변의 길이})}{(\text{빗변의 길이})}$를 ∠B의 **코사인**이라 하고, 이것을 기호로

cos *B*

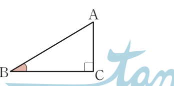
와 같이 나타낸다.



마찬가지로 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}$를 ∠B의 **탄젠트**라 하고, 이것을 기호로

tan *B*

와 … 나타낸다.



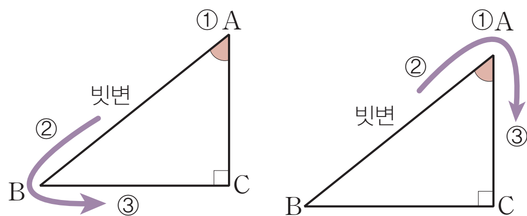
❷ … $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$를 통틀어 ∠B의 **삼각비**라고 한다.

sin, cos, tan는 각각 sine, cosine, tangent의 약자이고, B는 ∠B의 크기를 나타낸다.

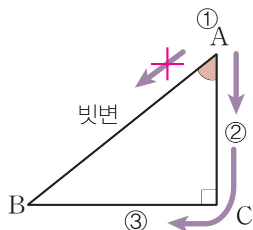
지/도/자/료

도형이 뒤집히거나 회전한 상태에서도 삼각비의 값을 쉽게 구하는 방법이 있다.

사인값과 코사인값은 모두 분모에 '빗변의 길이'를 넣어 계산하므로 다음 그림과 같이 주어진 각을 확인하고(①), 분모에 '빗변의 길이'를 대응한 뒤, 주어진 각을 사인은 감싸지 않고, 코사인은 감싸도록 분자를 채운다.(②~③)



탄젠트는 다음 그림과 같이 주어진 각을 확인하고(①), 분모에 주어진 각을 감싸는 두 변 중 빗변이 아닌 변을 분모에 대응하고, 직각을 감싸도록 분자를 채운다.(②~③)



읽/기/자/료 사인, 코사인, 탄젠트의 유래

사인, 코사인, 탄젠트를 나타내는 sin, cos, tan는 각각 sine, cosine, tangent의 줄임말이다.

sine은 sinus라는 라틴어에서 나온 말로 '현의 절반'을 뜻한다. 여기서 현의 절반이란 직각삼각형에서 주어진 각의 맞은편 변의 길이를 지칭하는 말이다. 즉, 중심각이 θ인 부채꼴의 현의 길이를 구할 때 한 각이 $\frac{\theta}{2}$인 직각삼각형을 이용한 것이다.

cosine은 complementary sine을 줄인 말로 '여각의 사인'을 뜻한다. 이는 complementum sinus에서 나온 말이며, 여각은 두 각의 크기의 합이 $90°$일 때 그 한 각에 대한 다른 각을 일컫는 말이다. 즉, △ABC에서 ∠A+∠B$=90°$일 때 ∠A와 ∠B는 서로의 여각이다. 실제로 ∠C$=90°$인 직각삼각형 ABC에서 ∠A와 ∠B의 삼각비의 값을 구해 보면 $\sin A=\cos B$, $\cos A=\sin B$임을 확인할 수 있다.

tangent는 tangens라는 라틴어에서 나온 말로 '접촉하고 있다.'를 뜻한다.

교과서 201 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sin A=\frac{a}{c}$

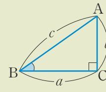
$\cos A=\frac{b}{c}$

$\tan A=\frac{a}{b}$

삼각비

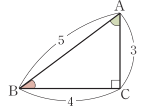
$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 대변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면

$$\sin B=\frac{b}{c},\ \cos B=\frac{a}{c},\ \tan B=\frac{b}{a}$$



예 제 1

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$의 삼각비의 값을 각각 구하여라.



풀이 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$의 삼각비의 값은 각각 다음과 같다.

$$\sin A=\frac{4}{5},\ \cos A=\frac{3}{5},\ \tan A=\frac{4}{3}$$

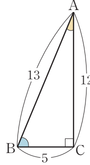
$$\sin B=\frac{3}{5},\ \cos B=\frac{4}{5},\ \tan B=\frac{3}{4}$$

답 $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos A=\frac{3}{5}$, $\tan A=\frac{4}{3}$

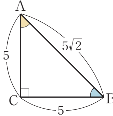
$\sin B=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$, $\tan B=\frac{3}{4}$

문 제 1 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$의 삼각비의 값을 각각 구하여라.

(1)



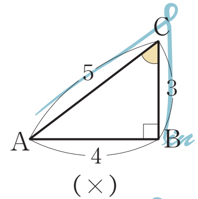
(2)



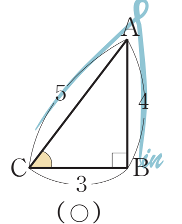
지/도/자/료

주어진 각의 삼각비의 값을 구할 때, 각의 위치를 고려하지 않고 주어진 삼각형의 모양 그대로 놓고 알파벳 필기체 모양을 연관시켜 값을 구하는 실수를 하는 경우가 있다.

즉, 오른쪽 그림과 같은 삼각형에서 $\angle C$의 사인값을 $\sin C=\frac{3}{5}$으로 잘못 생각하는 경우이다.



이와 같이 삼각비의 값을 구하려는 각이 직각삼각형에서 익숙하지 않은 위치에 있는 경우에는 그 각이 왼쪽 아래에 오도록 삼각형을 다시 그린 다음 $\sin C=\frac{4}{5}$로 옳게 구하도록 지도한다.



이와 같이 여러 가지 형태의 직각삼각형으로 충분히 연습할 수 있도록 지도한다.

목표 | 세 변의 길이가 주어진 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\sin A=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}$, $\cos A=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}}$, $\tan A=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$

$\sin B=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}}$, $\cos B=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}$, $\tan B=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$

(2) $\sin A=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

$\cos A=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

$\tan A=\frac{5}{5}=\mathbf{1}$

$\sin B=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

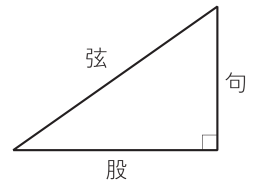
$\cos B=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

$\tan B=\frac{5}{5}=\mathbf{1}$

읽/기/자/료 고대 중국의 삼각비

고대 중국에서는 삼각비를 받아들이면서 정현(正弦, sin), 여현(餘弦, cos), 정접(正接, tan), 여접(餘接, cot), 정할(正割, sec), 여할(餘割, cosec)이라는 용어를 사용하였다. 여현은 여각의 정현, 여접은 여각의 정접, 여할은 여각의 정할을 뜻하는 것이다.

여기서 현이란 직각삼각형의 빗변을 뜻하는데 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형의 빗변을 현(弦)이라 하고, 직각을 낀 변 중에서 짧은 것을 구(句), 긴 것을 고(股)라고 한다. 그래서 직각삼각형을 구고현(句股弦)이라고도 불렀다.



2

목표| 두 변의 길이가 주어진 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{AB}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$이므로

$\sin A=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\cos A=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,

$\tan A=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$\sin B=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$,

$\tan B=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

(2) $\overline{AC}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로

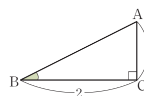
$\sin A=\frac{3}{4}$, $\cos A=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

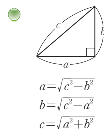
$\tan A=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos B=\frac{3}{4}$, $\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3}$

교과서 202 쪽

예 제 2 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 ∠B의 삼각비의 값을 구하여라.





$a=\sqrt{c^2-b^2}$
$b=\sqrt{c^2-a^2}$
$c=\sqrt{a^2+b^2}$

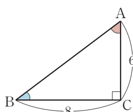
● 풀이 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan B=\frac{1}{2}$

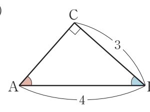
답 ● $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan B=\frac{1}{2}$

문제 2 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B의 삼각비의 값을 각각 구하여라.

(1)



(2)



문제 3 오른쪽 그림에서 $\angle C=90^\circ$이고 $\tan B=\frac{4}{3}$일 때, $\sin B$, $\cos B$의 값을 구하여라.

문제해결 $\angle C=90^\circ$인 △ABC에서 $\sin A$와 $\cos A$의 값이 같은 경우 △ABC는 어떤 삼각형인지 말하여 보자.

3

목표| 직각삼각형에서 하나의 삼각비의 값을 알 때, 다른 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

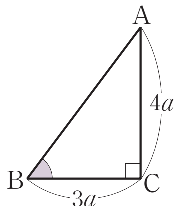
풀이| $\tan B=\frac{4}{3}$이므로

$\overline{BC}=3a$, $\overline{AC}=4a$ $(a>0)$라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=\sqrt{25a^2}=5a$

$\sin B=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$,

$\cos B=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$



문/제/해/결

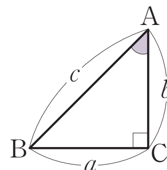
|출제 의도| 직각삼각형에서 사인값과 코사인값이 같은 경우 세 변의 길이의 관계를 생각해 봄으로써 삼각비의 뜻을 깊게 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 오른쪽 그림에서

$\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$이고

$\sin A=\cos A$이므로 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$이다.

즉, $a=b$이므로 △ABC는 **직각이등변삼각형이다.**



교과서 203 쪽

1-2 삼각비의 값

● 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.

30°, 45°, 60°의 삼각비의 값은 어떻게 구하는가?

창의력 기르기

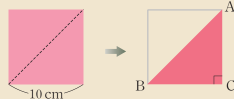
종이접기

종이접기는 종이를 접어서 학, 비행기, 배 등의 여러 가지 모양을 만드는 놀이이다. 종이접기는 손에서 손으로 전승되어 왔기 때문에 정확한 기원은 알 수 없지만, 각 국가에서 다양하게 발전해 오고 있다. 우리나라의 경우에도 장신구와 생활용품 등에 종이접기가 활용되었으며 지금까지 종이접기가 전해져 오고 있다.

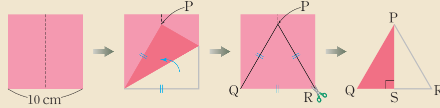
탐구 활동

● 준비물
색종이, 가위

한 변의 길이가 10 cm인 정사각형 모양의 색종이를 대각선을 따라 반으로 접으면 직각삼각형 ABC가 생긴다.



또한 한 변의 길이가 10 cm인 정사각형 모양의 색종이를 접어서 정삼각형 PQR를 만들고 자른 후, 꼭짓점 Q와 R가 겹쳐지도록 접으면 직각삼각형 PQS가 생긴다.



다음 물음에 답하여 보자.

1 직각삼각형 ABC의 세 내각의 크기를 말하여 보자.

2 직각삼각형 PQS의 세 내각의 크기를 말하여 보자.

3 직각삼각형 ABC와 직각삼각형 PQS에서 ∠A, ∠B, ∠P, ∠Q의 삼각비의 값을 어떻게 구할 수 있는지 말하여 보자.

1-2 삼각비의 값

소단원 지도 목표

① 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 알게 한다.
② 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 임의의 예각에 대한 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.
③ 0°, 90°의 삼각비의 값을 알게 한다.
④ 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 좌표평면 위에 그려진 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 임의의 예각에 대한 삼각비의 값을 구하는 방법을 이해하게 한다.

2. 0°와 90°의 삼각비의 값을 지도할 때에는 각의 크기가 0°와 90°에 가까워짐에 따라 삼각비의 값이 어떻게 변하는가를 살펴보게 한다.

창의력 기르기 참/고/자/료

종이접기는 여러 가지 모양을 만드는 과정에서 즐거움을 줄 뿐만 아니라 수학적 사고를 할 수 있게 해 준다. 여러 가지 작품을 만들 때, 쉽게 눈에 띄지 않아도 과정 하나하나를 자세히 들여다보면 종이접기 속에는 수학의 원리가 들어있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직각이등변삼각형과 정삼각형을 이용하여 30°, 45°, 60°에 대한 삼각비의 값을 구하는 방법을 이해하게 한다.
준비물 • 색종이, 가위

1. $\angle A=45°$, $\angle B=45°$, $\angle C=90°$

2. $\angle QPS=30°$, $\angle PQS=60°$, $\angle PSQ=90°$

3. 직각삼각형 ABC에서
$\overline{BC}=10$ cm, $\overline{AC}=10$ cm, $\overline{AB}=10\sqrt{2}$ cm
이므로 ∠A와 ∠B의 삼각비의 값은 다음과 같다.

$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=1$

$\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=1$

직각삼각형 PQS에서
$\overline{QS}=5$ cm, $\overline{PS}=5\sqrt{3}$ cm, $\overline{PQ}=10$ cm
이므로 ∠P와 ∠Q의 삼각비의 값은 다음과 같다.

$\sin P=\frac{\overline{QS}}{\overline{PQ}}=\frac{1}{2}$, $\cos P=\frac{\overline{PS}}{\overline{PQ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

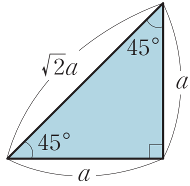
$\tan P=\frac{\overline{QS}}{\overline{PS}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin Q=\frac{\overline{PS}}{\overline{PQ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos Q=\frac{\overline{QS}}{\overline{PQ}}=\frac{1}{2}$,

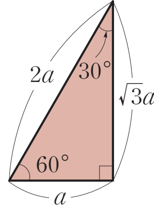
$\tan Q=\frac{\overline{PS}}{\overline{QS}}=\sqrt{3}$

본문 해설

❶ 직각이등변삼각형과 한 내각의 크기가 30°인 직각삼각형에서는 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값뿐만 아니라 세 변의 길이의 비가 많이 이용된다.



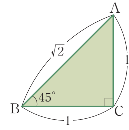
$1:1:\sqrt{2}$



$1:\sqrt{3}:2$

교과서 204 쪽

오른쪽 그림과 같이 한 각의 크기가 45°인 직각이등변삼각형 ABC에서 직각을 낀 변의 길이가 1이면 빗변 AB의 길이는 피타고라스 정리에 의하여 $\sqrt{2}$가 된다.



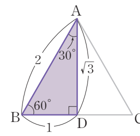
따라서 다음을 알 수 있다.

$$\sin 45^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{1}{1}=1$$

또 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 대변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하면 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형 ABD를 얻는다.



이때 $\overline{AB}=2$, $\overline{BD}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AD}=\sqrt{3}$이 된다.

따라서 다음을 알 수 있다.

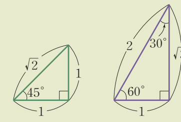
$$\sin 30^\circ=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2},\ \cos 30^\circ=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 30^\circ=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2},\ \tan 60^\circ=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ °, 60°의 삼각비의 값

A \ 삼각비	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$



지/도/자/료 특수각의 삼각비

0°, 30°, 45°, 60°, 90°와 같은 특수각의 삼각비의 값에서는 오른쪽 표와 같은 규칙을 생각해 볼 수 있다.

(1) sin은 모두 분모에 2를 대응하고, 0°, 30°, 45°, 60°, 90°의 순서대로 분자에 $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$를 대응하여 계산할 수 있다. 여기서 sin의 값은 0°, 30°, 45°, 60°, 90°의 순서대로 증가한다.

(2) cos은 sin과 반대의 순서로 구할 수 있으며 주어진 각이 커질수록 cos의 값이 감소한다.

(3) tan는 tan 30°의 값인 $\frac{\sqrt{3}}{3}$을 기준으로 tan 45°의 값은 tan 30°의 값에 $\sqrt{3}$을 곱한 값과 같고, tan 60°의 값은 tan 45°의 값에 $\sqrt{3}$을 곱한 값과 같다. tan의 값은 주어진 각이 커질수록 증가한다.

A \ 삼각비	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
0°	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0
30°	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	

$\times\sqrt{3}$, $\times\sqrt{3}$

교과서 205 쪽

예 제 1 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 45^\circ+\cos 45^\circ$ (2) $\tan 30^\circ\times\sin 60^\circ$

● 풀이 (1) $\sin 45^\circ+\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

(2) $\tan 30^\circ\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

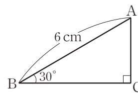
답 ● (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

문제 1 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ$ (2) $\cos 60^\circ-\sin 30^\circ$

(3) $\tan 30^\circ\times\tan 60^\circ$ (4) $\tan 45^\circ\div\cos 30^\circ$

예 제 2 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle B=30^\circ$, $\overline{AB}=6$ cm일 때, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.



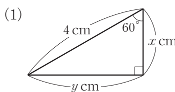
● 풀이 $\sin 30^\circ=\frac{\overline{AC}}{6}$이므로 $\overline{AC}=6\sin 30^\circ=6\times\frac{1}{2}=3(\text{cm})$

$\cos 30^\circ=\frac{\overline{BC}}{6}$이므로 $\overline{BC}=6\cos 30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}(\text{cm})$

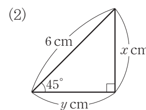
답 ● $\overline{AC}=3$ cm, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$ cm

문제 2 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x, y의 값을 구하여라.

(1)



(2)



1

목표| 삼각비의 값을 이용하여 식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\cos 60^\circ-\sin 30^\circ=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\mathbf{0}$

(3) $\tan 30^\circ\times\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=\mathbf{1}$

(4) $\tan 45^\circ\div\cos 30^\circ=1\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

2

목표| 삼각비의 값을 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\cos 60^\circ=\frac{x}{4}$이므로 $x=4\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$

$\sin 60^\circ=\frac{y}{4}$이므로 $y=4\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

(2) $\sin 45^\circ=\frac{x}{6}$이므로

$x=6\sin 45^\circ=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

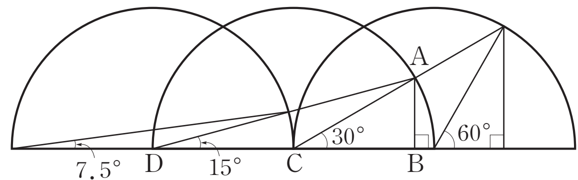
$\cos 45^\circ=\frac{y}{6}$이므로

$y=6\cos 45^\circ=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

읽/기/자/료 삼각법의 아버지

그리스 최고의 천문학자라고 불리는 히파르코스(Hipparchos: ?~?B.C.125)는 각에 대한 현의 길이를 나타낸 표, 즉 현의 표를 만드는 내용을 담은 12권의 논문을 썼다고 해서 '삼각법의 아버지'로 일컬어진다.

히파르코스는 천문학을 연구하면서 지구와 달 사이의 거리를 계산하게 되었고 이 과정에서 구면 위의 두 점 사이의 거리와 각의 크기를 측정할 필요를 느끼게 되었다. 이로 인해 삼각법을 연구하기 시작하였고, 그 결과로 각에 대한 현의 길이의 비율에 대한 표가 만들어졌는데, 이는 곧 사인값과 원의 현의 길이에 대한 삼각비의 표의 시초가 되었다. 그는 서로 닮음인 두 직각삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비가 같음을 알고 다음과 같이 이미 아는 값에서 그 반각의 사인값을 구하여 사인에 대한 삼각비의 표를 만들었다. 그 방법은 다음과 같다.



위의 그림의 $\triangle ACB$에서 $\sin 30^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$이고,

$\triangle ADB$에서 $\sin 15^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{DA}}$이므로 $\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{CA}}{\overline{DA}}$,

$\sin 15^\circ=\sin 30^\circ\times\frac{\overline{CA}}{\overline{DA}}$이다.

이때 $\sin 30^\circ=0.5$이므로 $\overline{DA}$와 $\overline{CA}$의 길이를 재어 $\sin 15^\circ$의 값을 알 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 임의의 예각에 대한 삼각비의 값을 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 구할 수 있게 하려는 것이다.

1. $\overline{OA}=\mathbf{1}$

2. $\sin 40^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AB}}{1}=\mathbf{\overline{AB}}$

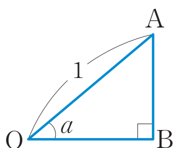
$\cos 40^\circ=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB}}{1}=\mathbf{\overline{OB}}$

3. $\tan 40^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\dfrac{\overline{CD}}{1}=\mathbf{\overline{CD}}$

본문 해설

❶ 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 예각에 대한 삼각비의 값을 구할 때, 사인과 코사인은 빗변의 길이가 1인 직각삼각형을, 탄젠트는 밑변의 길이가 1인 직각삼각형을 이용해야 한다.

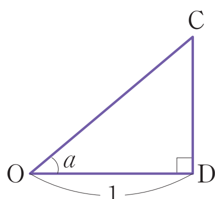
△AOB에서 $\sin a=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$이고 $\overline{OA}=1$이므로 사인값을 간단히 한 변 $\overline{AB}$의 길이로 나타낼 수 있다.



마찬가지로 $\cos a=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$이고 $\overline{OA}=1$이므로 코사인값을 간단히 한 변 $\overline{OB}$의 길이로 나타낼 수 있다.

한편 사인, 코사인과 같은 방법으로 탄젠트를 구해 보면, $\tan a=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$에서 변 $\overline{OB}$와 $\overline{AB}$는 사분원의 반지름을 나타내고 있지 않으므로 이 삼각형에서는 간단히 한 변의 길이로 나타낼 수 없다.

따라서 △COD에서 $\tan a=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$이고 $\overline{OD}=1$이므로 탄젠트값을 간단히 한 변 $\overline{CD}$의 길이로 나타낼 수 있다.

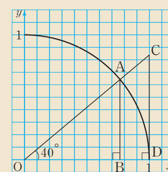


교과서 206 쪽

임의의 예각에 대한 삼각비의 값은 어떻게 구하는가?

탐 구 활 동

오른쪽 그림은 좌표평면 위에 점 O를 중심으로 하여 반지름의 길이가 1인 사분원을 그린 것이다. ∠AOB의 크기가 40°일 때, 다음 물음에 답하여 보자.



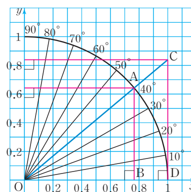
1 $\overline{OA}$의 길이를 구하여 보자.

2 △AOB의 세 변의 길이 중에서 $\sin 40^\circ$, $\cos 40^\circ$의 값과 같은 것을 각각 찾아보자.

3 △COD의 세 변의 길이 중에서 $\tan 40^\circ$의 값과 같은 것을 찾아보자.

❶ 동의 그림과 같이 좌표평면 위에 원점 O를 중심으로 하여 반지름의 길 인 사분원을 그리면 여러 가지 크기의 예각에 대한 삼각비의 값을 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 x축과 40°의 각을 이루는 직선과 반지름의 길이가 1인 사분원과의 교점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라고 하면 직각삼각형 AOB에서 $\overline{OA}=1$이다.



따라서 $\sin 40^\circ$와 $\cos 40^\circ$의 값은 모눈의 눈금을 읽어 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\sin 40^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\overline{AB}=0.64$$

$$\cos 40^\circ=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\overline{OB}=0.77$$

또 사분원과 x축과의 교점 D에서 x축에 수직인 직선을 그어 $\overline{OA}$의 연장선과 만나는 점을 C라고 하면 직각삼각형 COD에서 $\overline{OD}=1$이다.

따라서 $\tan 40^\circ$의 값은 모눈의 눈금을 읽어 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\tan 40^\circ=\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\overline{CD}=0.84$$

읽/기/자/료 물매와 삼각비

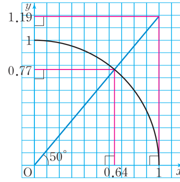
지붕이나 비탈길 등의 경사진 정도를 물매라고 한다. 예를 들어 어떤 지붕에서 수평 길이 10 cm에 대해 높이 5 cm의 경사를 $\dfrac{5}{10}$ 물매라고 한다.

지붕의 물매는 칸 사이의 크기, 건물의 용도, 지붕의 이음 재료, 강수량에 따라 정해진다.

비탈길의 물매는 각도가 θ일 때, $\tan\theta$의 값으로 나타내며, 분자가 1인 분수를 사용해서 $\dfrac{1}{50}$, $\dfrac{1}{100}$ 등으로 쓴다.

문제 3 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 사분원이 있다. 다음 삼각비의 값을 구하여라.

(1) sin 50°
(2) cos 50°
(3) tan 50°



❶ °의 삼각비의 값을 알아보자.

쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원 안의 직각삼각형 AOB에서 ∠AOB의 사인, 코사인, 탄젠트의 값은 각각

$\overline{AB}$, $\overline{OB}$, $\overline{CD}$

의 길이와 같다.

따라서 ∠AOB의 크기가 0°에 가까워지면 $\overline{AB}$의 길이는 0에, $\overline{OB}$의 길이는 1에, $\overline{CD}$의 길이는 0에 가까워지므로 0°의 삼각비의 값은 다음과 같이 정한다.

$$\sin 0° = 0, \quad \cos 0° = 1, \quad \tan 0° = 0$$

또 ∠AOB의 크기가 90°에 가까워지면 $\overline{AB}$의 길이는 1에, $\overline{OB}$의 길이는 0에 가까워지므로 90°의 삼각비의 값은 다음과 같이 정한다.

$$\sin 90° = 1, \quad \cos 90° = 0$$

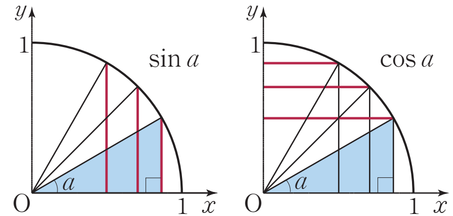
그러나 ∠AOB의 크기가 90°에 가까워지면 $\overline{CD}$의 길이는 한없이 길어지므로 tan 90°의 값은 정할 수 없다.

문제 4 다음을 계산하여라.

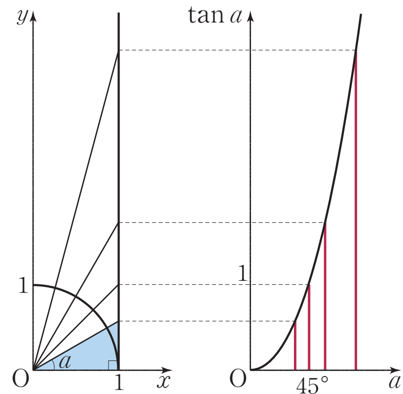
(1) $\sin 0° \times \cos 90° + \tan 45° \times \cos 0°$
(2) $\sin 90° \times \cos 60° - \tan 30° \times \tan 60°$

본문 해설

❶ 직각삼각형에서 직각이 아닌 내각의 크기가 0°이거나 90°인 것은 존재하지 않으므로 0°나 90°에 대한 삼각비의 값을 구할 때에는 각의 크기를 0°에 가깝게 하거나 90°에 가깝게 할 때 삼각비의 값이 어떻게 변하는가를 조사한다.



단, 각의 크기가 90°에 가까워질 때 탄젠트값은 한없이 커지므로 tan 90°의 값은 정할 수 없음을 그림을 통해 직관적으로 이해하게 한다.



3

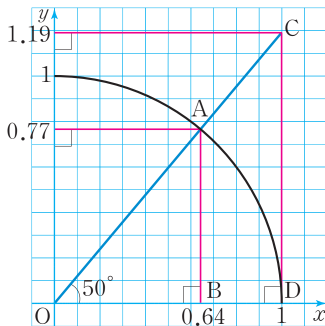
목표| 좌표평면을 이용하여 50°에 대한 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림의 △AOB에서 $\overline{OA}=1$, △COD에서 $\overline{OD}=1$ 이므로

(1) $\sin 50° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \overline{AB} = \mathbf{0.77}$

(2) $\cos 50° = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \overline{OB} = \mathbf{0.64}$

(3) $\tan 50° = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \overline{CD} = \mathbf{1.19}$



4

목표| 삼각비의 값을 이용하여 식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 0° \times \cos 90° + \tan 45° \times \cos 0°$

$= 0 \times 0 + 1 \times 1$

$= \mathbf{1}$

(2) $\sin 90° \times \cos 60° - \tan 30° \times \tan 60°$

$= 1 \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}$

$= \dfrac{1}{2} - 1$

$= \mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

본문 해설

❶ 삼각비는 직각삼각형의 두 변의 길이의 비이므로 그 값은 대부분 실제의 값이 아닌 반올림한 값이다. 삼각비의 표의 값도 대부분 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 값이다.

5

목표| 삼각비의 표와 계산기를 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 삼각비의 표를 이용하면 다음과 같다.

(1) $\sin 12^\circ = \mathbf{0.2079}$

(2) $\cos 47^\circ = \mathbf{0.6820}$

(3) $\tan 76^\circ = \mathbf{4.0108}$

계산기를 이용하면 다음과 같다.

(1) $\sin 12^\circ = \mathbf{0.2079116\cdots} \rightarrow \mathbf{0.2079}$

(2) $\cos 47^\circ = \mathbf{0.6819983\cdots} \rightarrow \mathbf{0.6820}$

(3) $\tan 76^\circ = \mathbf{4.0107809\cdots} \rightarrow \mathbf{4.0108}$

교과서 208 쪽

❶ 의 표는 삼각비의 림하여 소수 넷째 지까지 나타낸 것이다.

삼각비의 값을 구할 수 있는 계산기에서 sin, 2, 4, = 을 차례로 누르면 창에 $\sin 24^\circ$의 값이 나타난다.

0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각비의 값은 이 책의 부록에 있는 삼각비의 표를 이용하여 구할 수 있다.

이를테면 삼각비의 표에서 $\sin 24^\circ$의 값은 24°의 가로줄과 사인(sin)의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수와 같다.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
⋮	⋮	⋮	⋮
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
⋮	⋮	⋮	⋮

즉,

$$\sin 24^\circ = 0.4067$$

이다. 같은 방법으로 나머지 삼각비의 값을 구하면

$$\cos 24^\circ = 0.9135, \quad \tan 24^\circ = 0.4452$$

이다.

(참고) 삼각비의 표에 있는 삼각비의 값은 대부분 반올림한 값이지만 이 값을 나타낼 때에는 '='를 사용한다.

문제 5 삼각비의 표를 이용하여 다음 값을 구하여라. 또 계산기를 이용하여 다음 값을 구하고, 그 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타내어라.

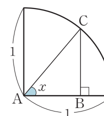
(1) $\sin 12^\circ$ (2) $\cos 47^\circ$ (3) $\tan 76^\circ$

추론 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원이 있다. 이 그림을 이용하여 다음의 각 경우에 $\sin x$와 $\cos x$의 값의 대소를 비교하여 보자.

(1) $x=45^\circ$인 경우

(2) $0^\circ < x < 45^\circ$인 경우

(3) $45^\circ < x < 90^\circ$인 경우



추/론

|출제 의도| 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 주어진 각에 대한 삼각비의 값을 분석하도록 하려는 문제이다.

풀이| $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=1$이므로

$$\sin x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \overline{BC}, \ \cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{AB}$$

$0^\circ < x < 90^\circ$일 때, x가 커지면 $\overline{BC}$는 길어지고 $\overline{AB}$는 짧아지므로 $\sin x$의 값은 점차 커지고, $\cos x$의 값은 점차 작아지는 것을 알 수 있다.

한편 $x=45^\circ$일 때, $\overline{BC}=\overline{AB}$이므로 $\sin x = \cos x$임을 알 수 있다.

따라서 주어진 각 경우에 $\sin x$와 $\cos x$의 값의 대소를 비교하면 다음과 같다.

(1) $x=45^\circ$인 경우 $\sin x = \cos x$

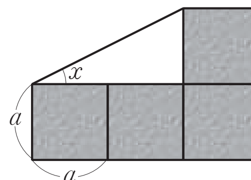
(2) $0^\circ < x < 45^\circ$인 경우 $\sin x < \cos x$

(3) $45^\circ < x < 90^\circ$인 경우 $\sin x > \cos x$

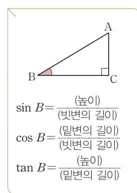
읽/기/자/료 피라미드 통로의 비밀

이집트에 있는 가장 큰 피라미드인 쿠푸왕의 피라미드는 높이가 147 m에 달한다. 그런데 이 피라미드의 내부로 들어가는 통로와 왕의 방으로 올라가는 통로의 경사각은 약 26.5°라고 한다. 왜 그럴까?

학자들은 다음 그림과 같이 단면이 정사각형인 돌을 쌓아 통로를 만들었기 때문에 $\tan x = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0.5$이고, 삼각비의 표에서 탄젠트값이 0.5에 가장 가까운 각을 찾으면 26°와 27° 사이에 있기 때문이 아닐까 추측하고 있다.

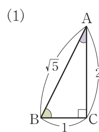


중/단/원 기초

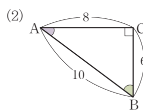


1 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B의 삼각비의 값을 각각 구하여라.

(1)



(2)



A / 삼각비	30°	45°	60°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 60^\circ+\cos 60^\circ$　(2) $\cos 60^\circ-\tan 45^\circ$

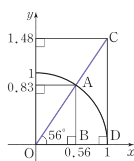
(3) $\sin 90^\circ\times\tan 30^\circ$　(4) $\cos 0^\circ\times\sin 45^\circ$

3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원이 있다. ∠AOB=56°일 때, 다음 삼각비의 값을 구하여라.

(1) $\sin 56^\circ$

(2) $\cos 56^\circ$

(3) $\tan 56^\circ$



4 삼각비의 표를 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin 53^\circ$　(2) $\cos 66^\circ$　(3) $\tan 79^\circ$

중/단/원 기초

1

목표| 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\tan A=\frac{1}{2}$

$\sin B=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos B=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\tan B=\frac{2}{1}=2$

(2) $\sin A=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\cos A=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$,

$\tan A=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$\sin B=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,

$\tan B=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

2

목표| 삼각비의 값을 이용하여 식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 60^\circ+\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(2) $\cos 60^\circ-\tan 45^\circ=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

(3) $\sin 90^\circ\times\tan 30^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $\cos 0^\circ\times\sin 45^\circ=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3

목표| 좌표평면을 이용하여 56°에 대한 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 56^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=0.83$

(2) $\cos 56^\circ=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=0.56$

(3) $\tan 56^\circ=\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=1.48$

4

목표| 삼각비의 표를 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 53^\circ=0.7986$

(2) $\cos 66^\circ=0.4067$

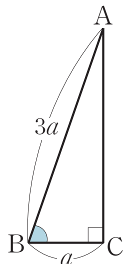
(3) $\tan 79^\circ=5.1446$

중/단/원 기본

1

목표| 직각삼각형에서 하나의 삼각비의 값을 알 때, 다른 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\cos B=\frac{1}{3}$이므로 $\overline{AB}=3a$, $\overline{BC}=a\ (a>0)$라고 하면



$\overline{AC}=\sqrt{(3a)^2-a^2}$

$=\sqrt{8a^2}=2\sqrt{2}a$

$\sin B=\frac{2\sqrt{2}a}{3a}=\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\tan B=\frac{2\sqrt{2}a}{a}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

2

목표| 직각삼각형에서 하나의 삼각비의 값을 알 때, 주어진 변의 길이를 이용하여 다른 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\cos A=\frac{3}{5}$이므로

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$, $\overline{AB}=10(\text{cm})$

$\overline{BC}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=\mathbf{8(cm)}$

3

목표| 직선이 x축과 이루는 각에 대한 탄젠트값과 직선의 기울기의 관계를 알게 한다.

풀이| $\tan a=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=$(직선의 기울기)$=\mathbf{\frac{5}{8}}$

4

목표| 삼각비의 값을 이용하여 식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 30^\circ+\cos 90^\circ+\tan 45^\circ-\sin 90^\circ$

$=\frac{1}{2}+0+1-1=\mathbf{\frac{1}{2}}$

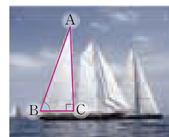
(2) $\sin 45^\circ\times\tan 30^\circ-\cos 0^\circ\times\tan 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-1\times\sqrt{3}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{6}-\sqrt{3}}$

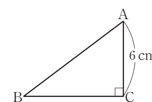
교과서 210 쪽

중/단/원 기본

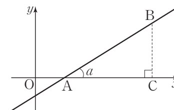
삼각비의 뜻 **1** 오른쪽 그림은 직각삼각형 모양의 돛을 단 요트이다. $\cos B=\frac{1}{3}$일 때, $\sin B$, $\tan B$의 값을 구하여라.



삼각비의 뜻 **2** 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=6$ cm이고 $\cos A=\frac{3}{5}$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.



삼각비의 뜻 **3** 오른쪽 그림에서 직선 AB의 기울기가 $\frac{5}{8}$일 때, $\tan a$의 값을 구하여라.

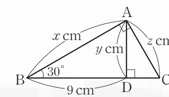


삼각비의 값 **4** 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 30^\circ+\cos 90^\circ+\tan 45^\circ-\sin 90^\circ$

(2) $\sin 45^\circ\times\tan 30^\circ-\cos 0^\circ\times\tan 60^\circ$

삼각비의 값 **5** 오른쪽 그림에서 x, y, z의 값을 각각 구하여라.



5

목표| 삼각비의 값을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\triangle ABD$에서 $\cos 30^\circ=\frac{9}{x}$이므로

$x=9\div\cos 30^\circ=9\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{18}{\sqrt{3}}=\mathbf{6\sqrt{3}}$

$\triangle ABD$에서 $\tan 30^\circ=\frac{y}{9}$이므로

$y=9\times\tan 30^\circ=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\mathbf{3\sqrt{3}}$

$\triangle ABC$에서 $\tan 30^\circ=\frac{z}{x}=\frac{z}{6\sqrt{3}}$이므로

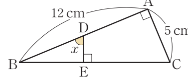
$z=6\sqrt{3}\times\tan 30^\circ=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\mathbf{6}$

교과서 211 쪽

중/단/원 실력

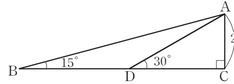
• 닮음인 두 삼각형을 찾아 본다.

1 오른쪽 그림에서 $\cos x$의 값을 구하여라.

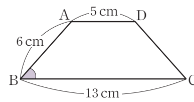


• ∠BAD의 크기를 구하여 본다.

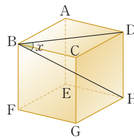
2 다음 그림을 이용하여 $\tan 15°$의 값을 구하여라.



3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$인 등변사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{AD}=5$ cm, $\overline{BC}=13$ cm일 때, $\tan B$의 값을 구하여라.



4 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 $\angle HBD=x$일 때, $\cos x$의 값을 구하여라.



$\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD$이므로

$30°=15°+\angle BAD$, $\angle BAD=15°$

따라서 △ABD는 이등변삼각형이므로

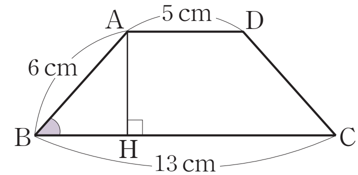
$\overline{BD}=\overline{AD}=4$

$$\tan 15°=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}+\overline{DC}}=\frac{2}{4+2\sqrt{3}}=\frac{2(4-2\sqrt{3})}{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$$

3

목표| 등변사다리꼴에서 직각삼각형을 그려 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 다음 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{BH}=\frac{13-5}{2}=4$(cm)

△ABH에서 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$(cm)

$\tan B=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

중/단/원 실력

1

목표| 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| △ABC ∽ △EBD이므로 $\angle C=x$

△ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$(cm)

$\cos x=\cos C=\mathbf{\frac{5}{13}}$

2

목표| 직각삼각형에서 삼각비를 이용하여 $\tan 15°$의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| △ADC에서 $\sin 30°=\frac{2}{\overline{AD}}$이므로

$\overline{AD}=2\div\sin 30°=2\div\frac{1}{2}=4$

$\overline{DC}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

4

목표| 입체도형에서 피타고라스 정리를 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직각삼각형 BCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 HBD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{HB}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{HD}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\cos x=\frac{\overline{BD}}{\overline{HB}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

2 삼각비의 활용

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있게 한다.
② 삼각비를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.
③ 삼각비를 활용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
2-1 거리 구하기	거리 구하기
2-2 넓이 구하기	삼각형의 넓이 구하기
	사각형의 넓이 구하기
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 212 쪽

2 삼각비의 활용

준 | 비 | 학 | 습

삼각형의 넓이
(삼각형의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times$(밑변의 길이)$\times$(높이)

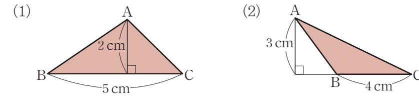
피타고라스 정리

$a=\sqrt{c^2-b^2}$
$b=\sqrt{c^2-a^2}$
$c=\sqrt{a^2+b^2}$

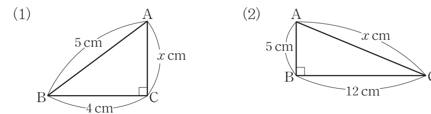
삼각비의 값

삼각비 \ A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1 다음 그림과 같은 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



2 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 x의 값을 구하여라.



3 다음을 계산하여라.

(1) $\sin 45^\circ+\cos 30^\circ$
(2) $2\sin 30^\circ-3\tan 60^\circ$
(3) $\cos 60^\circ\times\tan 30^\circ$

준비 학습의 해설

1

목표| 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times5\times2$
$=\mathbf{5(cm^2)}$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times3$
$=\mathbf{6(cm^2)}$

2

목표| 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$
(2) $x=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=\mathbf{13}$

3

목표| 삼각비의 값을 이용하여 식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 45^\circ+\cos 30^\circ$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\mathbf{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}$

(2) $2\sin 30^\circ-3\tan 60^\circ$
$=2\times\frac{1}{2}-3\times\sqrt{3}$
$=\mathbf{1-3\sqrt{3}}$

(3) $\cos 60^\circ\times\tan 30^\circ$
$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$
$=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

2-1 거리 구하기

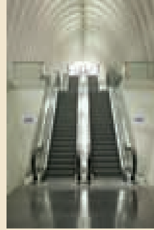
● 삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있다.

삼각비를 활용하여 거리를 어떻게 구하는가?

창의력 기르기

에스컬레이터의 경사

계단이나 에스컬레이터를 설계할 때에는 사람들이 안정감을 가지고 편안하게 이용할 수 있도록 인체 구조를 고려한다. 사람의 발바닥 길이를 220～280 mm라고 하면 발을 들어 올릴 때 부담이 적은 높이는 130～180 mm라고 한다. 이를 바탕으로 계단이나 에스컬레이터의 경사를 30° 내외로 하는 경우가 많다.

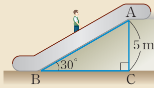


탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 높이가 5 m이고 경사가 30°인 에스컬레이터를 설치하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

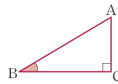
1 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 길이 사이의 관계를 삼각비를 이용하여 나타내어 보자.

2 삼각비를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구하는 방법을 말하여 보자.



삼각비를 활용하면 직접 잴 수 없는 두 지점 사이의 거리를 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 길이와 ∠B의 크기를 알고 있을 때, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 길이는 다음과 같이 구할 수 있다.



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\sin B \Rightarrow \overline{AC}=\overline{AB}\sin B$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\cos B \Rightarrow \overline{BC}=\overline{AB}\cos B$$

이와 같이 직각삼각형에서 한 변의 길이와 한 예각의 크기를 알 때, 삼각비를 이용하여 나머지 두 변의 길이를 구할 수 있다.

창의력 기르기 참/고/자/료

에스컬레이터는 1950년 미국 특허국에 의하여 이동 계단을 뜻하는 공공 영어로 지정될 때까지 오티스사의 등록 상품명이었다. 한국에서는 1941년 서울 화신백화점에 최초로 설치되었다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 삼각비를 이용하여 에스컬레이터의 길이를 구하는 방법을 생각해 봄으로써 삼각비를 활용하여 거리를 구하는 방법을 이해하게 하려는 것이다.

1. $\sin 30°=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$이므로 $\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{\sin 30°}$

2. $\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{\sin 30°}$이므로

$\overline{AB}=5\div\frac{1}{2}=\mathbf{10(m)}$

2-1 거리 구하기

소단원 지도 목표

① 삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 피타고라스 정리는 직각삼각형에서 두 변의 길이가 주어졌을 때 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있고, 삼각비는 직각삼각형에서 한 예각의 크기와 한 변의 길이가 주어졌을 때 다른 한 변의 길이를 구할 수 있음을 비교하여 지도한다.

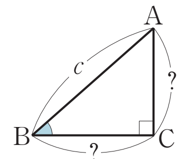
2. 삼각비의 활용은 단순한 소재를 이용하여 간단히 다루도록 하고, 직접 측정할 수 없는 거리나 높이, 삼각형의 변의 길이 등을 삼각비를 이용하여 구해 봄으로써 삼각비의 유용성을 알게 한다.

지/도/자/료 직각삼각형의 변의 길이

직각삼각형에서 한 예각의 크기와 한 변의 길이를 알면 삼각비를 이용하여 나머지 두 변의 길이를 구할 수 있다.

즉, ∠C=90°인 직각삼각형 ABC에서

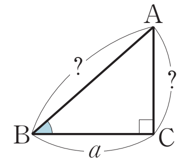
(1) ∠B의 크기와 변 AB의 길이 c를 알 때



$\sin B=\frac{\overline{AC}}{c}$에서 $\overline{AC}=c\sin B$

$\cos B=\frac{\overline{BC}}{c}$에서 $\overline{BC}=c\cos B$

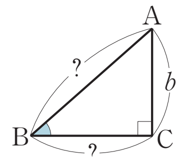
(2) ∠B의 크기와 변 BC의 길이 a를 알 때



$\cos B=\frac{a}{\overline{AB}}$에서 $\overline{AB}=\frac{a}{\cos B}$

$\tan B=\frac{\overline{AC}}{a}$에서 $\overline{AC}=a\tan B$

(3) ∠B의 크기와 변 AC의 길이 b를 알 때



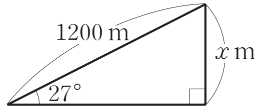
$\sin B=\frac{b}{\overline{AB}}$에서 $\overline{AB}=\frac{b}{\sin B}$

$\tan B=\frac{b}{\overline{BC}}$에서 $\overline{BC}=\frac{b}{\tan B}$

1

목표| 삼각비를 활용하여 비행기의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 비행기의 높이를 x m라고 하면



$\sin 27° = \frac{x}{1200}$

이므로 $x = 1200 \times \sin 27°$

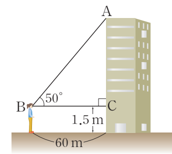
삼각비의 표에서 $\sin 27° = 0.4540$이므로

$x = 1200 \times 0.4540 = 544.8$

따라서 비행기는 지상으로부터 **544.8 m**의 높이에 있다.

교과서 214 쪽

예제 1 현진이가 어떤 건물로부터 60 m 떨어진 곳에서 건물의 꼭대기를 올려다본 각도가 50°이었다. 현진이의 눈높이가 1.5 m일 때, 건물의 높이를 구하여라.



● 풀이 △ABC는 직각삼각형이므로

$$\tan 50° = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{60}$$

$$\overline{AC} = 60 \tan 50°$$

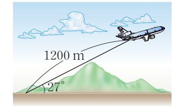
삼각비의 표에서 $\tan 50° = 1.1918$이므로

$$\overline{AC} = 60 \times 1.1918 = 71.508(\text{m})$$

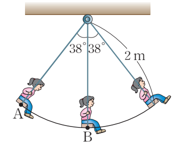
따라서 건물의 높이는 $71.508 + 1.5 = 73.008(\text{m})$

답 ● 73.008 m

문제 1 오른쪽 그림과 같이 비행기가 이륙한 후 27°의 각도로 1200 m의 거리를 비행하였다. 이때 비행기는 지상으로부터 몇 m의 높이에 있겠는가?



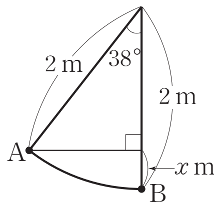
발전 문제 2 오른쪽 그림과 같이 줄의 길이가 2 m인 그네가 앞뒤로 38°씩 흔들렸을 때, A 지점은 B 지점보다 몇 m 더 높은지 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.



2

목표| 삼각비를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| A 지점이 B 지점보다 x m 더 높다고 하면



$\cos 38° = \frac{2-x}{2}$

삼각비의 표에서

$\cos 38° = 0.7880$이므로

$\frac{2-x}{2} = 0.7880$, $2-x = 2 \times 0.7880 = 1.576$

$x = 2 - 1.576 = 0.424$

따라서 A 지점은 B 지점보다 **0.42 m** 더 높다.

읽/기/자/료 삼각 측량

삼각 측량은 어떤 한 점의 좌표와 거리를 삼각형의 성질을 이용하여 알아내는 측량 방법의 하나로 측량, 항해, 천체 측량학, 로켓 공학, 토목 공학 등에 쓰인다.

삼각형의 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기를 알면 그 삼각형의 나머지 두 변의 길이를 알 수 있다는 원리를 이용하여 지형을 측량하는데, 정밀하게 길이를 잰 기선과 몇 개의 기준점을 설정하고 그것들을 이어 많은 삼각형의 그물을 만든 후 삼각법을 이용하여 계산한다.

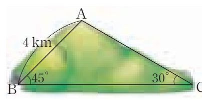
교과서 215 쪽

예 제 2

오른쪽 그림과 같이 산을 통과하는 터널을 만들려고 한다. 산꼭대기를 A라 하고, 터널의 양쪽 끝을 B, C라고 할 때,

$\overline{AB}=4\text{ km},\ \angle B=45^\circ,\ \angle C=30^\circ$

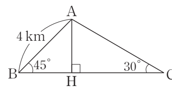
이다. 이 터널의 길이를 구하여라.



직각삼각형이 아닌 삼각형에서 한 변의 길이와 두 각의 크기를 알면 삼각비를 이용하여 나머지 두 변의 길이를 구할 수 있다.

● 풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 ABH에서

$$\cos 45^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BH}}{4}$$



이므로 $\overline{BH}=4\cos 45^\circ=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\,(\text{km})$

△ABH는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=2\sqrt{2}\,(\text{km})$

직각삼각형 ACH에서 $\tan 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}=\frac{2\sqrt{2}}{\overline{CH}}$이므로

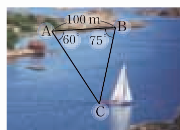
$$\overline{CH}=\frac{2\sqrt{2}}{\tan 30^\circ}=2\sqrt{2}\div\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{6}\,(\text{km})$$

따라서 터널의 길이는 $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}\,(\text{km})$

답 ● $(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})\text{ km}$

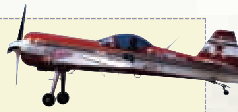
문 제 3

오른쪽 그림과 같이 바닷가의 두 지점 A, B 사이의 거리는 100 m이다. 두 지점 A, B에서 바다에 있는 배를 바라본 각도가 각각 60°, 75°일 때, 각 지점에서 배까지의 거리를 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구하여라.



창의 UP

현우는 지상으로부터 3 km 높이에서 일직선으로 다가오고 있는 경비행기의 평균 속력을 구하려고 올려다본 각도를 재어 보았다. 처음 올려다본 각도는 40°이고 20초 후에 올려다본 각도는 50°이었다. 이 상황을 그림으로 그려 보고, 경비행기의 평균 속력(km/s)을 구하는 방법을 설명하여라. (단, $\tan 40^\circ=0.8$, $\tan 50^\circ=1.2$이고, 현우의 키는 생각하지 않는다.)



직각삼각형 BCH에서

$$\cos 45^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}=\frac{50\sqrt{3}}{\overline{BC}}$$

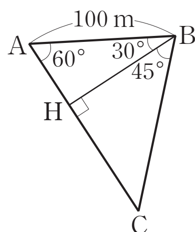
$$\overline{BC}=\frac{50\sqrt{3}}{\cos 45^\circ}=50\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=50\sqrt{6}=122.47\cdots(\text{m})$$ ➜ **122.5 m**

3

목표| 삼각비를 활용하여 각 지점에서 배까지의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 BAH에서



$$\cos 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AH}}{100}$$

$$\overline{AH}=100\times\cos 60^\circ$$

$$=100\times\frac{1}{2}=50(\text{m})$$

$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BH}}{100}$$

$$\overline{BH}=100\times\sin 60^\circ=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}(\text{m})$$

△BCH는 직각이등변삼각형이므로

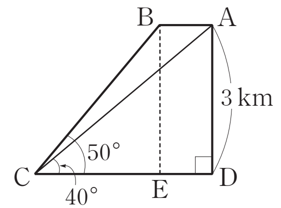
$\overline{CH}=\overline{BH}=50\sqrt{3}(\text{m})$

$\overline{AC}=50+50\sqrt{3}=136.60\cdots(\text{m})$ ➜ **136.6 m**

창의 UP

|출제 의도| 삼각비를 활용하여 평균 속력을 구하는 방법을 생각해 봄으로써 삼각비를 실생활 문제에 활용할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 처음 경비행기의 위치를 A, 20초 후의 경비행기의 위치를 B, 현우가 있는 지점을 C라고 하자.



$$\tan 40^\circ=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{3}{\overline{CD}}=0.8$$

$$\overline{CD}=\frac{3}{0.8}=3.75(\text{km})$$

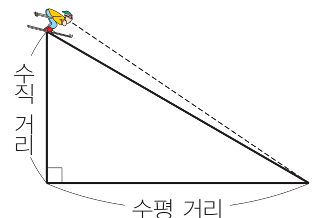
$$\tan 50^\circ=\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{3}{\overline{CE}}=1.2$$

$$\overline{CE}=\frac{3}{1.2}=2.5(\text{km})$$

따라서 $\overline{AB}=\overline{DE}=\overline{CD}-\overline{CE}=3.75-2.5=1.25(\text{km})$이고, $\overline{AB}$를 지나가는 데 걸린 시간이 20초이므로 경비행기의 평균 속력은 $\frac{1.25}{20}=$**0.0625(km/s)**이다.

읽/기/자/료 스키장의 경사도

스키를 탈 때 느끼는 슬로프의 경사 각도는 상당히 큰 것 같은데 실제로는 더 작다. 사람의 눈이 느끼는 경사 각도는 실제 설면의 경사 각도보다 크기 때문이다.



스키장의 경사도는 $\frac{(\text{수직 거리})}{(\text{수평 거리})}\times 100(\%)$으로 나타내고, 경사도가 100 %라는 것은 경사 각도가 45°라는 것을 의미한다.

2-2 넓이 구하기

소단원 지도 목표

① 삼각비를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.
② 삼각비를 활용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 0°에서 90°까지의 각도에 대한 삼각비만 다루었으므로, 둔각삼각형의 넓이를 구할 때 둔각을 예각으로 바꾸는 과정은 그림을 통하여 이해하게 한다.

2. 삼각비를 활용하여 직접 측정할 수 없는 삼각형의 넓이, 삼각형을 이용한 사각형의 넓이 등을 구해 봄으로써 삼각비의 유용성을 알게 한다.

교과서 216 쪽

2-2 넓이 구하기

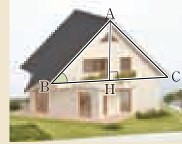
● 삼각비를 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.

삼각비를 활용하여 도형의 넓이를 어떻게 구하는가?

탐구 활동 오른쪽 그림과 같은 △ABC에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1 △ABC의 높이 $\overline{AH}$를 $\sin B$를 이용하여 나타내어 보자.

2 삼각비를 이용하여 △ABC의 넓이를 어떻게 구하는지 말하여 보자.



△ABC에서 두 변의 길이 a, c와 그 끼인각 ∠B의 크기를 알 때, △ABC의 넓이 S를 구하여 보자.

● 직각보다 작은 각을 예각이라 하고, 직각보다 크고 평각보다 작은 각을 둔각이라고 한다.

(1) ∠B가 예각인 경우

오른쪽 그림과 같이 △ABC의 꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH}$의 길이를 h라고 하자.

△ABH에서 $\sin B=\frac{h}{c}$이므로

$$h=c\sin B$$

이다.

따라서 △ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ac\sin B$$

(2) ∠B가 둔각인 경우

오른쪽 그림과 같이 △ABC의 꼭짓점 A에서 밑변 BC의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH}$의 길이를 h라고 하자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 삼각비를 활용하여 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 생각해 봄으로써 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 이해하게 하려는 것이다.

1. △ABH에서 $\sin B=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$

$\overline{AH}=\overline{AB}\times\sin B$

2. $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AB}\times\sin B$

읽/기/자/료 간단한 삼각비의 역사

• 기원전 6세기: 탈레스가 천문 관측의 기초를 구축, 피라미드의 높이를 측정함
• 기원전 2세기: 히파르코스가 구면삼각법을 창안하여 '현에 대한 수표'(현재의 사인함수표에 대응하는 것)를 제작
• 기원전 1세기: 메넬라우스가 구면에서 변과 각의 관계를 생각하는 구면삼각법을 연구
• 2세기: 프톨레마이오스가 '현에 대한 수표'가 수록되어 있는 "알마게스트" 저작
• 3세기: 중국의 수학자 유휘가 피타고라스 정리를 응용하여 바다의 섬까지의 거리를 측정하는 내용을 담은 "해도산경(海島算經)" 저작

△ABH에서 $\sin(180^\circ-B)=\frac{h}{c}$이므로

$$h=c\sin(180^\circ-B)$$

이다.

따라서 △ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ac\sin(180^\circ-B)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형의 넓이

△ABC에서 두 변의 길이 a, c와 그 끼인각 ∠B의 크기를 알 때, 이 삼각형의 넓이 S는

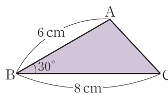
(1) ∠B가 예각이면 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$

(2) ∠B가 둔각이면 $S=\frac{1}{2}ac\sin(180^\circ-B)$

∠B가 직각이면
$S=\frac{1}{2}\times$(밑변의 길이)$\times$(높이)
$=\frac{1}{2}ac$

예 제 1

오른쪽 그림과 같이 두 변의 길이가 각각 6 cm, 8 cm이고, 그 끼인각의 크기가 30°인 △ABC의 넓이를 구하여라.



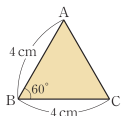
풀이 ∠B는 예각이므로 △ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin 30^\circ=24\times\frac{1}{2}=12(\text{cm}^2)$$

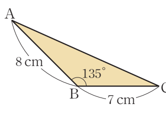
답 12 cm²

문제 1 다음 그림과 같은 △ABC의 넓이를 구하여라.

(1)



(2)



목표| 삼각비를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) ∠B는 예각이므로 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\mathbf{4\sqrt{3}\,(cm^2)}$$

(2) ∠B는 둔각이므로 △ABC의 넓이는

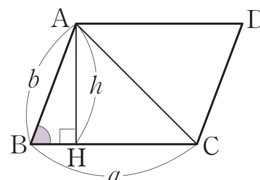
$$\frac{1}{2}\times8\times7\times\sin(180^\circ-135^\circ)=\frac{1}{2}\times8\times7\times\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times8\times7\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\mathbf{14\sqrt{2}(cm^2)}$$

지/도/자/료

1. 직각삼각형에서 삼각비의 뜻을 다루었는데 직각삼각형에서는 한 내각의 크기가 90°이므로 나머지 두 각은 모두 예각이다. 그러므로 둔각에 대한 삼각비는 삼각비의 뜻을 넘어서는 것이다. 둔각에 대한 삼각비는 삼각함수의 도입으로 생겨난 것으로 고등학교 교육과정에서 다룬다. 따라서 $\sin(180^\circ-A)=\sin A$는 다루지 않도록 한다.

2. 평행사변형에서 이웃하는 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때, 삼각비를 이용하면 평행사변형의 넓이를 구할 수 있다.
다음 그림의 평행사변형 ABCD의 꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{AH}=h$라고 하면 $h=b\sin B$이므로 평행사변형 ABCD의 넓이 S는

$$S=ah=ab\sin B$$



한편 위의 그림의 평행사변형 ABCD는 대각선 AC에 의하여 두 삼각형으로 나누어지므로 두 삼각형의 넓이의 합으로 평행사변형의 넓이를 구할 수도 있다.
이때 두 삼각형은 서로 합동이고, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin B$이므로 평행사변형 ABCD의 넓이 S는

$$S=2\times\frac{1}{2}ab\sin B=ab\sin B$$

3. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c를 알 때 삼각형의 넓이 S를 구하는 공식으로

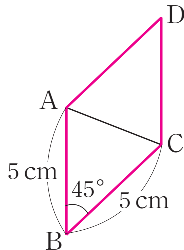
$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

가 있다.
이 공식은 고대 그리스의 수학자 헤론(Heron: ? 10~? 75)이 그의 저서 "측정론(Metrica)"에 이 공식이 성립하는 이유를 실어 놓아 헤론의 공식이라고 한다.

2

목표| 삼각비를 활용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC를 그으면 오른쪽 그림과 같이 두 개의 합동인 삼각형으로 나누어지므로



□ABCD$=2$△ABC

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times5\times5\times\sin45^\circ\right)$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times5\times5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

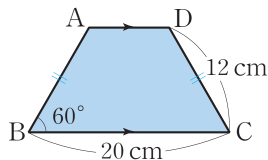
$=2\times\frac{25\sqrt{2}}{4}$

$=\mathbf{\frac{25\sqrt{2}}{2}(cm^2)}$

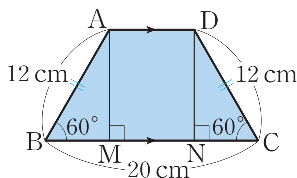
3

목표| 삼각비를 이용하여 사각형의 넓이를 구하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 삼각비를 적절히 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있게 하기 위한 문제이다.

예시| 오른쪽 그림과 같은 등변사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{CD}=12$ cm, $\overline{BC}=20$ cm, $\angle ABC=60^\circ$일 때, □ABCD의 넓이를 구하여라.



풀이| 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하면 △ABM에서



$\overline{BM}=12\cos60^\circ=6$(cm)

$\overline{AM}=12\sin60^\circ=6\sqrt{3}$(cm)

한편 △ABM≡△DCN이므로

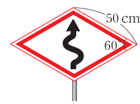
$\overline{CN}=\overline{BM}=6$(cm)

$\overline{AD}=\overline{MN}=20-(6+6)=8$(cm)

□ABCD$=\frac{1}{2}\times(8+20)\times6\sqrt{3}=\mathbf{84\sqrt{3}(cm^2)}$

교과서 218 쪽

예 제 2 오른쪽 그림의 표지판이 마름모 모양이라고 할 때, 그 넓이를 구하여라.



풀이 마름모는 두 개의 합동인 삼각형으로 이루어져 있으므로

(넓이)$=2\times\left(\frac{1}{2}\times50\times50\times\sin60^\circ\right)$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times50\times50\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

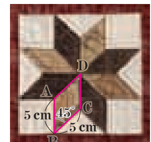
$=2\times625\sqrt{3}$

$=1250\sqrt{3}(cm^2)$

답 $1250\sqrt{3}$ cm²

문 제 2 오른쪽 그림에서 평행사변형 ABCD의 넓이를 구하여라.

평행사변형은 대각선을 그어 넓이가 같은 두 개의 삼각형으로 나눌 수 있다.



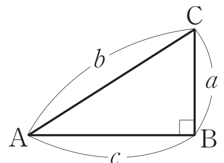
문 제 3 삼각비를 이용하여 사각형의 넓이를 구하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

의사소통 직각삼각형 ABC에서 $\angle B=90^\circ$인 경우에도 삼각형의 넓이 S를 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$로 나타낼 수 있는지 토의하여 보자.

의/사/소/통

|출제 의도| 삼각형의 넓이를 구할 때, 주어진 각이 직각일 때에도 삼각비를 이용할 수 있다는 것을 알게 하기 위한 문제이다.

풀이| 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC의 넓이는



$\frac{1}{2}\times$(밑변의 길이)$\times$(높이)$=\frac{1}{2}ac$

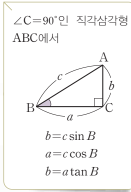
한편 $\angle B=90^\circ$이고 $\sin90^\circ=1$이므로

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\sin90^\circ=\frac{1}{2}ac$

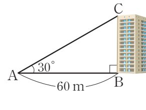
따라서 $\angle B=90^\circ$인 경우에도 삼각형의 넓이 S를 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$로 나타낼 수 있다.

교과서 219 쪽

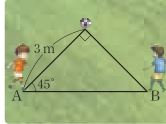
중/단/원 기초

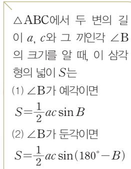


1 오른쪽 그림과 같이 A 지점과 건물의 꼭대기 C 지점을 연결한 직선이 지면과 이루는 각의 크기가 30°이고 A 지점과 B 지점 사이의 거리가 60 m라고 할 때, 이 건물의 높이를 구하여라.



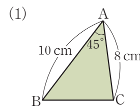
2 오른쪽 그림은 축구 경기의 한 장면이다. 두 선수 A, B 사이의 거리를 구하여라.



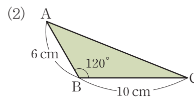


3 다음 그림과 같은 △ABC의 넓이를 구하여라.

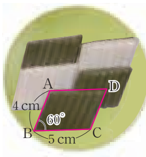
(1)



(2)



4 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD의 넓이를 구하여라.



중/단/원 기초

1

목표| 삼각비를 활용하여 건물의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\tan 30^\circ = \dfrac{\overline{BC}}{60}$

$\overline{BC} = 60 \times \tan 30^\circ = \mathbf{20\sqrt{3}(m)}$

2

목표| 삼각비를 활용하여 두 선수 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\cos 45^\circ = \dfrac{3}{\overline{AB}}$

$\overline{AB} = 3 \div \cos 45^\circ = 3 \div \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{3\sqrt{2}(m)}$

3

목표| 삼각비를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \sin 45^\circ$

$= 40 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \mathbf{20\sqrt{2}(cm^2)}$

(2) $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$

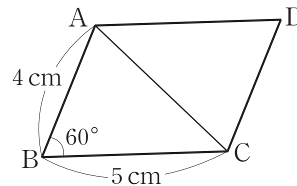
$= 30 \times \sin 60^\circ = 30 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \mathbf{15\sqrt{3}(cm^2)}$

4

목표| 삼각비를 활용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| □ABCD에서 대각선 AC를 그으면 다음 그림과 같이 두 개의 합동인 삼각형으로 나누어진다.



$\square ABCD = 2\triangle ABC$

$= 2 \times \left(\dfrac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ\right)$

$= 2 \times \left(\dfrac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2 \times 5\sqrt{3}$

$= \mathbf{10\sqrt{3}(cm^2)}$

중/단/원 기본

1

목표| 삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\angle BAH = 180° - 90° - 45° = \mathbf{45°}$

(2) $\angle CAH = 75° - 45° = \mathbf{30°}$

(3) $\triangle ACH$에서 $\cos 30° = \dfrac{\overline{AH}}{8}$

$\overline{AH} = 8 \times \cos 30° = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{4\sqrt{3}(m)}$

(4) $\triangle ABH$에서 $\sin 45° = \dfrac{4\sqrt{3}}{\overline{AB}}$

$\overline{AB} = 4\sqrt{3} \div \sin 45° = 4\sqrt{3} \div \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= 4\sqrt{3} \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \mathbf{4\sqrt{6}(m)}$

2

목표| 삼각비를 활용하여 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\triangle ACB$에서

$\tan 45° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, $1 = \dfrac{20}{\overline{BC}}$, $\overline{BC} = 20(m)$

$\triangle DCB$에서

$\tan 60° = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$, $\sqrt{3} = \dfrac{\overline{BD}}{20}$, $\overline{BD} = 20\sqrt{3}(m)$

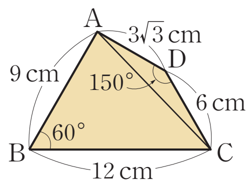
따라서 국기 게양대의 높이는

$\overline{AD} = \overline{BD} - \overline{AB} = \mathbf{20\sqrt{3} - 20(m)}$

3

목표| 삼각비를 활용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)



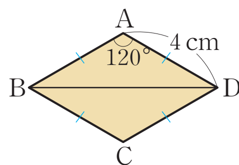
$\square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \dfrac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \sin 60°$

$+ \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 6 \times \sin(180° - 150°)$

$= 27\sqrt{3} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\dfrac{63\sqrt{3}}{2}(cm^2)}$

(2)



$\square ABCD$는 마름모이므로 $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$

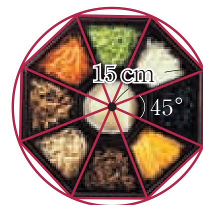
$\square ABCD = 2 \times \left\{ \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin(180° - 120°) \right\}$

$= \mathbf{8\sqrt{3}(cm^2)}$

4

목표| 삼각비를 활용하여 다각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 정팔각형은 합동인 8개의 이등변삼각형으로 나눌 수 있으므로 구하는 넓이는



$8 \times \left(\dfrac{1}{2} \times 15 \times 15 \times \sin 45° \right)$

$= \mathbf{450\sqrt{2}(cm^2)}$

교과서 220 쪽

중/단/원 기본

거리 구하기

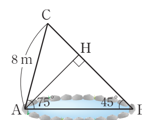
1 오른쪽 그림과 같이 연못의 가장자리에 있는 두 지점 A, B와 A에서 8 m 떨어진 지점 C에 대하여 $\angle BAC = 75°$, $\angle ABC = 45°$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\angle BAH$의 크기

(2) $\angle CAH$의 크기

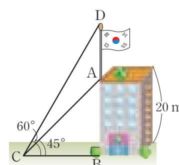
(3) 두 지점 A, H 사이의 거리

(4) 두 지점 A, B 사이의 거리



거리 구하기

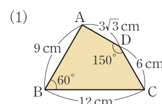
2 오른쪽 그림과 같이 국기 게양대가 빌딩 위에 세워져 있다. C 지점에서 건물 끝을 올려다본 각도가 45°이고, 국기 끝을 올려다본 각도가 60°이다. 건물의 높이가 20 m일 때, 국기 게양대의 높이를 구하여라.



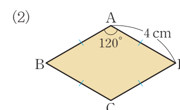
넓이 구하기

3 다음 그림과 같은 $\square ABCD$의 넓이를 구하여라.

(1)



(2)



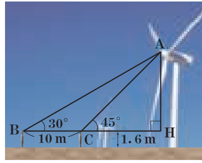
넓이 구하기

4 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15 cm인 원에 내접하는 정팔각형의 넓이를 구하여라.

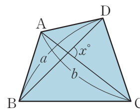
중/단/원 실력

• △ACH에서 $\overline{AH}=\overline{CH}$이므로 △ABH에서 $\overline{BH}=\overline{BC}+\overline{CH}=\overline{BC}+\overline{AH}$

1 오른쪽 그림과 같은 풍력 발전기의 높이를 구하려고 한다. 눈높이가 1.6 m인 사람이 B 지점에서 풍력 발전기의 꼭대기 A를 올려다본 각도가 30°이고, 10 m 앞으로 다가가 C 지점에서 풍력 발전기의 꼭대기 A를 올려다본 각도는 45°이다. 이때 풍력 발전기의 높이를 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구하여라.

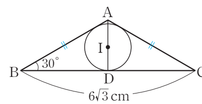


2 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 길이가 a, b이고, 두 대각선이 만나서 이루는 예각의 크기가 $x°$인 □ABCD의 넓이를 a, b를 사용한 식으로 나타내어라.

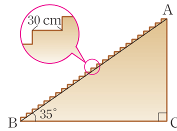


• △ABC의 넓이를 삼각비와 내접원을 이용하여 구해 본다.

3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 내접원 I의 반지름의 길이를 구하여라. (단, 점 D는 원 I의 접점이다.)



4 다음 그림과 같이 계단 한 개의 폭은 30 cm이고 총 291개의 계단이 설치되어 있을 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라. (단, 삼각비의 표를 이용한다.)



중/단/원 실력

1

목표| 삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AH}=x$ m라고 하자.

△ACH에서 $\overline{CH}=\overline{AH}=x$ m이므로

△ABH에서 $\tan 30°=\dfrac{x}{10+x}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{x}{10+x}$, $3x=\sqrt{3}(10+x)$

$x=\dfrac{10\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{10\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=5\sqrt{3}+5(\text{m})$

따라서 풍력 발전기의 높이는

$x+1.6=(5\sqrt{3}+5)+1.6$

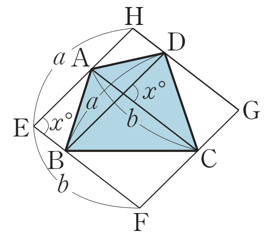
$=5\sqrt{3}+6.6$

$=15.26\cdots(\text{m})$ ➔ **15.3 m**

2

목표| 삼각비를 활용하여 사각형의 넓이를 대각선의 길이에 관한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 □ABCD에서 대각선 AC, BD에 평행한 직선을 그어 □EFGH를 만들면 이 사각형은 $\overline{EH}=a$, $\overline{EF}=b$, $\angle E=x°$인 평행사변형이고, 그 넓이는 □ABCD의 넓이의 2배이다.

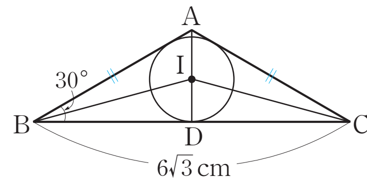


$\square ABCD=\dfrac{1}{2}\square EFGH=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}ab\sin x°}$

3

목표| 삼각비를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이|



△ABC는 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=3\sqrt{3}(\text{cm})$, $\overline{AB}=3\sqrt{3}\div\cos 30°=6(\text{cm})$

△ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3}\times\sin 30°=9\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

△ABC=△IAB+△IBC+△ICA이므로 원 I의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

$9\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times 6\times r+\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times r+\dfrac{1}{2}\times 6\times r$

$9\sqrt{3}=(6+3\sqrt{3})r$, $r=6\sqrt{3}-9(\text{cm})$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\boldsymbol{(6\sqrt{3}-9)}$ **cm**

4

목표| 삼각비를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BC}=30\times 291=8730(\text{cm})$

$\tan 35°=\dfrac{\overline{AC}}{8730}$이므로

$\overline{AC}=8730\times\tan 35°$

$=8730\times 0.7002=$ **6112.746(cm)**

수행 과제

● 수행 과제 의도

이 수행 과제는 바라본 시선의 각도를 경사 측정기인 클리노미터로 측정한 후 측정한 자료를 그림으로 그리고 높이를 구해 봄으로써 직접 재기 어려운 거리나 사물의 높이를 삼각비를 이용하여 구할 수 있다는 것을 알게 하기 위한 것이다.

과제 1 _예시

주어진 순서에 따라 클리노미터를 만들어 직접 측정하기 어려운 사물의 높이를 삼각비를 활용하여 구할 수 있다.

교과서 222 쪽

수행 과제

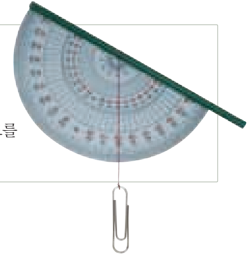
클리노미터를 이용하여 높이 재기

●준비물 각도기, 빨대, 테이프, 클립, 실

직접 재기 어려운 거리나 사물의 높이는 클리노미터라는 측정 기구를 이용하여 구할 수 있다. 각도기를 이용하여 클리노미터를 만들고, 주변에 있는 나무나 건물, 게양대 등의 높이를 구하여 보자.

과제 1 다음과 같은 순서로 클리노미터를 만들어 보자.

❶ 각도기에 빨대를 붙인다.
❷ 실의 한끝에는 클립을 매달고, 다른 한끝은 각도기의 한가운데에 붙인다.
❸ 빨대의 구멍으로 사물을 바라다보면 시선의 각도를 측정할 수 있다.



과제 2 각자 자신이 만든 클리노미터를 이용하여 주변의 나무, 건물, 게양대 등의 높이를 구하여 보자.

교과서 223 쪽

Ⅵ. 삼각비

학습에 대한 자/기/평/가

이름: ____________ (____학년 ____반 ____번)

점검 항목		도달 정도 (☹)	도달 정도 (😐)	도달 정도 (☺)
학습 내용	삼각비의 뜻을 아는가?			
	간단한 삼각비의 값을 구할 수 있는가?			
	삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있는가?			
	삼각비를 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?			
학습 태도	학습 준비물을 잘 준비하였는가?			
	수업 시간에 적극적으로 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			

재미있었거나 어려웠던 내용 적어 보기

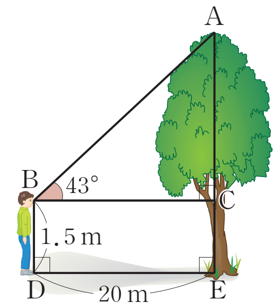
더 알고 싶거나 궁금한 점 적어 보기

스스로 평가하기

선생님 의견

과제 2 _예시

예를 들어 눈높이가 1.5 m인 측정자가 나무에서 20 m 떨어진 곳에서 나무의 높이를 재려고 클리노미터로 나무의 꼭대기를 올려다본 각도가 43°라고 하자. 이때 나무의 높이는 다음과 같이 그림을 그린 후 구할 수 있다.



$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=20$ m이므로

$\tan 43^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{20}$

$\overline{AC}=20\times 0.9325$

$=18.65(\text{m})$

따라서 구하는 나무의 높이는

$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}$

$=18.65+1.5=20.15(\text{m})$

교과서 224 쪽

VI. 삼각비

대단원 핵심 한눈에 보기

① 삼각비의 뜻

삼각비

(1) $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 고 하면

$\sin B=\frac{b}{c}$

$\cos B=\frac{a}{c}$

$\tan B=\frac{b}{a}$

(2) $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$를 통틀어 $\angle B$의 삼각비라고 한다.

② 삼각비의 값

30°, 45°, 60°의 삼각비의 값

삼각비 / A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

0°, 90°의 삼각비의 값

$\sin 0^\circ=0$, $\cos 0^\circ=1$, $\tan 0^\circ=0$

$\sin 90^\circ=1$, $\cos 90^\circ=0$

$\tan 90^\circ$의 값은 정할 수 없다.

예각의 삼각비의 값

0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각비의 값은 삼각비의 표나 계산기를 이용하여 구할 수 있다.

③ 삼각비의 활용

거리 구하기

$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서

$\sin B=\frac{b}{c}$이므로 $b=c\sin B$

$\cos B=\frac{a}{c}$이므로 $a=c\cos B$

$\tan B=\frac{b}{a}$이므로 $b=a\tan B$

넓이 구하기

$\triangle ABC$에서 두 변의 길이 a, c와 그 끼인각 $\angle B$의 크기를 알 때, 이 삼각형의 넓이 S는

(1) $\angle B$가 예각이면

$S=\frac{1}{2}ac\sin B$

(2) $\angle B$가 둔각이면

$S=\frac{1}{2}ac\sin(180^\circ-B)$

이번 단원에서 배운 용어와 기호

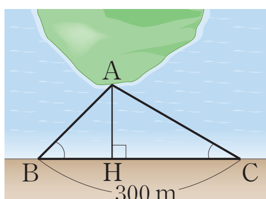
- 삼각비, 사인, 코사인, 탄젠트
- $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$

만화로 보는 수학 이야기

만화에서는 삼각비를 이용하면 섬과 육지 사이의 거리를 구할 수 있음을 보여 주고 있다.

생각 키/우/기

다음 그림과 같이 육지를 A, 섬에서 3명이 처음 있던 곳을 B, 300 m 떨어진 곳을 C라고 하자. 이때 $\angle ABC$와 $\angle ACB$의 크기를 알면 섬에서 육지까지의 거리인 $\overline{AH}$의 길이를 알 수 있다.



지도 내용

1. 삼각비의 뜻과 0°, 30°, 45°, 60°, 90°의 삼각비의 값을 알고, 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 임의의 예각에 대한 삼각비의 값을 구할 수 있도록 한다.

2. 삼각비를 활용하여 한 예각의 크기와 한 변의 길이를 알 때 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있고, 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때 삼각형의 넓이를 구할 수 있도록 한다.

교과서 225 쪽

만화로 보는 수학 이야기

무인도 탈출하기

생각 키/우/기

위의 내용과 같이 섬과 육지가 떨어져 있고 섬에서의 두 사람 사이의 거리가 300 m일 때, 육지까지의 거리를 알아내기 위해 필요한 정보를 모두 말하여 보자.

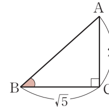
대 / 단 / 원 평가 문제

교과서 226 쪽

대 / 단 / 원 평가 문제

선/택/형

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\cos B \times \tan B$의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{3}{2}$
⑤ $\sqrt{5}$

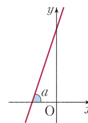
2 $\tan B=3$일 때, $\sin B-\cos B$의 값은?

① $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

3 다음 중에서 계산이 옳은 것은?

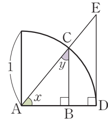
① $\sin 0^\circ+\cos 90^\circ=1$
② $\sin 90^\circ+\tan 45^\circ=2$
③ $\sin 45^\circ+\cos 45^\circ=2\sqrt{2}$
④ $\tan 30^\circ-\tan 60^\circ=\sqrt{3}$
⑤ $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ=1+\sqrt{3}$

4 오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=3x+6$의 그래프가 x축과 만나서 생기는 예각의 크기를 a라고 할 때, $\tan a$의 값은?



① $\sqrt{3}$ ② 2
③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$
⑤ 3

5 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에 대하여 옳지 않은 것은?

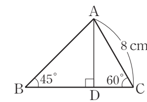


① $\sin x=\overline{BC}$
② $\sin y=\overline{AB}$
③ $\cos x=\overline{AB}$
④ $\cos y=\overline{AC}$
⑤ $\tan x=\overline{DE}$

6 다음 삼각비의 값 중에서 가장 큰 것은?

① $\sin 0^\circ$ ② $\sin 30^\circ$ ③ $\cos 30^\circ$
④ $\sin 45^\circ$ ⑤ $\cos 60^\circ$

7 다음 그림에서 $\overline{AB}$의 길이는?



① $3\sqrt{3}$ cm ② $4\sqrt{3}$ cm ③ $3\sqrt{6}$ cm
④ $4\sqrt{6}$ cm ⑤ $8\sqrt{3}$ cm

8 한 변의 길이가 8 cm인 마름모 ABCD에서 $\angle B=30^\circ$일 때, 마름모의 넓이는?

① 16 cm^2 ② 24 cm^2 ③ 32 cm^2
④ 36 cm^2 ⑤ 48 cm^2

1

목표| 두 변의 길이가 주어진 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$

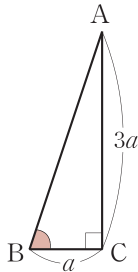
$\cos B\times\tan B=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$

답 ②

2

목표| 직각삼각형에서 하나의 삼각비의 값을 알 때, 다른 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AC}=3a$, $\overline{BC}=a\ (a>0)$로 놓으면



$\overline{AB}=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$

$\sin B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\sin B-\cos B$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

답 ①

3

목표| 특수각의 삼각비의 값을 알게 한다.

풀이| ① $\sin 0^\circ+\cos 90^\circ=0+0=0$

② $\sin 90^\circ+\tan 45^\circ=1+1=2$

③ $\sin 45^\circ+\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

④ $\tan 30^\circ-\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

답 ②

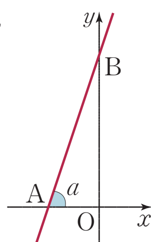
4

목표| 직선이 x축과 이루는 각에 대한 탄젠트값과 직선의 기울기의 관계를 알게 한다.

풀이| $y=3x+6$의 그래프의 x절편은 -2, y절편은 6이므로 오른쪽 그림에서

$\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=6$

$\tan a=\frac{6}{2}=3$



답 ⑤

5

목표| 반지름의 길이가 1인 사분원에서 삼각비의 값을 선분의 길이로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| ④ $\cos y=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\overline{BC}$

답 ④

6

목표| 특수각의 삼각비의 값을 알게 한다.

풀이| ① $\sin 0^\circ=0$ ② $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

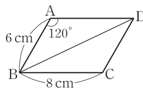
③ $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

따라서 $\cos 30^\circ$의 값이 가장 크다.

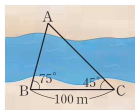
답 ③

9 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 대각선 BD의 길이는?



① $2\sqrt{37}$ cm　② $3\sqrt{37}$ cm
③ $4\sqrt{37}$ cm　④ $5\sqrt{37}$ cm
⑤ $6\sqrt{37}$ cm

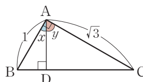
10 오른쪽 그림은 강의 양쪽에 있는 두 지점 A, B 사이의 거리를 알아보기 위하여 측량한 것이다. 두 지점 A, B 사이의 거리는?



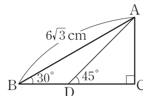
① $50\sqrt{2}$ m　② $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m
③ $\frac{100\sqrt{6}}{3}$ m　④ $100\sqrt{2}$ m
⑤ $100\sqrt{6}$ m

서/답/형

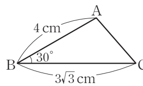
11 다음 그림에서 $\cos x+\sin y$의 값을 구하여라.



12 다음 그림에서 $\overline{BD}$의 길이를 구하여라.

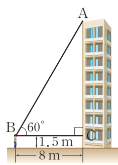


13 다음 그림과 같은 △ABC에서 $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.



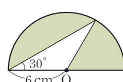
|서술형|

14 오른쪽 그림과 같이 건물에서 8 m 떨어진 지점에서 건물의 꼭대기를 올려다본 각도가 60°이었다. 사람의 눈높이가 1.5 m일 때, 건물의 높이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, $\sqrt{3}=1.73$으로 계산한다.)



|서술형|

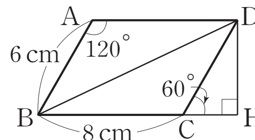
15 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6 cm인 반원에서 색칠한 부분의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



9

목표| 삼각비를 활용하여 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이|



위의 그림과 같이 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라고 하면 △DCH에서

$\sin 60^\circ=\frac{\overline{DH}}{6}$, $\overline{DH}=3\sqrt{3}$(cm)

$\cos 60^\circ=\frac{\overline{CH}}{6}$, $\overline{CH}=3$(cm)

따라서 △DBH에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{DH}^2}$

$=\sqrt{11^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{37}$(cm)

답 ①

7

목표| 삼각비를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △ACD에서　$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AD}}{8}$

$\overline{AD}=8\times\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$(cm)

△ABD에서　$\sin 45^\circ=\frac{4\sqrt{3}}{\overline{AB}}$

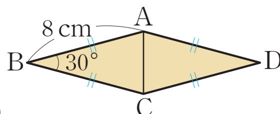
$\overline{AB}=4\sqrt{3}\div\sin 45^\circ=4\sqrt{6}$(cm)

답 ④

8

목표| 삼각비를 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| □ABCD



$=2\times\triangle ABC$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin 30^\circ\right)$

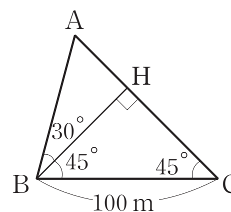
$=32(\text{cm}^2)$

답 ③

10

목표| 삼각비를 활용하여 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 △BCH에서



$\cos 45^\circ=\frac{\overline{BH}}{100}$

$\overline{BH}=50\sqrt{2}$(m)

△ABH에서

$\cos 30^\circ=\frac{50\sqrt{2}}{\overline{AB}}$

$\overline{AB}=\frac{100\sqrt{6}}{3}$(m)

답 ③

11

목표| 크기가 같은 각을 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BC}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\angle B=y$, $\angle C=x$이므로 $\triangle ABC$에서

$\cos x+\sin y=\cos C+\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

12

목표| 삼각비를 활용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\triangle ABC$에서

$\sin 30^\circ=\frac{\overline{AC}}{6\sqrt{3}}$, $\overline{AC}=3\sqrt{3}(\text{cm})$

$\cos 30^\circ=\frac{\overline{BC}}{6\sqrt{3}}$, $\overline{BC}=9(\text{cm})$

$\triangle ADC$에서

$\overline{DC}=\overline{AC}=3\sqrt{3}(\text{cm})$

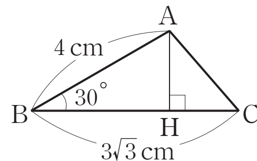
$\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=9-3\sqrt{3}(\text{cm})$

답 $(9-3\sqrt{3})$ cm

13

목표| 삼각비를 활용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\triangle ABH$에서



$\sin 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{4}$, $\overline{AH}=2(\text{cm})$

$\cos 30^\circ=\frac{\overline{BH}}{4}$, $\overline{BH}=2\sqrt{3}(\text{cm})$

$\overline{CH}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}(\text{cm})$이므로 $\triangle ACH$에서

$\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}(\text{cm})$

답 $\sqrt{7}$ cm

14

목표| 삼각비를 활용하여 건물의 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\tan 60^\circ=\frac{\overline{AC}}{8}$

$\overline{AC}=8\sqrt{3}(\text{m})$ …㉠

따라서 건물의 높이는

$8\sqrt{3}+1.5=8\times1.73+1.5$

$=15.34(\text{m})$ …㉡

답 15.34 m

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\overline{AC}$의 길이 구하기	㉠	60%
답 구하기	건물의 높이 구하기	㉡	40%

15

목표| 삼각비를 활용하여 색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 반원의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times6^2=18\pi(\text{cm}^2)$ …㉠

색칠한 부분을 제외한 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times6\times\sin(180^\circ-120^\circ)=9\sqrt{3}(\text{cm}^2)$ …㉡

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$(18\pi-9\sqrt{3})\ \text{cm}^2$ …㉢

답 $(18\pi-9\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	반원의 넓이 구하기	㉠	40%
	둔각삼각형의 넓이 구하기	㉡	40%
답 구하기	색칠한 부분의 넓이 구하기	㉢	20%

교과서 228 쪽

수학 산책

소설 속의 삼각비 망해도법

조선 시대 중반 몰락한 농민이나 백정과 같은 천민들을 규합하여 지배층의 수탈 정치에 저항한 임꺽정은 홍길동, 장길산과 함께 조선의 3대 도적으로 알려져 있는데, 이들 중 홍길동을 제외한 나머지 두 사람은 실존 인물이다.

임꺽정은 경기도 양주에서 백정의 신분으로 태어나 황해도에서 어렵게 생활하다가 비슷한 처지에 있던 수십 명의 사람들과 황해도의 산악 지대를 중심으로 도적 활동을 시작하였다. 그는 날쎄고 용맹스러우며 지혜까지 갖추고 있어서 1559년경 황해도, 경기도, 평안도까지 활동 영역을 넓혔다. 그는 주로 관청이나 양반집을 습격하여 이들이 백성들로부터 억지로 거두어들인 재물을 빼앗아 백성들에게 다시 나누어 주었고, 이 때문에 백성들은 그를 의적이라고 불렀다.

당시 조정에서는 여러 차례 관군을 동원하여 임꺽정을 잡으려고 하였지만 번번이 실패하였고, 1559년에는 개성부 포도관 이억근마저 임꺽정 일당에게 죽임을 당하였다. 관군은 여러 가지 방법으로 임꺽정을 잡으려 하였지만 쉽지 않았다. 하지만 결국 1560년에 아내와 부하들이 체포되었고, 참모 서림과 형인 가도치까지 체포되면서 세력이 크게 위축되었다. 관군에게 쫓겨 도망을 다니던 임꺽정은 1562년 1월 구월산에서 부상을 입고 체포된 지 15일 만에 사형당하였다.

교과서 229 쪽

특히 임꺽정은 벽초 홍명희의 소설 "임꺽정(林巨正)"을 통하여 우리에게 홍길동과 같이 친숙한 인물이 되었다.

이 소설 속에는 다음과 같은 구절이 있다.

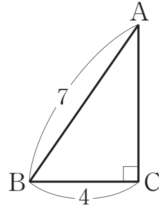
"서림이가 김억석이와 실없는 수작을 하는 동안에 황천동이와 길막봉이는 매로바위 밑에 와서 바위를 치어다보며 서너 길 되느니 못 되느니 눈어림을 다투고 있었다. 서림이가 와서 치어다보고 '이 바위 높이쯤은 긴 바지랭대루 잴 수가 있을지 모르지만 잴 수 없다구 치더래두 망해도법(望海圖法)만 알면 대번 바위 높이를 알 수가 있소. 그 아는 법은 조그만 나무때기를 바위와 같은 방향으로 세우구 그림자 길이를 재어 보구 그 다음에 바위의 그림자 길이만 재어 보면 바위 높이는 자연 알게 되우. 지금 가령 한 자 되는 나무때기의 그림자가 두 자가 되었는데 바위 그림자는 스무 자라구 하면 바위 높이는 열 자가 아니겠소.' 수리(數理)를 알거냥하고 한바탕 잘 지껄이었다."

망해도법을 이용하여 매로바위의 높이를 측정하는 대목인데, 소설에 나오는 '망해도법'은 '멀리 바다의 섬을 바라보아 거리를 재는 방법'이라는 뜻으로, 결국 삼각비를 이용하여 거리나 높이를 재는 방법이다. 우리나라에서는 측량법이 독자적으로 발전하여 왔으며 망해도법에 관한 저술이 전해 오고 있다.

망해도법과 같이 삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 계산하는 방법은 그 역사가 매우 깊으며 세계 여러 나라에서 천문학, 점성술, 토지 측량과 같은 실생활에 널리 사용되었다.

선/택/형

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 옳은 것은? [5점]



① $\sin A=\frac{7}{4}$

② $\cos A=\frac{\sqrt{33}}{7}$

③ $\tan A=\frac{\sqrt{33}}{4}$

④ $\sin B=\frac{4}{7}$

⑤ $\cos B=\frac{7\sqrt{33}}{33}$

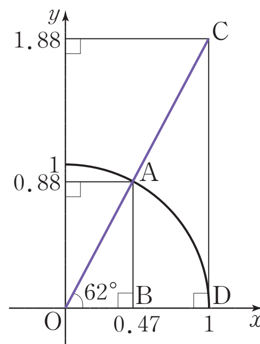
2 $\tan A=\sqrt{3}$일 때, 다음 중 대소 관계가 옳은 것은? (단, $0^\circ \le A \le 90^\circ$) [5점]

① $\cos A<\sin A<\tan A$
② $\cos A<\tan A<\sin A$
③ $\sin A<\cos A<\tan A$
④ $\sin A<\tan A<\cos A$
⑤ $\tan A<\sin A<\cos A$

3 $\frac{\cos 30^\circ-\sin 30^\circ}{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}$를 계산하면? [5점]

① $\sqrt{3}-3$ ② $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ 2

4 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에서 $\tan 62^\circ$의 값은? [5점]

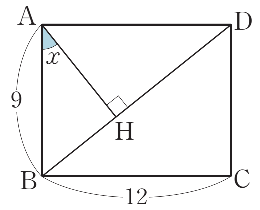


① 0.367 ② 0.47
③ 0.88 ④ 1
⑤ 1.88

5 $\angle C=90^\circ$인 $\triangle ABC$에서 $\cos B=\frac{1}{3}$일 때, $\frac{\sin B}{3+\tan B}$의 값은? [5점]

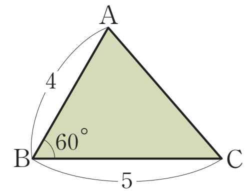
① $\sqrt{2}-\frac{8}{3}$ ② $\sqrt{2}-\frac{4}{3}$ ③ $2\sqrt{2}-\frac{8}{3}$
④ $2\sqrt{2}-\frac{4}{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}-\frac{8}{3}$

6 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\cos x+\sin x$의 값은? [6점]



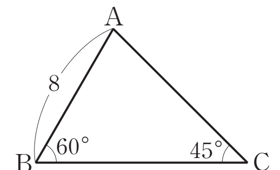
① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$
④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{11}{5}$

7 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC의 넓이는? [5점]



① $5\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$
③ $5\sqrt{6}$ ④ $6\sqrt{6}$
⑤ $10\sqrt{2}$

8 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [5점]

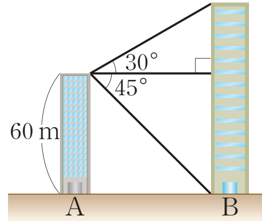


① $2+2\sqrt{6}$ ② $4+2\sqrt{3}$ ③ $4+4\sqrt{3}$
④ $6+2\sqrt{3}$ ⑤ $6+2\sqrt{6}$

9 다음 중에서 sin 90°와 값이 같은 것을 모두 고르면? (정답 2개) [5점]

① sin 0° ② cos 0° ③ cos 90°
④ tan 45° ⑤ tan 90°

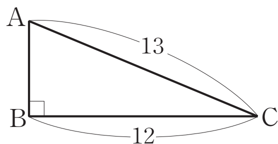
10 오른쪽 그림과 같은 건물 A의 옥상에서 건물 B를 올려다본 각의 크기는 30°, 내려다본 각의 크기는 45°이다. 건물 A의 높이가 60 m일 때, 건물 B의 높이는? [6점]



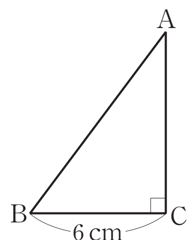
① 60 m ② $60\sqrt{2}$ m
③ $60\sqrt{3}$ m ④ $(40+20\sqrt{3})$ m
⑤ $(60+20\sqrt{3})$ m

서/답/형

11 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\sin A\times\tan C$의 값을 구하여라. [6점]

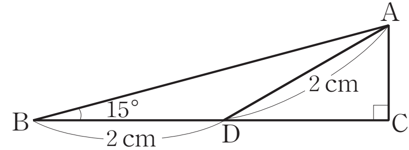


12 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=6$ cm, $\sin A=\frac{3}{5}$일 때, 다음을 구하여라. [7점]

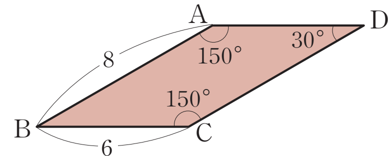


(1) $\overline{AB}$의 길이
(2) $\tan A$

13 다음 그림을 이용하여 tan 15°의 값을 구하여라. [8점]

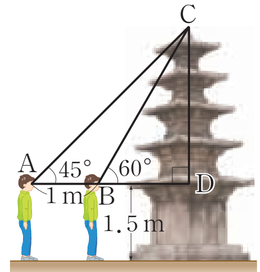


14 다음 그림과 같은 사각형 ABCD의 넓이를 구하여라. [7점]



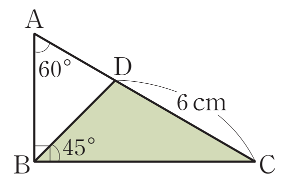
| 서술형 |

15 오른쪽 그림과 같은 탑의 높이를 구하려고 한다. 눈높이가 1.5 m인 사람이 A 지점과 B 지점에서 꼭대기 C를 올려다본 각도가 각각 45°, 60°였다. 이때 탑의 높이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, $\sqrt{3}=1.73$으로 계산한다.) [10점]



| 서술형 |

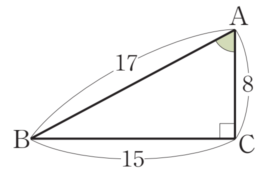
16 오른쪽 그림에서 △DBC의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [10점]



60점 미만이면 **하 · 수준** 문제를, 60점 이상 80점 미만이면 **중 · 수준** 문제를, 80점 이상이면 **상 · 수준** 문제를 풀어 보세요.

하·수준

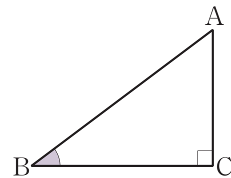
1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 ∠A에 대한 삼각비의 값을 구하여라.



2 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서

$$\tan B=\frac{3}{4}$$

일 때, $\sin B$, $\cos B$의 값을 구하여라.



3 다음을 계산하여라.

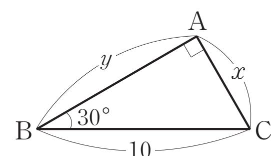
(1) $\sin 45^\circ+\cos 60^\circ$

(2) $\sin 60^\circ\times\tan 30^\circ$

(3) $\sin 30^\circ-\cos 30^\circ$

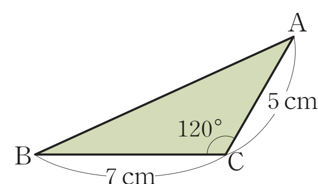
(4) $\cos 45^\circ\div\sin 60^\circ$

4 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 x, y의 값을 각각 구하여라.



5 다음은 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\square\times 7\times\sin\square^\circ$$
$$=\square\,(\text{cm}^2)$$

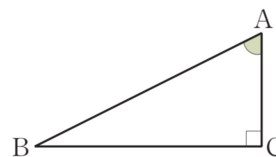


중 · 수준

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$

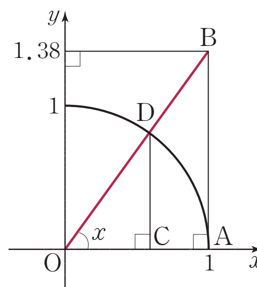
일 때, $\sin A + \cos A$의 값을 구하여라.



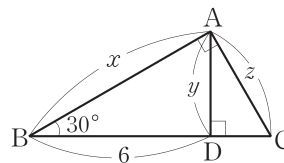
2 $2\tan 45^\circ \cos 60^\circ - \frac{1}{2}\cos 30^\circ - 1$의 값을 구하여라.

3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원이 있다. 다음 삼각비의 표를 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구하여라.

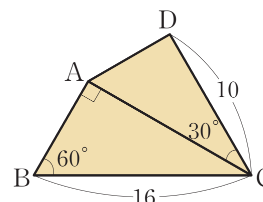
각도	sin	cos	tan
53°	0.80	0.60	1.33
54°	0.81	0.59	1.38
55°	0.82	0.57	1.43
56°	0.83	0.56	1.48



4 오른쪽 그림에서 x, y, z의 값을 각각 구하여라.

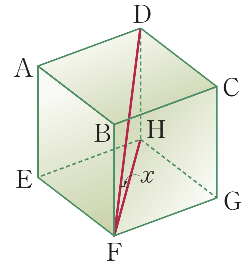


5 오른쪽 그림과 같은 사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.

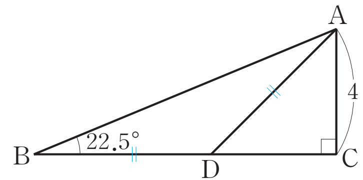


상·수준

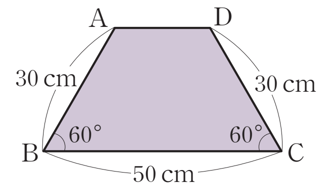
1 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 $\sin x \times \cos x$의 값을 구하여라.



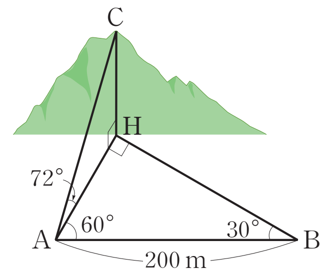
2 오른쪽 그림에서 $\angle C=90^{\circ}$, $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\angle B=22.5^{\circ}$일 때, $\tan 22.5^{\circ}$의 값을 구하여라.



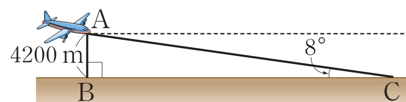
3 오른쪽 그림과 같은 등변사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하여라.



4 산의 높이 $\overline{CH}$를 구하기 위하여 산 아래쪽의 수평면 위에 200 m 떨어진 두 지점 A, B를 잡고 측량하였더니 오른쪽 그림과 같았다. 이때 산의 높이를 구하여라. (단, $\tan 72^{\circ}=3.1$로 계산한다.)



5 다음 그림과 같이 지면으로부터 4200 m의 상공에서 날고 있는 비행기가 수평면과 8°를 유지하면서 매초 200 m의 평균 속력으로 착륙하려고 한다. 이때 착륙하는 데 걸리는 시간을 구하여라. (단, $\sin 82^{\circ}=0.99$, $\cos 82^{\circ}=0.14$로 계산한다.)



1 목표| 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| ② $\overline{AC}=\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33}$이므로 $\cos A=\frac{\sqrt{33}}{7}$

답 ②

2 목표| 삼각비의 값을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\tan A=\sqrt{3}$에서 $A=60^\circ$이므로

$\sin A=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}$이므로 $\cos A<\sin A<\tan A$

답 ①

3 목표| 특수각의 삼각비의 값을 알게 한다.

풀이| $\frac{\cos 30^\circ-\sin 30^\circ}{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\div(\sqrt{3}-1)$

$=\frac{1}{2}$

답 ③

4 목표| 좌표평면을 이용하여 62°에 대한 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

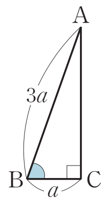
풀이| $\tan 62^\circ=\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\frac{1.88}{1}=1.88$

답 ⑤

5 목표| 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}=3a$, $\overline{BC}=a\ (a>0)$로 놓으면

$\overline{AC}=\sqrt{(3a)^2-a^2}=\sqrt{8a^2}=2\sqrt{2}a$이므로



$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan B=2\sqrt{2}$

$\frac{\sin B}{3+\tan B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\div(3+2\sqrt{2})$

$=2\sqrt{2}-\frac{8}{3}$

답 ③

6 목표| 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\angle DBC=\angle BAH=x$

$\triangle BCD$에서 $\overline{BD}=\sqrt{9^2+12^2}=15$

$\cos x=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\frac{4}{5}$, $\sin x=\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}}=\frac{3}{5}$

$\cos x+\sin x=\frac{7}{5}$

답 ③

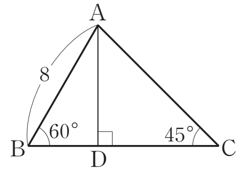
7 목표| 삼각비를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin 60^\circ=5\sqrt{3}$

답 ①

8 목표| 삼각비를 활용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라고 하면 $\overline{BD}=8\cos 60^\circ=4$



$\overline{AD}=8\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$

$\overline{CD}=\overline{AD}=4\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=4+4\sqrt{3}$

답 ③

9 목표| 특수각의 삼각비의 값을 알게 한다.

풀이| $\sin 90^\circ=\cos 0^\circ=\tan 45^\circ=1$

답 ②, ④

10 목표| 삼각비를 활용하여 높이를 구할 수 있게 한다.

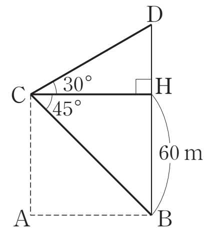
풀이| $\overline{CH}=\overline{BH}=60$(m)

$\triangle DCH$에서

$\overline{DH}=60\tan 30^\circ=20\sqrt{3}$(m)

따라서 건물 B의 높이는

$(60+20\sqrt{3})$ m이다.



답 ⑤

11 목표| 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

$\sin A\times\tan C=\frac{12}{13}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{13}$

답 $\frac{5}{13}$

12 목표| 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin A=\frac{6}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$이므로 $\overline{AB}=10$(cm)

(2) $\overline{AC}=\sqrt{10^2-6^2}=8$이므로 $\tan A=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

답 (1) 10 cm (2) $\frac{3}{4}$

13 목표| 직각삼각형에서 tan 15°의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| △ABD는 이등변삼각형이므로

$\angle DAB = \angle DBA = 15°$, $\angle ADC = 30°$

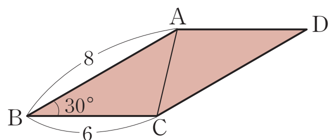
$\overline{AC} = 2\sin 30° = 1$, $\overline{DC} = 2\cos 30° = \sqrt{3}$

$\tan 15° = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

답 $2-\sqrt{3}$

14 목표| 삼각비를 활용하여 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\angle B = 30°$이므로 □ABCD는 평행사변형이다.



□ABCD

$= 2\triangle ABC$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 30°\right) = 24$

답 24

15 목표| 삼각비를 활용하여 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{CD} = x$ m라고 하면 $\overline{AD} = \overline{CD} = x$ m이므로 $\overline{BD} = (x-1)$ m이다. △CBD에서

$\tan 60° = \frac{x}{x-1}$, $\sqrt{3} = \frac{x}{x-1}$, $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CD} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$(m) …㉠

따라서 탑의 높이는

$1.5 + \frac{3+\sqrt{3}}{2} = 1.5 + \frac{3+1.73}{2} = 3.865$(m) …㉡

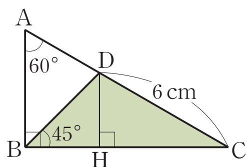
답 3.865 m

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\overline{CD}$의 길이 구하기	㉠	7점
답 구하기	탑의 높이 구하기	㉡	3점

16 목표| 삼각비를 활용하여 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △DBC의 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\angle ACB = 30°$이므로 △DCH에서



$\overline{DH} = 6\sin 30° = 3$(cm) …㉠

$\overline{CH} = 6\cos 30° = 3\sqrt{3}$(cm)

$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = \overline{DH} + \overline{CH} = 3+3\sqrt{3}$(cm) …㉡

$\triangle DBC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{DH}$

$= \frac{9+9\sqrt{3}}{2}$(cm²) …㉢

답 $\frac{9+9\sqrt{3}}{2}$ cm²

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	삼각형의 높이 구하기	㉠	4점
	삼각형의 밑변의 길이 구하기	㉡	4점
답 구하기	삼각형의 넓이 구하기	㉢	2점

하·수준

1 목표| 직각삼각형에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

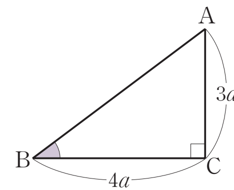
답 $\sin A = \frac{15}{17}$, $\cos A = \frac{8}{17}$, $\tan A = \frac{15}{8}$

2 목표| 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BC} = 4a$, $\overline{AC} = 3a$ $(a>0)$로 놓으면

$\overline{AB} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a$

$\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$



답 $\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$

3 목표| 특수각의 삼각비의 값을 알게 한다.

답 (1) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

4 목표| 삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sin 30° = \frac{x}{10}$, $x = 10\sin 30° = 5$

$\cos 30° = \frac{y}{10}$, $y = 10\cos 30° = 5\sqrt{3}$

답 $x=5$, $y=5\sqrt{3}$

5 목표| 삼각비를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

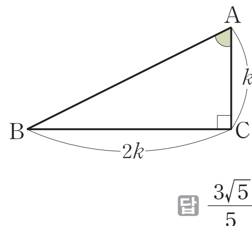
풀이| $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \boxed{5} \times 7 \times \sin \boxed{60}°$

$= \boxed{\frac{35\sqrt{3}}{4}}$(cm²)

답 5, 60, $\frac{35\sqrt{3}}{4}$

중·수준

1 목표| 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.



풀이| $\overline{AC}=k$,

$\overline{BC}=2k\,(k>0)$라고 하면

$\overline{AB}=\sqrt{k^2+(2k)^2}=\sqrt{5}k$

$\sin A+\cos A$

$=\dfrac{2k}{\sqrt{5}k}+\dfrac{k}{\sqrt{5}k}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 　　답 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

2 목표| 특수각의 삼각비의 값을 알게 한다.

풀이| $2\times1\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 　　답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

3 목표| 좌표평면을 이용하여 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| △BOA에서

$\tan x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=1.38$이므로 　$x=54^\circ$

△DOC에서

$\sin 54^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$이므로 　$\overline{CD}=\sin 54^\circ=0.81$

답 0.81

4 목표| 삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △ABD에서 $\cos 30^\circ=\dfrac{6}{x}$이므로 　$x=4\sqrt{3}$

$\tan 30^\circ=\dfrac{y}{6}$이므로 　$y=2\sqrt{3}$

△ABC에서 $\tan 30^\circ=\dfrac{z}{x}$이므로 　$z=4$

답 $x=4\sqrt{3}$, $y=2\sqrt{3}$, $z=4$

5 목표| 삼각비를 이용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AC}=16\sin 60^\circ=8\sqrt{3}$

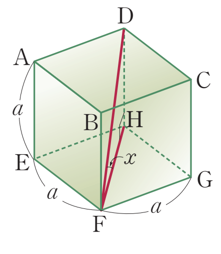
$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times16\times8\sqrt{3}\times\sin 30^\circ=32\sqrt{3}$

$\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times10\times\sin 30^\circ=20\sqrt{3}$

$\square ABCD=32\sqrt{3}+20\sqrt{3}=52\sqrt{3}$ 　　답 $52\sqrt{3}$

상·수준

1 목표| 정육면체에서 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.



풀이| 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{HF}=\sqrt{2}a$, $\overline{DF}=\sqrt{3}a$

$\sin x\times\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

답 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

2 목표| 직각삼각형에서 $\tan 22.5^\circ$의 값을 구할 수 있게 한다.

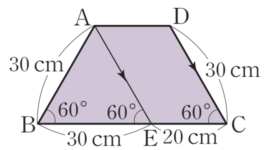
풀이| $\overline{AD}=\overline{BD}$이므로 　$\angle DAB=\angle DBA=22.5^\circ$

$\angle ADC=45^\circ$이므로 　$\overline{DC}=\overline{AC}=4$

$\overline{AD}=\overline{BD}=4\sqrt{2}$

$\tan 22.5^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}+4}=\sqrt{2}-1$ 　　답 $\sqrt{2}-1$

3 목표| 삼각비를 활용하여 넓이를 구할 수 있게 한다.



풀이| 점 A에서 $\overline{CD}$에 평행한 선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 E라고 하면

$\angle AEB=\angle DCE=60^\circ$

이므로 △ABE는 정삼각형이다.

$\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=20\,(\text{cm})$

$\triangle ABE=\dfrac{1}{2}\times30\times30\times\sin 60^\circ=225\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

$\square AECD=20\times30\times\sin 60^\circ=300\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

$\square ABCD=\triangle ABE+\square AECD=525\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

답 $525\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

4 목표| 삼각비를 이용하여 높이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △ABH에서 　$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 30^\circ=100\,(\text{m})$

△CAH에서 　$\overline{CH}=\overline{AH}\tan 72^\circ=310\,(\text{m})$

답 310 m

5 목표| 삼각비를 실생활에 활용할 수 있게 한다.

풀이| $\angle CAB=90^\circ-8^\circ=82^\circ$이므로

$\cos 82^\circ=\dfrac{4200}{\overline{AC}}$, $\overline{AC}=\dfrac{4200}{0.14}=30000\,(\text{m})$

따라서 비행기가 착륙하는 데 걸리는 시간은

$\dfrac{30000}{200}=150$(초) 　　답 150초

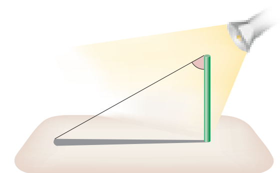
그림자 놀이

어두운 곳에서 수수깡을 세워 놓고 손전등을 비추어 그림자 놀이를 하여 보자.

준비물

수수깡, 손전등

수행 과제
1. 수수깡을 바닥에 수직으로 세워 놓고 빛을 비출 때, 수수깡과 빛이 이루는 각의 크기에 따라 그림자의 길이는 어떻게 변하는가?
2. 수수깡의 길이를 1로 하였을 때, 수수깡과 빛이 이루는 예각에 대한 탄젠트 값은 어떻게 알 수 있는가?
3. $\tan 90^\circ$의 값은 정할 수 있는가?



수행 과제

1. 수수깡과 빛이 이루는 각의 크기가 커짐에 따라 그림자의 길이도 길어진다.
2. 수수깡의 길이가 1이므로 탄젠트값은

$$\frac{(\text{그림자의 길이})}{(\text{수수깡의 길이})}=(\text{그림자의 길이})$$

3. 수수깡과 빛이 이루는 각의 크기가 90°이면 삼각형이 만들어지지 않으므로 $\tan 90^\circ$의 값은 정할 수 없다.

다기망양(多岐亡羊)과 미로

‘달아난 양을 찾는데 길이 여러 갈래로 갈려져 있어서 양을 잃었다.’는 뜻의 다기망양(多岐亡羊)은 학문의 길이 다방면으로 갈라져 있어 진리를 찾기 어려움을 비유할 때나, 어떤 일에 대하여 방법이 많아 앞으로 나아갈 바를 모를 때 사용하는 고사성어이다.

어느 날 양자(楊子)의 이웃집에서 키우는 양 한 마리가 달아났다. 그래서 그 집 사람들은 물론 양자네 집 하인들까지 청해서 양을 찾아 나서자 양자가 물었다.

“양 한 마리 찾는 데 왜 그리 많은 사람이 나섰느냐?”

양자의 하인이 대답하였다.

“양이 달아난 쪽에 갈림길이 많기 때문입니다.”

얼마 후 모두들 지쳐서 돌아왔다.

“갈림길이 하도 많아서 그냥 돌아오고 말았습니다.”

“그러면 양을 못 찾았단 말이냐?”

“예. 갈림길에 또 갈림길이 있어 양이 어디로 달아났는지 통 알 길이 없었습니다.”

이 말을 듣자 양자는 우울한 얼굴로 그날 하루 종일 아무 말도 하지 않았다. 제자들이 그 까닭을 물어도 대답조차 하지 않았다. 그러던 어느 날 한 현명한 제자가 선배를 찾아가 이 사실을 말하고 스승인 양자가 침묵하는 까닭을 물었다. 그 선배는 이렇게 대답하였다.

“선생님은 ‘큰길에는 갈림길이 많기 때문에 양을 잃어버리고 학자는 다방면으로 배우기 때문에 본성을 잃는다. 학문이란 원래 근본은 하나였는데 그 끝에 와서 이같이 달라지고 말았다. 그러므로 하나인 근본으로 되돌아가면 얻는 것도 잃는 것도 없다.’라고 생각하시고 그렇지 못한 현실을 안타까워하신 것이라네.”

어떤 일을 하는데 갈림길에 또 갈림길이 있어 정확한 길을 찾기 어려울 때 우리는 ‘미궁에 빠졌다.’라고 한다. 미궁은 그리스 신화에 등장하는 영웅인 테세우스가 황소 괴물인 미노타우로스를 물리친 곳으로 미노타우로스를 가두어 놓기 위해 만든 길이 복잡하게 얽혀있는 감옥이었다. 그리스 신화에 등장하는 뛰어난 발명가인 다이달로스의 작품이었던 미궁을 오늘날에는 미로라고도 한다.

미로라고 하면 종이 위에 그려진 미로 찾기를 생각하겠지만 고대 이집트의 피라미드에서도 찾아볼 수 있다. 피라미드 속에는 죽은 왕과 함께 왕이 지니고 있었던 물건 따위의 갖가지 보물들을 넣어 두었는데, 그 보물들을 도적이 훔쳐가지 못하도록 하기 위하여 미로를 만들었다. 또 미로는 실생활에 직접 사용되기도 하였는데, 유럽에서는 궁전의 안뜰에 미로를 만들어 공격해 온 적을 안으로 유인하여 전멸시켰다는 전설도 있다. 영국의 브라이트라는 사람은 “미로”라는 책을 쓰고, 1971년에 일 년에 걸쳐서 1.6 km 이상 되는 미로 정원을 만들었다고 한다. 그 후 그는 런던 서쪽 롤리트에 2.8 km^2 이상 되는 넓은 땅에 길이 3.2 km나 되는 미로를 만들었는데, 도중에 터널과 다리가 있는 이 미로는 현재까지 세계에서 가장 큰 미로로 알려져 있다. 우리나라에도 제주도에 김녕 미로 공원이 있어서 미로에서 길을 찾는 재미를 느낄 수 있다.

미로와 관련이 있는 수학은 바로 ‘위상수학’이다. 위상수학은 어떤 도형을 자르거나 없애지 않고 구부리거나 늘려서 만들 수 있는 것에는 어떤 것들이 있는지를 알아보는 분야이다. 이와 같은 도형은 길이나 모양은 달라도 ‘위상’이 같다고 한다.

다기망양(多岐亡羊) 多(많을 다), 岐(가닥나뉠 기), 亡(잃을 망), 羊(양 양)

Ⅶ 원의 성질

이 단원의 학습목표

1. 원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질을 이해한다.
2. 원주각의 성질을 이해한다.
3. 원주각을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

1. 원과 직선
2. 원주각

바퀴의 기원에 대해서는 여러 가지 설이 있다. B.C. 4000년경에 고대 메소포타미아 사람들은 나무 판을 잘라 내어 가운데에 구멍을 뚫어 회전축을 끼운 바퀴를 만들었다. 그 후 바빌로니아와 아시리아 사람들은 바퀴를 이용하여 짐마차나 전차(戰車)를 만들었으며, B.C. 2000년경에 판으로 된 바퀴를 개량하여 오늘날과 같이 가벼운 살을 가진 바퀴가 등장하였다.

바퀴가 달린 수레를 사용하면서 바퀴와 수레는 권위의 상징이 되기도 하였다. 바퀴는 태양을 뜻하였는데, 인류에게 태양 숭배는 가장 오래되고 광범위한 형태의 우상 숭배 가운데 하나로 고대 문명을 주도하였던 모든 민족에게서 발견할 수 있다. 그리고 태양과 바퀴는 모두 원형이다. 그래서 인류는 원에 대하여 특별한 의미를 부여하고 있다.

단원을 시작하기 전에

바퀴, 동전, 맨홀 뚜껑 등은 대부분 원 모양이다. 이와 같이 원의 성질을 이용한 원 모양으로 된 물건들은 실용성과 효율성이 뛰어나다. 이 단원에서는 원과 관련된 성질 중에서 현과 접선에 대한 성질에 대하여 지도한다. 또 원주각의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있도록 지도한다.

단원의 지도 목표

1. 원과 직선

① 원의 현에 관한 성질을 이해하게 한다.
② 원의 접선에 관한 성질을 이해하게 한다.

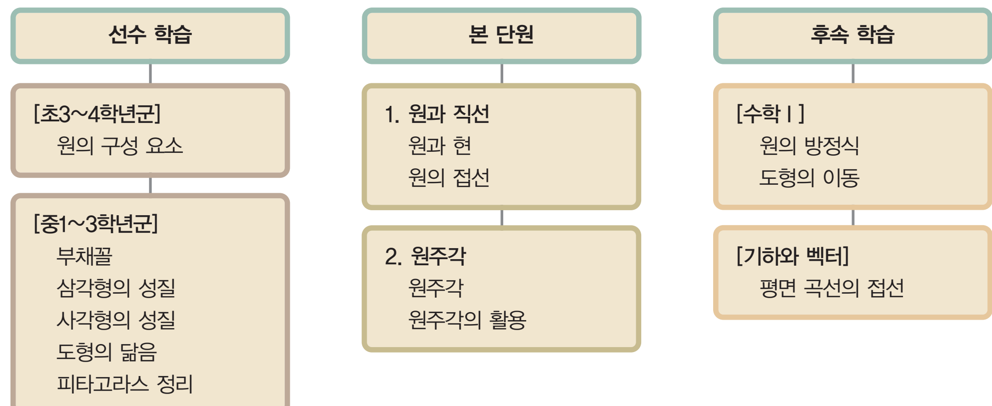
2. 원주각

① 원주각의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.
② 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이해하게 한다.
③ 원에 내접하는 사각형의 성질을 이해하게 한다.
④ 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이해하게 한다.
⑤ 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 이해하게 한다.
⑥ 원의 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 접하는 접선을 그을 수 있음을 직관적으로 이해하도록 지도한다.
② 접선의 길이 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.
③ 삼각형은 반드시 원에 내접 및 외접하지만 사각형은 그렇지 않은 경우도 있음을 알도록 지도한다.
④ 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계가 성립함을 보이는 것은 간단히 다루고, 활용에 중점을 둔다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관			230~231	• 단원의 개관	
1. 원과 직선	준비 학습		232	• 원과 직선 • 원의 중심과 반지름 • 직각삼각형의 합동조건 • 피타고라스 정리	
	1-1 원과 현	1~3	233~236	• 현의 수직이등분선의 성질 • 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계	
	1-2 원의 접선	4~5	237~240	• 원의 접선의 성질	
	수준별 학습	6	241~243	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 원주각	준비 학습		244	• 삼각형의 내각과 외각 • 부채꼴 • 부채꼴의 중심각과 호의 길이	
	2-1 원주각	7~9	245~250	• 원주각과 중심각 사이의 관계 • 원주각과 호의 길이 사이의 관계	원주각
	2-2 원주각의 활용	10~14	251~260	• 네 점이 한 원 위에 있을 조건 • 원에 내접하는 사각형의 성질 • 접선과 현이 이루는 각의 성질 • 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계	
	수준별 학습	15	261~263	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		16~17	264~273	• 수행 과제 • 학습에 대한 자기 평가 • 대단원 핵심 한눈에 보기 • 만화로 보는 수학 이야기 • 대단원 평가 문제 • 컴퓨터의 활용 • 수학 산책	

학습 지도 계획 수립 시 차시별 지도 계획을 바탕으로 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도에 따라 적절히 조정할 수 있다.

단원의 이론적 배경

1. 기하학의 발전

도형을 연구하는 수학의 분야를 기하학이라고 한다. 기하학을 뜻하는 geometry는 땅을 뜻하는 geo와 측량을 뜻하는 metry가 합쳐져서 만들어진 것이다.

B.C. 2500년경 고대 이집트에서는 나일 강의 잦은 범람으로 지워진 토지의 경계를 다시 긋기 위해 측량 기술이 발달하였고, 이에 따라 도형에 관한 지식이 쌓여졌다. 이러한 이집트 인들의 기하학적 지식은 후에 그리스 인들에 의해 학문적으로 체계를 잡히게 되었다.

그리스 기하학의 학문적 전통은 탈레스(Thales: ?B.C. 624~?B.C. 546)로부터 시작하여 피타고라스(Pythagoras: ?B.C. 569~?B.C. 475), 유클리드(Euclid: ?B.C. 325~?B.C. 265) 등으로 이어졌다.

탈레스와 피타고라스 등을 이어 기하학의 논리적 체계와 학문의 기초를 다진 그리스의 유클리드는 13권으로 된 "원론(Elements)"이라는 책에서 23개의 정의, 5개의 공준, 5개의 통념을 근거로 엄밀한 연역적 추론에 의하여 465개의 명제들을 증명하였다.

르네상스 이후의 유럽에서는 아라비아의 영향을 받은 대수학이 발달하였고, 17세기 이후에는 해석학의 발전이 현저했으므로 기하학은 대수학 및 해석학과 대립하는 처지가 되었다.

데카르트

그러나 데카르트(Descartes, R.: 1596~1650)는 수와 도형 사이에는 밀접한 관계가 있어서 공간에 좌표를 설치하여 도형을 방정식으로 나타낼 수 있고, 또 역으로 방정식을 도형으로 표현할 수 있다고 하였다. 이와 같이 좌표를 이용하여 도형 문제를 방정식으로 바꾸어 대수적 계산으로 문제를 해결하는 기하학을 해석기하학(analytic geometry)이라고 한다.

데카르트의 사상은 17세기의 해석학의 발전에 기여를 하였으며, 해석기하학은 18세기에 오일러(Euler, L.: 1707~1783), 몽주(Monge, G.: 1746~1818) 등에 의하여 많은 발전을 이루었다.

2. 원과 원주율

기하학에 연역적인 증명 개념을 도입한 탈레스는 원이 임의의 지름으로 이등분된다는 사실과 반원에 대한 원주각은 직각이라는 사실을 증명하였다.

또 원과 넓이가 같은 정사각형의 작도가 고대 그리스 수학자들 사이에 논의되었다. 이는 19세기에 이르러서야 작도가 불가능한 것으로 판명되었다.

원은 '한 평면 위의 한 정점(원의 중심)에서 일정한 거리(반지름)에 있는 점들의 집합'이다. 따라서 원은 반지름의 길이에 따라 크기만 달라질 뿐 모양은 모두 똑같다. 그리고 원의 둘레의 길이는 반지름의 길이에 따라 정해진다. 특히 원의 둘레의 길이와 지름은 원의 크기와 상관없이 일정한 비를 이루는데, 이 값을 원주율이라 하고 기호 π로 나타낸다. 이 기호는 '둘레'를 뜻하는 그리스 어의 첫 글자로 오일러가 처음 사용하였다.

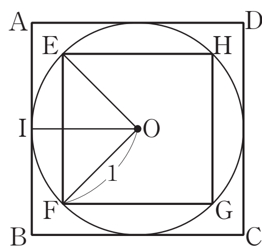
오일러

반지름의 길이가 주어졌을 때 원의 둘레와 원주율 π를 구하려는 노력은 아주 오래전부터 있었다. 그런 수학자 중 아르키메데스(Archimedes: B.C. 287～B.C. 212)는 π의 값을 정확하게 구하기 위하여 많은 노력을 하였다.

그는 원의 둘레의 길이를 측정하기 어려우므로 원에 내접하고 외접하는 정다각형을 이용하여 원의 둘레의 길이를 구하였다.

즉, (원에 내접하는 정n각형의 둘레의 길이)$<$(원의 둘레의 길이)$<$(원에 외접하는 정n각형의 둘레의 길이)임을 이용하여 원의 둘레의 길이를 구하였다.

다음 그림은 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고 외접하는 정사각형을 그린 것이다.



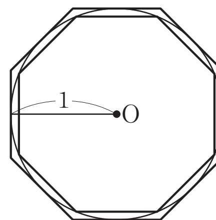
$\overline{OI}=1$이므로 외접하는 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $2\times4=8$이다.

△OEF는 $\overline{OE}=\overline{OF}=1$인 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{EF}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이다.

그러므로 내접하는 정사각형 EFGH의 둘레의 길이는 $\sqrt{2}\times4=5.656\cdots$이다.

따라서 원의 둘레의 길이는 $5.656\cdots$보다는 크고 8보다는 작다고 할 수 있다. 그리고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레는 π의 두 배이므로 π는 $2.828\cdots$보다 크고 4보다 작다고 할 수 있다.

마찬가지로 다음 그림과 같이 정팔각형을 원에 내접하고 외접하게 그리면 조금 더 정확한 값에 가까운 π의 값을 구할 수 있다.



아르키메데스는 이와 같은 방법으로 정96각형을 이용하여 원주율 π의 값을 다음과 같이 구하였다.

$$3.1408\cdots<\pi<3.1428\cdots$$

이 값은 소수점 두 자리까지 정확한 값이었기 때문에 π를 '아르키메데스의 수'라고도 부른다.

우리나라에서도 원주율은 중요하게 다루어졌다. 천문과 율력에 뛰어나 혼천의를 만들고 지구의 자전설을 제창한 조선 영조 때의 실학자 홍대용(洪大容: 1731～1783)은 "주해수용"이라는 수학 책을 지었는데, 여기에서 원주율을 3으로 사용하였다.

이후 조선 말엽 형조 판서를 지낸 정치가이자 당시의 대표적인 수학자이기도 하였던 남병길(南秉吉: 1820～1869)은 "산학정의"라는 수학 책에서 원의 넓이를 셈하면서 원주율을 3.1415926535로 어림잡고 있다.

교수 · 학습 과정안 (기초)

대단원	Ⅶ. 원의 성질	쪽수	교과서 237~238쪽
소단원	1. 원과 직선 1-2 원의 접선	차시	4/17
학습 목표	원의 접선에 관한 성질을 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 종이 위에 그려진 그림을 이용하여 접선과 반지름 사이의 관계에 대하여 질문한다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 원의 접선에 관한 성질을 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **접선과 반지름** 원의 접선은 그 접점을 한 끝 점으로 하는 반지름과 서로 수직이다. 접선의 길이 **접선의 길이** 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 접선의 길이는 그 점과 원 위의 접점 사이의 길이이다. **접선의 성질** 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. ◐ 문제 1, 2를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	실생활에서 접할 수 있는 상황을 이용하여 반지름과 접선의 관계를 이해할 수 있도록 지도한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB가 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라. A P x 145° O B 답 35° ◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 여러 가지 도형에서 원의 접선에 관한 성질을 활용할 수 있다.	

수준별 학습지 (기초)

대단원	Ⅶ. 원의 성질	쪽수	교과서 237~238쪽
소단원	1. 원과 직선　1-2 원의 접선	차시	4/17

(　　)학년 (　　)반 (　　)번　이름:

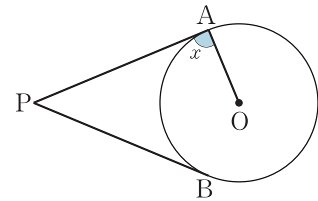
1 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

원의 □은 그 접점을 한 끝 점으로 하는 반지름과 서로 □이다.

답 접선, 수직

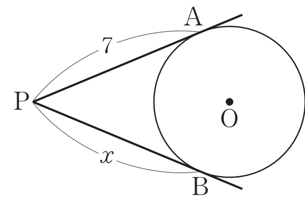
2 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB가 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.

답 $90°$



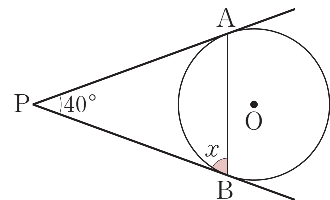
3 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB가 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점일 때, x의 값을 구하여라.

답 7



4 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB가 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.

답 $70°$



교수 · 학습 과정안 (기본)

대단원	Ⅶ. 원의 성질	쪽수	교과서 237~238쪽
소단원	1. 원과 직선　1-2 원의 접선	차시	4/17
학습 목표	원의 접선에 관한 성질을 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 종이 위에 그려진 그림을 이용하여 접선과 반지름 사이의 관계에 대하여 질문한다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 원의 접선에 관한 성질을 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **접선과 반지름** 원의 접선은 그 접점을 한 끝 점으로 하는 반지름과 서로 수직이다. **접선의 길이** 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 접선의 길이는 그 점과 원 위의 접점 사이의 길이이다. **접선의 성질** 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. ◐ 문제 1, 2를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	실생활에서 접할 수 있는 상황을 이용하여 반지름과 접선의 관계를 이해할 수 있도록 지도한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 오른쪽 그림에서 세 직선 AP, BQ, PQ는 원 O의 접선이고, 세 점 A, B, C는 접점이다. 이때 x의 값을 구하여라. 답 10 ◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기초, 기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 여러 가지 도형에서 원의 접선에 관한 성질을 활용할 수 있다.	

수준별 학습지 (기본)

대단원	Ⅶ. 원의 성질	쪽수	교과서 237~238쪽
소단원	1. 원과 직선 1-2 원의 접선	차시	4/17

( )학년 ( )반 ( )번 이름:

1 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB는 각각 점 A, B를 접점으로 하는 원 O의 접선이고, $\overline{AC}$는 지름이다. $\angle BAC=25°$일 때, $\angle APB$의 크기를 구하여라.

답 50°

2 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB는 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점이다. $\angle APB=48°$일 때, $\angle OBA$의 크기를 구하여라.

답 24°

3 오른쪽 그림에서 세 직선 AD, BC, DC는 반원 O의 접선이고 점 A, B, E는 접점일 때, x의 값을 구하여라.

답 13

4 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB는 반지름의 길이가 6인 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점이다. 이때 색칠한 부분의 둘레의 길이를 구하여라.

답 $8\pi+12$

교수 · 학습 과정안 (실력)

대단원	Ⅶ. 원의 성질	쪽수	교과서 237~238쪽
소단원	1. 원과 직선　1-2 원의 접선	차시	4/17
학습 목표	원의 접선에 관한 성질을 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 종이 위에 그려진 그림을 이용하여 접선과 반지름 사이의 관계에 대하여 질문한다. ◐ 학습 목표를 제시한다. • 원의 접선에 관한 성질을 이해한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 창의력 기르기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 정답 확인 및 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **접선과 반지름** 원의 접선은 그 접점을 한 끝 점으로 하는 반지름과 서로 수직이다. **접선의 길이** 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 접선의 길이는 그 점과 원 위의 접점 사이의 길이이다. (그림: 접선의 길이) **접선의 성질** 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. ◐ 문제 1, 2를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	실생활에서 접할 수 있는 상황을 이용하여 반지름과 접선의 관계를 이해할 수 있도록 지도한다.
정리 및 평가	학습 내용 정리 형성 평가 수준별 과제 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 형성 평가 문제를 제시하여 성취 수준을 파악한다. ● 오른쪽 그림에서 직선 PT는 원 O의 접선이고 점 T는 접점일 때, x의 값을 구하여라. (그림: P, T, O, x, 5, 13) 답 12 ◐ 형성 평가 결과에 따라 수준별 학습지(기본, 실력)를 과제로 선택하도록 한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 여러 가지 도형에서 원의 접선에 관한 성질을 활용할 수 있다.	

수준별 학습지 (실력)

대단원	Ⅶ. 원의 성질	쪽수	교과서 237~238쪽
소단원	1. 원과 직선 1-2 원의 접선	차시	4/17
( )학년 ( )반 ( )번 이름:			

1 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 반원 O에 그은 접선의 접점을 T라고 하자. $\overline{OT}=3$ cm이고, $\overline{PQ}=\overline{OQ}$일 때, $\overline{PT}$의 길이를 구하여라.

답 $3\sqrt{3}$ cm

2 오른쪽 그림과 같이 원 밖의 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점을 T라고 할 때, △OPT의 넓이를 구하여라.

답 $6\sqrt{7}$ cm²

3 오른쪽 그림에서 직선 PT는 원 O의 접선이고, 점 T는 접점이다. $\overline{PT}=10$ cm, $\overline{PA}=4$ cm일 때, 원 O의 둘레의 길이를 구하여라.

답 21π cm

4 오른쪽 그림에서 두 직선 PA, PB는 각각 점 A, B를 접점으로 하는 원 O의 접선이다.
$\angle AOB=120^\circ$, $\overline{PA}=3\sqrt{3}$ cm일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

답 $(9\sqrt{3}-3\pi)$ cm²

1 원과 직선

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

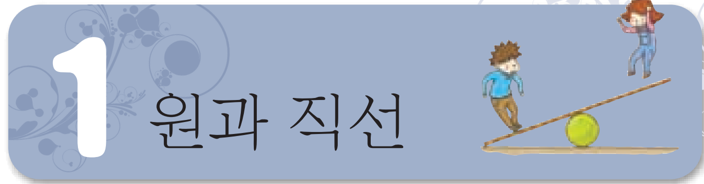
① 원의 현에 관한 성질을 이해하게 한다.

② 원의 접선에 관한 성질을 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
1-1 원과 현	현의 수직이등분선의 성질
	원의 중심과 현의 길이 사이의 관계
1-2 원의 접선	원의 접선의 성질
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 232 쪽

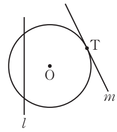


준비학습

원과 직선
- 할선: 원과 두 점에서 만나는 직선
- 접선: 원과 한 점에서 만나는 직선
- 접점: 원과 접선의 교점

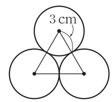
1 오른쪽 그림과 같은 원 O와 직선 l, m에 대하여 다음을 찾아라.

(1) 할선　(2) 접선　(3) 접점



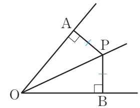
원의 중심과 반지름
원의 중심과 원 위의 한 점을 이은 선분을 원의 반지름이라고 한다.

2 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 3 cm인 세 원의 중심을 서로 이었을 때 생기는 삼각형의 둘레의 길이를 구하여라.



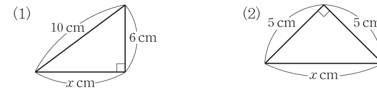
직각삼각형의 합동조건
- 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같을 때
- 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같을 때

3 오른쪽 그림에서 합동인 두 삼각형을 찾고, 합동인 이유를 말하여라.



피타고라스 정리
직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면
$a^2+b^2=c^2$

4 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하여라.



준비 학습의 해설

1

목표| 원의 할선, 접선, 접점의 뜻을 알게 한다.

풀이| (1) 직선 l이 원과 두 점에서 만나므로 할선은 **직선 l**이다.

(2) 직선 m이 원과 한 점에서 만나므로 접선은 **직선 m**이다.

(3) 직선 m이 접선이고, 원과 점 T에서 만나므로 접점은 **점 T**이다.

2

목표| 원의 반지름의 의미를 이해하게 한다.

풀이| $3\times6=$**18(cm)**

3

목표| 직각삼각형의 합동조건을 알고, 합동인 두 직각삼각형을 찾을 수 있게 한다.

풀이| $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$에서

$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$, $\overline{PA}=\overline{PB}$, $\overline{PO}$는 공통이므로

$\triangle PAO\equiv\triangle PBO$

즉, 두 직각삼각형 PAO와 PBO는 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으므로 서로 합동이다.

4

목표| 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+6^2=10^2$, $x^2=64$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{64}=$**8**

(2) $5^2+5^2=x^2$, $x^2=50$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{50}=$**$5\sqrt{2}$**

교과서 233 쪽

1-1 원과 현

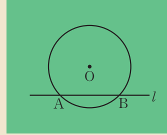
● 원의 현에 관한 성질을 이해한다.

현의 수직이등분선에는 어떤 성질이 있는가?

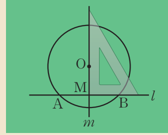
탐구 활동

●준비물
종이, 컴퍼스, 연필, 삼각자

〈그림 1〉과 같이 종이 위에 원 O와 두 점 A, B에서 만나는 직선 l을 그은 다음 〈그림 2〉와 같이 삼각자를 사용하여 원 O의 중심을 지나는 직선 m을 그어 보자. 직선 l과 직선 m의 교점을 M이라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



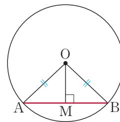
〈그림 1〉



〈그림 2〉

1 직선 l과 직선 m은 서로 수직인지 알아보자.
2 $\overline{AM}$과 $\overline{BM}$의 길이를 비교하여 보자.

❶ [illegible]심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 알아보자.
[illegible]쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 △OAM과 △OBM에서



$\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$
$\overline{OA} = \overline{OB}$(반지름)
$\overline{OM}$은 공통

이다.
따라서 △OAM ≡ △OBM이므로 $\overline{AM} = \overline{BM}$이다.
즉, 원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

● 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.

1-1 원과 현

소단원 지도 목표

① 원에서 현의 수직이등분선의 성질을 이해하게 한다.
② 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 원의 현에 관한 성질이 성립함을 설명할 때, 삼각형의 합동조건 및 직각삼각형의 합동조건을 이용할 수 있게 한다.

2. 현의 수직이등분선의 성질을 이용하여 원의 중심을 찾을 수 있음을 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

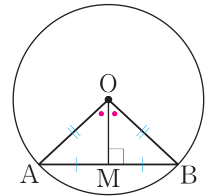
활동 목표 • 삼각자를 이용하여 현의 수직이등분선의 성질을 알게 하려는 것이다.
준비물 • 종이, 컴퍼스, 연필, 삼각자

1. 직선 l과 직선 m은 삼각자의 직각을 이루고 있는 두 변을 포함하므로 **직선 l과 직선 m은 서로 수직이다.**

2. $\overline{AM}$은 접었을 때 $\overline{BM}$과 겹치므로 두 선분의 길이는 같다. 즉, $\overline{\mathbf{AM}} = \overline{\mathbf{BM}}$이다.

본문 해설

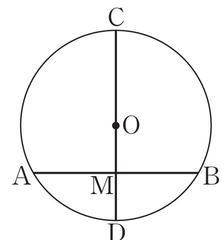
❶ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 다음과 같이 설명할 수도 있다.
오른쪽 그림에서 △OAB는 이등변삼각형이다. 이때



• 꼭지각 AOB의 이등분선 $\overline{OM}$
• 밑변 AB의 수직이등분선 $\overline{OM}$
• 꼭짓점 O에서 밑변 AB에 내린 수선 $\overline{OM}$
은 모두 같은 직선이므로 △OAB의 꼭짓점 O에서 밑변 AB에 내린 수선 OM은 $\overline{AB}$를 이등분한다.

지/도/자/료 원의 대칭성

이등변삼각형은 꼭지각의 이등분선, 즉 밑변의 수직이등분선에 대하여 대칭이다. 이와 같이 한 도형을 어떤 직선을 중심으로 접었을 때 완전히 겹치는 도형을 선대칭도형이라고 한다. 원 또한 대표적인 선대칭도형인데, 모든 원은 임의의 지름을 접는 선으로 하여 접으면 완전히 겹쳐진다.
따라서 오른쪽 그림에서 '$\overline{AB} \perp \overline{CD}$이면 $\overline{AM} = \overline{BM}$이다.'임이 성립한다.
이것은 원의 완전한 대칭성을 설명해 주는데 이 대칭성은 현, 원주각, 중심각 등의 성질을 직관적으로 알 수 있는 중요한 성질이다.



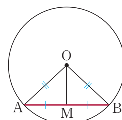
본문 해설

❶ 원에서 현의 수직이등분선이 그 원의 중심을 지남을 보일 때, 한 선분의 수직이등분선 위의 한 점에서 선분의 양 끝 점에 이르는 거리가 같음을 이용할 수도 있다.

교과서 234 쪽

❶ 에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지남을 알아보자.

쪽 그림과 같이 원 O의 현 AB의 중점을 M이라고 하면 △OAM과 △OBM에서



$\overline{AM}=\overline{BM}$

$\overline{OA}=\overline{OB}$(반지름)

$\overline{OM}$은 공통

이다.

따라서 △OAM≡△OBM이므로 ∠OMA=∠OMB=90°이다.

$\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로 원 O의 중심도 현 AB의 수직이등분선 위에 있다. 즉, 현 AB의 수직이등분선은 원 O의 중심을 지난다.

대응하는 세 변의 길이가 각각 같은 두 삼각형은 서로 합동이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

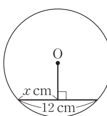
현의 수직이등분선

(1) 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

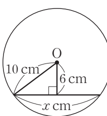
(2) 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

문제 1 다음 그림과 같은 원 O에서 x의 값을 구하여라.

(1)



(2)

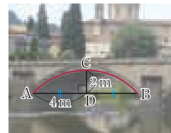


함께 만들어요 문제 2 문제 1과 같이 원의 중심에서 현에 내린 수선에 관한 문제를 만들고, 풀어 보아라.

발전 문제 3 오른쪽 그림에서 빨간색 선은 원의 일부분이다.

$\overline{AD}=\overline{BD}=4$ m, $\overline{CD}=2$ m, $\overline{AB}\perp\overline{CD}$

일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.



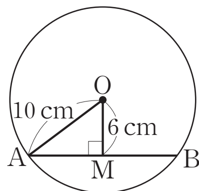
1

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=\frac{1}{2}\times12=\mathbf{6}$

(2) 오른쪽 그림에서

△OAM은 직각삼각형이므로



$\overline{AM}^2+6^2=10^2$,

$\overline{AM}^2=64$

$\overline{AM}>0$이므로

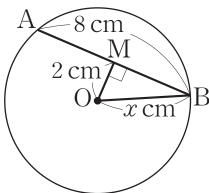
$\overline{AM}=8$(cm)

$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 $x=2\times8=\mathbf{16}$

2

목표| 원의 중심에서 현에 내린 수선에 관한 문제를 만들고 풀어 봄으로써 현의 수직이등분선의 성질을 확실히 알게 하기 위한 문제이다.

예시| 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 x의 값을 구하여라.



풀이| $\overline{AM}=\overline{BM}=4$(cm)

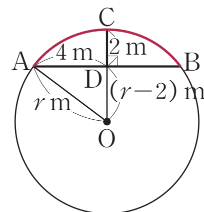
△OBM은 직각삼각형이고 $x>0$이므로

$2^2+4^2=x^2$, $x^2=20$, $x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

3

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다. 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, 원의 반지름의 길이를 r m라고 하면



$\overline{OA}=\overline{OC}=r$ m, $\overline{OD}=(r-2)$ m

△OAD는 직각삼각형이므로

$4^2+(r-2)^2=r^2$, $r=5$

따라서 원의 반지름의 길이는 **5 m**이다.

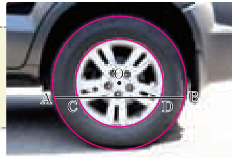
지/도/자/료

삼각형의 외접원이 있을 때, 삼각형의 변은 외접원의 현이 되므로 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 모두 그 외접원의 중심을 지나며 외접원의 중심이 바로 외심이다.

교과서 235 쪽

창의 UP

오른쪽 그림과 같이 점 O를 중심으로 하는 두 원이 있다. 큰 원의 현 AB가 작은 원과 두 점 C, D에서 만날 때, $\overline{AC}=\overline{BD}$임을 설명하여라.



원의 중심과 현의 길이 사이에는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동

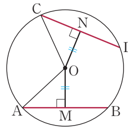
투명 종이 위에 원 O를 그린 후 오려 내어 반으로 접은 다음 일부를 접는다. 이때 생긴 현의 양 끝 점이 서로 포개어지도록 접었다가 펼친 다음 물음에 답하여 보자.

● 준비물
투명 종이, 컴퍼스, 연필, 가위

1 현 AB와 현 CD의 길이를 비교하여 보자.
2 원 O의 중심에서 현 AB와 현 CD에 이르는 거리를 비교하여 보자.

❶ …서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같음을 알아보자.

…른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하면 △OAM과 △OCN에서



$$\angle OMA=\angle ONC=90^\circ$$
$$\overline{OM}=\overline{ON}$$
$$\overline{OA}=\overline{OC}\text{(반지름)}$$

이다.

따라서 △OAM≡△OCN이므로 $\overline{AM}=\overline{CN}$이다.

그런데 $\overline{AB}=2\overline{AM}$, $\overline{CD}=2\overline{CN}$이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$이다. 즉, 원 O의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현 AB, CD의 길이는 같다.

● 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 투명 종이 위에 원을 그려 오리고 접어 봄으로써 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.

준비물 • 투명 종이, 컴퍼스, 연필, 가위

1. 원이 반원이 되도록 다시 접으면 두 현 AB, CD가 겹쳐지므로 **현 AB와 현 CD의 길이는 같다.**

2. 1과 같이 반원이 되도록 접으면 원 O의 중심에서 두 현에 이르는 거리가 겹쳐지므로 **원 O의 중심에서 현 AB와 현 CD에 이르는 거리는 같다.**

본문 해설

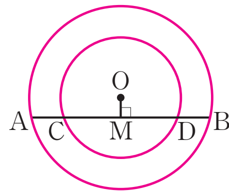
❶ 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같음을 보일 때, 직각삼각형의 합동조건과 현의 수직이등분선의 성질이 필요하므로 이를 먼저 확인한다.

또한 자와 컴퍼스를 이용하여 직접 그림을 그려 성질을 확인해 보면 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 보다 쉽게 이해할 수 있다.

창의 UP

|출제 의도| 원의 중심에서 현에 수선을 그어 문제를 해결함으로써 현의 수직이등분선의 성질을 활용할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 큰 원에서



$$\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$$

마찬가지로 $\overline{CD}$는 작은 원의 현이므로

$$\overline{CM}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{CD}$$

$$\overline{AC}=\overline{AM}-\overline{CM}=\overline{BM}-\overline{DM}=\overline{BD}$$

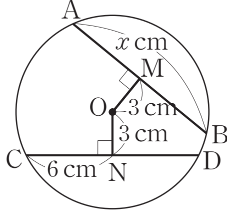
읽/기/자/료

피타고라스는 모든 입체도형 중에서 구가 가장 아름답고, 평면도형 중에서는 원이 가장 아름답다고 하였다. 이와 같은 생각은 그 후로 유럽인들의 기하학적 사고를 지배하게 되었다. 그리스 사람들은 도형을 자와 컴퍼스만으로 국한하여 그렸는데, 이것은 신이 자와 컴퍼스로 그릴 수 있는 직선과 원을 인간에게 베풀었다고 생각한 데서 비롯된 것이다.

4

목표| 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계와 현의 수직이등분선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)



원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{CD}=2\overline{CN}=12(\text{cm})$

한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같으므로

$\overline{AB}=\overline{CD}=12(\text{cm})$

$x=\mathbf{12}$

(2) 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있으므로

$x=\mathbf{5}$

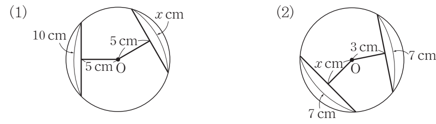
교과서 236 쪽

일반적으로 원의 중심과 현의 길이 사이에는 다음이 성립한다.

원의 중심과 현의 길이

한 원에서
(1) 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
(2) 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

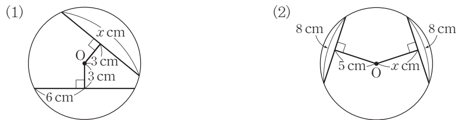
예 제 1 다음 그림에서 x의 값을 구하여라.



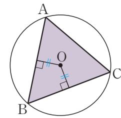
● 풀이 (1) 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같으므로 $x=10$이다.
(2) 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있으므로 $x=3$이다.

답 ● (1) 10 (2) 3

문제 4 다음 그림에서 x의 값을 구하여라.



추론 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB, BC에 이르는 거리가 같을 때, △ABC는 어떤 삼각형이 되는지 설명하여 보자.



추/론

|출제 의도| 원의 중심에서 두 현에 이르는 거리가 같음을 이용하여 문제를 해결함으로써 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 원 O의 중심에서 두 현 AB, BC에 이르는 거리가 같으므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$이다.
따라서 **△ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.**

지/도/자/료

원은 한 정점 O에서 같은 거리에 있는 점의 모임이다. 이 정점을 원의 중심이라고 하며, 중심에서 원주 위의 한 점까지의 거리가 반지름의 길이이다. 한 원에서 반지름의 길이는 일정하며 반지름의 길이가 같은 원들은 서로 합동이다.
원 위의 두 점은 원을 두 부분으로 나누는데 그 각각을 호라고 하며, 작은 쪽의 호를 열호, 큰 쪽의 호를 우호라고 한다. 특히 A, B를 양 끝으로 하는 호를 호 AB라 하고 $\widehat{AB}$로 나타낸다. 원의 중심을 O라고 할 때 반지름 OA, OB가 이루는 ∠AOB를 호 AB에 대한 중심각이라고 하는데, 호 AB는 그의 각에 포함되는 것으로 한다.
또 호 AB의 양 끝 점 A, B를 이은 선분을 호 AB에 대한 현이라고 한다.

교과서 237 쪽

1-2 원의 접선

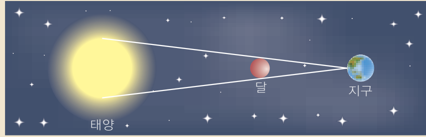
● 원의 접선에 관한 성질을 이해한다.

원의 접선에는 어떤 성질이 있는가?

창의력 기르기

개기 일식

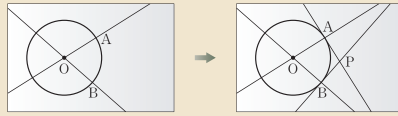
개기 일식은 태양, 달, 지구가 나란히 늘어서서 태양이 달의 그림자에 완전히 가려져 보이지 않는 천문 현상으로 아주 드물게 일어난다.



탐구 활동

●준비물
투명 종이, 컴퍼스, 연필

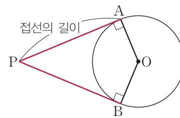
투명 종이 위에 원 O를 그리고 원주 위에 두 점 A, B를 표시한 다음 직선 AO, BO를 접는 선으로 하여 접었다가 펼친다. 또 점 A를 중심으로 직선 AO가 겹쳐지도록 접었다가 펼치고 점 B를 중심으로 직선 BO가 겹쳐지도록 접었다가 펼쳤을 때, 나타난 두 선이 만나는 점을 P라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.



1 직선 AO와 직선 AP는 서로 수직인가?

2 선분 PA와 선분 PB의 길이를 비교하여 보자.

원과 한 점에서 만나는 직선을 원의 접선이라고 한다. 이때 원 O의 외부에 있는 한 점 P에서 이 원에 그을 수 있는 접선은 두 개이다. 이 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 PA, PB의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라고 한다.



1-2 원의 접선

소단원 지도 목표

① 원의 접선에 관한 성질을 이해하게 한다.

② 원의 접선에 관한 성질을 활용하여 여러 가지 도형에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 원의 외부의 한 점에서 원에 2개의 접선을 그을 수 있고, 그 두 접선의 길이가 같음은 간단한 측정을 통하여 이해하게 한다.

2. 접선의 길이에 대한 성질은 여러 가지 형태로 활용되고 있으므로 다양한 문제를 접하도록 지도한다.

창의력 기르기 참/고/자/료

일식은 달이 해를 가려 달의 그림자가 지구에 드리워지는 현상이다. 태양의 전부가 보이지 않는 현상을 개기 일식이라 하고, 일부가 보이지 않는 현상을 부분 일식이라고 한다. 또 달이 해의 내부에 완전히 들어가 태양의 가장자리 부분이 금가락지 모양으로 보이는 현상을 금환 일식이라고 한다. 일식은 지구와 태양과 달이 거의 일직선을 이루었을 때에만 나타나기 때문에 자주 일어나지 않는다. 우리나라의 일식에 관한 보다 자세한 내용은 한국천문연구원(http://kasi.re.kr)에서 확인할 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 투명 종이 위에 원을 그리고 접어서 원의 접선을 만들어 봄으로써 원의 접선에 관한 성질을 알게 하려는 것이다.

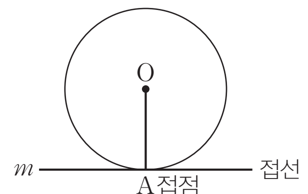
준비물 • 투명 종이, 컴퍼스, 연필

1. 점 A를 중심으로 직선 AO가 겹쳐지도록 접었다가 펼쳤으므로 접은 선은 평각을 이등분한다. 따라서 **직선 AO와 직선 AP는 서로 수직이다.**

2. 직선 OP를 접는 선으로 하여 접으면 점 A와 점 B가 겹쳐지므로 **선분 PA와 선분 PB의 길이는 같다.**

지/도/자/료

1. 오른쪽 그림과 같이 직선 m이 원 O와 한 점에서 만날 때, 직선 m을 원 O의 접선이라 하고, 원과 접선이 만나는 점 A를 접점이라고 한다.



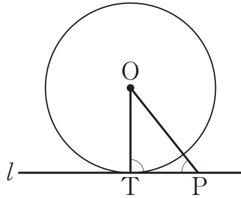
2. 원의 접선의 의미는 다음의 두 가지가 있다.

(1) 원과 한 점에서 만나는 직선

(2) 원주 위의 한 점을 지나며, 그 점을 끝 점으로 하는 원의 반지름에 수직인 직선

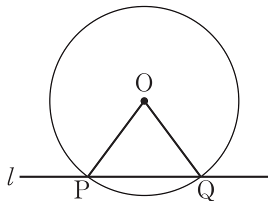
본문 해설

❶ 원과 한 점에서 만나는 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직임을 설명하면 다음과 같다.



원 O와 접선 l과의 접점을 T라고 할 때, $\overline{OT}\perp l$이 아니라고 해 보자.
이때 직선 l 위에 $\angle OTP=\angle OPT$인 점 P를 잡으면 △OTP는 두 내각의 크기가 같은 이등변삼각형이므로 $\overline{OT}=\overline{OP}$이다.
그런데 $\overline{OT}$는 반지름이고 $\overline{OT}=\overline{OP}$이므로 점 P는 원 O 위의 점이다. 즉, 직선 l은 원 O와 두 점 T, P에서 만난다.
이것은 직선 l이 원 O의 접선이라는 것에 모순이다.
따라서 $\overline{OT}\perp l$이다.

참고| 원 위의 한 점을 지나고 그 점을 한 끝점으로 하는 반지름과 서로 수직인 직선은 그 원의 접선이 됨을 설명하면 다음과 같다.



위의 그림에서 원 O 위의 점 P를 지나고, $\overline{OP}\perp l$인 직선 l이 원 O의 접선이 아니라고 해 보자.
이때 직선 l은 원 O와 다른 한 점 Q에서도 만나고 △OPQ는 이등변삼각형이므로 $\angle OPQ=\angle OQP=90°$이다.
이것은 △OPQ의 내각의 크기의 합이 180°라는 성질에 모순이 된다.
따라서 직선 l은 원 O의 접선이다.

교과서 238 쪽

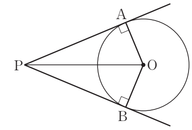
❶ 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이다.

이제 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이가 같음을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O에 접선 PA, PB를 그으면 △PAO와 △PBO에서

$\angle PAO=\angle PBO=90°$
$\overline{OA}=\overline{OB}$(반지름)
$\overline{PO}$는 공통

이다.

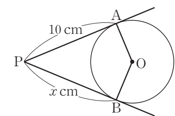


따라서 $\triangle PAO\equiv\triangle PBO$이므로 $\overline{PA}=\overline{PB}$이다. 즉, 원 O의 외부에 있는 한 점 P에서 그은 두 접선 PA, PB의 길이는 같다.

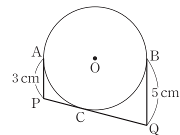
이상을 정리하면 다음과 같다.

> **접선의 길이**
> 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

문제 1 오른쪽 그림에서 직선 PA, PB는 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점일 때, x의 값을 구하여라.



문제 2 오른쪽 그림에서 세 직선 AP, BQ, PQ는 원 O의 접선이고 세 점 A, B, C는 접점이다. $\overline{PA}=3$ cm, $\overline{QB}=5$ cm일 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하여라.



1

목표| 원의 접선에 관한 성질을 이용하여 접선의 길이를 구할 수 있게 한다.

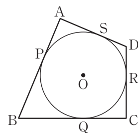
풀이| 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로
$\overline{PB}=\overline{PA}$
$x=\mathbf{10}$

2

목표| 원의 접선에 관한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $\overline{PC}=\overline{PA}=3$(cm)
마찬가지로 $\overline{QC}=\overline{QB}=5$(cm)
$\overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{QC}=3+5=\mathbf{8(cm)}$

❶ **1** 오른쪽 그림과 같이 원 O가 사각형 ABCD와 점 P, Q, R, S에서 접할 때, $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$임을 설명하여라.



풀이 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{AP}=\overline{AS}$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{DR}=\overline{DS}$

$\overline{AB}+\overline{CD}=(\overline{AP}+\overline{BP})+(\overline{CR}+\overline{DR})$

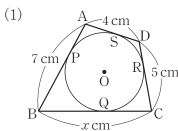
$=(\overline{AS}+\overline{BQ})+(\overline{CQ}+\overline{DS})$

$=(\overline{AS}+\overline{DS})+(\overline{BQ}+\overline{CQ})$

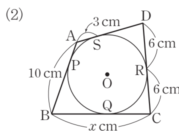
$=\overline{AD}+\overline{BC}$

문제 3 다음 그림에서 원 O가 □ABCD와 점 P, Q, R, S에서 접할 때, x의 값을 구하여라.

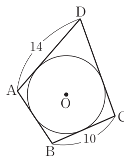
(1)



(2)



발전 **문제 4** 오른쪽 그림과 같이 원 O가 사각형 ABCD와 접하고 $\overline{AD}=14$, $\overline{BC}=10$이다. $\overline{AB}:\overline{CD}=3:5$일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.



본문 해설

❶ 원에 외접하는 사각형에서 두 쌍의 대변의 길이의 합은 같음을 설명하는 것이다.

3

목표| 원의 접선에 관한 성질을 활용하여 원에 외접하는 사각형에서 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 원 O가 □ABCD와 점 P, Q, R, S에서 접하므로 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

$7+5=4+x$, $x=8$

(2) 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $\overline{DS}=\overline{DR}=6(\text{cm})$

원 O가 □ABCD와 점 P, Q, R, S에서 접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$, $10+(6+6)=(3+6)+x$

$22=9+x$, $x=$**13**

4

목표| 원의 접선에 관한 성질을 활용하여 원에 외접하는 사각형에서 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}:\overline{CD}=3:5$이므로

$5\overline{AB}=3\overline{CD}$, $\overline{CD}=\dfrac{5}{3}\overline{AB}$

한편 원 O가 □ABCD와 접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

$\overline{AB}+\dfrac{5}{3}\overline{AB}=14+10$

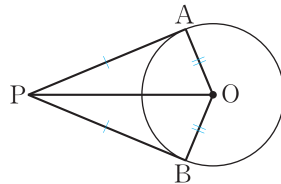
$\dfrac{8}{3}\overline{AB}=24$

$\overline{AB}=$**9**

지/도/자/료

1. 원 O 밖의 한 점 P에서 점 A, B가 접점인 두 접선 PA, PB를 그었을 때, $\overline{PO}$는 ∠APB를 이등분한다.

그 이유를 설명하면 다음과 같다.



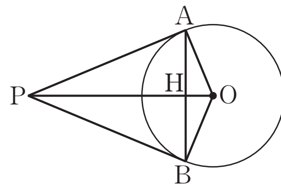
△APO와 △BPO에서

$\overline{PA}=\overline{PB}$, $\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{PO}$는 공통이므로

△APO≡△BPO

따라서 ∠APO=∠BPO이다.

2. 원 O 밖의 한 점 P에서 점 A, B가 접점인 두 접선 PA, PB를 그었을 때, $\overline{PO}$는 $\overline{AB}$를 수직이등분한다.



그 이유를 설명하면 다음과 같다.

△APH와 △BPH에서

$\overline{PA}=\overline{PB}$, $\overline{PH}$는 공통, ∠APH=∠BPH이므로

△APH≡△BPH

따라서 $\overline{AH}=\overline{BH}$이다. ……①

∠AHP=∠BHP, ∠AHP+∠BHP=180°이므로

∠AHP=∠BHP=90°

$\overline{PO}\perp\overline{AB}$ ……②

①, ②에서 $\overline{PO}$는 $\overline{AB}$를 수직이등분한다.

5

목표| 원의 접선에 관한 성질을 활용하여 원에 외접하는 삼각형에서 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{BD}=\overline{BE}=4(cm)$

$\overline{AF}=\overline{AD}=6-4=2(cm)$

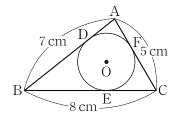
$\overline{CF}=\overline{CE}=9-4=5(cm)$

$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}$

$=2+5=\mathbf{7(cm)}$

교과서 240 쪽

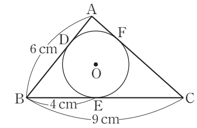
예 제 2 오른쪽 그림과 같이 원 O가 삼각형 ABC의 각 변과 점 D, E, F에서 접한다. $\overline{AB}=7$ cm, $\overline{BC}=8$ cm, $\overline{CA}=5$ cm일 때, $\overline{BE}$의 길이를 구하여라.



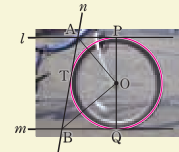
● 풀이 $\overline{BE}=x$ cm라고 하면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$는 원 O의 접선이므로
$\overline{BD}=\overline{BE}=x$ cm, $\overline{AF}=\overline{AD}=(7-x)$cm, $\overline{CF}=\overline{CE}=(8-x)$cm
$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}$이므로
$5=(7-x)+(8-x)$, $2x=10$, $x=5$
따라서 $\overline{BE}$의 길이는 5 cm이다.

답 ● 5 cm

문제 5 오른쪽 그림과 같이 원 O가 △ABC의 각 변과 점 D, E, F에서 접할 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.



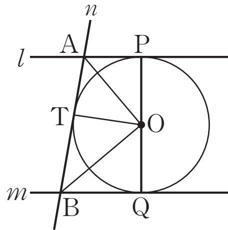
창의 UP 오른쪽 그림에서 직선 l, m, n은 원 O의 접선이고, 점 P, Q, T는 접점이다. $\overline{PQ}$가 원 O의 지름일 때, △AOB는 직각삼각형임을 설명하여라.



창의 UP

|출제 의도| 원의 접선에 관한 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있음을 알게 하기 위한 문제이다.

풀이|



△APO와 △ATO에서

$\angle APO=\angle ATO=90^\circ$, $\overline{AO}$는 공통, $\overline{AP}=\overline{AT}$

따라서 △APO≡△ATO이므로

$\angle AOP=\angle AOT$

또 △BQO와 △BTO에서

$\angle BQO=\angle BTO=90^\circ$, $\overline{BO}$는 공통, $\overline{BQ}=\overline{BT}$

따라서 △BQO≡△BTO이므로

$\angle BOQ=\angle BOT$

$\angle POT+\angle QOT=2\angle AOT+2\angle BOT=180^\circ$

$\angle AOT+\angle BOT=90^\circ$

$\angle AOB=90^\circ$

따라서 △AOB는 직각삼각형이다.

지/도/자/료 접선의 길이

원의 외부의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이가 같음을 다음과 같은 순서로 작도하여 확인할 수도 있다.

❶ 원의 중심 O를 시작점으로 하여 원 위의 점 T를 지나는 반직선 OT를 그린다.

❷ 점 T를 중심으로 하는 원을 그리고, 이 원과 반직선 OT와의 두 교점 A, B를 표시한다.

❸ 선분 AB의 수직이등분선을 그으면 이 직선이 점 T를 지나는 원 O의 접선이다.

❹ 위의 과정을 반복하여 점 T′을 지나는 접선을 작도하여 ❸에서 만든 접선과의 교점 P를 표시한다.

❺ 작도가 완성되면 두 접선 PT, PT′의 길이를 컴퍼스를 이용하여 비교하면 같음을 알 수 있다.

중 / 단 / 원 기초

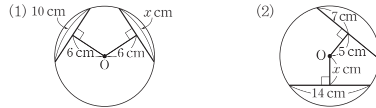
원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

1 다음 그림과 같은 원 O에서 x의 값을 구하여라.

(1) (2)

2 다음 그림과 같은 원 O에서 x의 값을 구하여라.

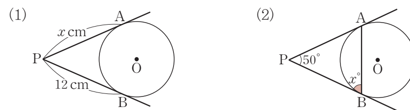
(1) (2)



원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

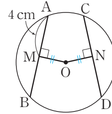
3 다음 그림에서 직선 PA, PB는 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점일 때, x의 값을 구하여라.

(1) (2)



한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

4 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하여라.



중/단/원 기초

1

목표| 현의 수직이등분선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

(1) $x=\mathbf{5}$

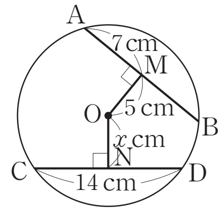
(2) $x=2\times4=\mathbf{8}$

2

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같으므로 $x=\mathbf{10}$

(2) 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 오른쪽 그림에서



$\overline{AB}=2\overline{AM}$

$=14(\text{cm})$

한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있으므로

$\overline{ON}=\overline{OM}=5(\text{cm})$

따라서 $x=\mathbf{5}$이다.

3

목표| 원의 접선에 관한 성질을 이용하여 선분의 길이와 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{PA}=\overline{PB}$

따라서 $x=\mathbf{12}$이다.

(2) △PAB는 $\overline{PA}=\overline{PB}$인 이등변삼각형이므로

$$x^\circ=\frac{1}{2}\times(180^\circ-50^\circ)=65^\circ$$

$x=\mathbf{65}$

4

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\times4=8(\text{cm})$

한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같으므로

$\overline{CD}=\overline{AB}=\mathbf{8(cm)}$

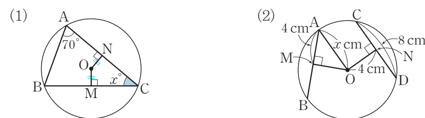
중/단/원 기본

교과서 242 쪽

중 / 단 / 원 기본

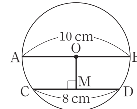
원과 현

1 다음 그림과 같은 원 O에서 x의 값을 구하여라.



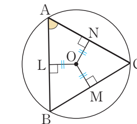
현의 수직이등분선

2 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고 $\overline{CD}\perp\overline{OM}$이다. $\overline{AB}=10$ cm, $\overline{CD}=8$ cm일 때, $\overline{OM}$의 길이를 구하여라.



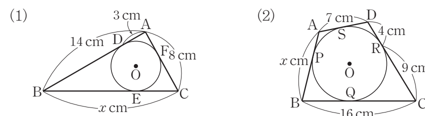
원의 중심과 현의 길이

3 오른쪽 그림에서 원 O가 △ABC의 외접원이고 $\overline{OL}=\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, ∠A의 크기를 구하여라.



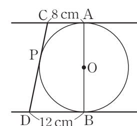
접선의 길이

4 다음 그림에서 원 O가 △ABC와 □ABCD의 내접원일 때, x의 값을 구하여라.



접선의 길이

5 오른쪽 그림과 같이 원 O의 지름 AB의 양 끝 점에서 그은 접선과 원 O 위의 점 P에서 그은 접선이 만나는 점을 각각 C, D라고 할 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하여라.



1

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 이용하여 각의 크기와 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{BC}=\overline{AC}$

△ABC는 이등변삼각형이므로

$\angle B=\angle A=70^\circ$

$\angle C=180^\circ-(70^\circ+70^\circ)=40^\circ$

$x=\mathbf{40}$

(2) $\overline{AB}=2\overline{AM}=8(\text{cm})$이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$

$\overline{OM}=\overline{ON}=4(\text{cm})$

△OAM은 직각삼각형이므로

$4^2+4^2=x^2$, $x^2=32$

$x>0$이므로 $x=\mathbf{4\sqrt{2}}$

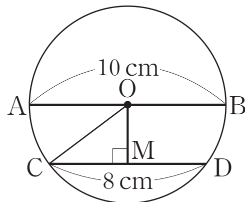
2

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| △OCM에서

$\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=5(\text{cm})$

$\overline{CM}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=4(\text{cm})$



△OCM은 직각삼각형이므로

$\overline{OM}^2+4^2=5^2$, $\overline{OM}^2=9$

$\overline{OM}>0$이므로 $\overline{OM}=\mathbf{3(cm)}$

3

목표| 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{OL}=\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 △ABC는 정삼각형이므로 $\angle A=\mathbf{60^\circ}$

4

목표| 원의 접선에 관한 성질을 활용하여 원에 외접하는 삼각형과 사각형에서 한 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{BE}=\overline{BD}=14-3=11(\text{cm})$

$\overline{EC}=\overline{FC}=8-3=5(\text{cm})$

$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}=11+5=16(\text{cm})$

$x=\mathbf{16}$

(2) $\overline{AP}=\overline{AS}=7-4=3(\text{cm})$

$\overline{BP}=\overline{BQ}=16-9=7(\text{cm})$

$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=3+7=10(\text{cm})$

$x=\mathbf{10}$

5

목표| 원의 접선에 관한 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

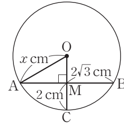
풀이| $\overline{CP}=\overline{CA}=8(\text{cm})$, $\overline{DP}=\overline{DB}=12(\text{cm})$

$\overline{CD}=\overline{CP}+\overline{DP}=8+12=\mathbf{20(cm)}$

교과서 243 쪽

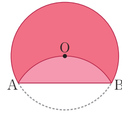
중 / 단 / 원 실력

1 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 x의 값을 구하여라.



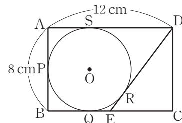
• 반지름 OA를 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각하여 본다.

2 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 8 cm인 원 모양의 종이를 현 AB를 접는 선으로 하여 접었더니 $\overset{\frown}{AB}$가 원의 중심 O를 지나게 되었다. 이때 $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.

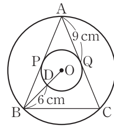


• 직사각형 ABCD의 세 변과 접하는 원 O의 반지름의 길이를 생각하여 본다.

3 오른쪽 그림에서 원 O는 직사각형 ABCD의 세 변과 $\overline{DE}$에 접하고, 점 P, Q, R, S는 접점이다. $\overline{AB}=8$ cm, $\overline{AD}=12$ cm일 때, △DEC의 둘레의 길이를 구하여라.



4 오른쪽 그림과 같이 중심이 같은 두 원에서 큰 원의 현 AB와 AC는 작은 원의 접선이다. 그 접점을 각각 P, Q라 하고 $\overline{AQ}=9$ cm, $\overline{BD}=6$ cm일 때, 작은 원의 반지름의 길이를 구하여라. (단, 점 D는 원 O와 $\overline{OB}$의 교점이다.)



중/단/원 실력

1

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

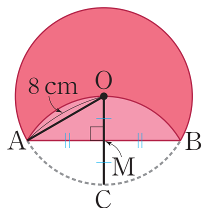
풀이| $\overline{AM}=\overline{BM}=2\sqrt{3}$(cm),
$\overline{OM}=\overline{OC}-\overline{MC}=x-2$(cm)이므로 직각삼각형 OAM에서 $(2\sqrt{3})^2+(x-2)^2=x^2$, $x=\mathbf{4}$

2

목표| 현의 수직이등분선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 현의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 현 AB와 수직인 반지름을 $\overline{OC}$라 하고, $\overline{AB}$와 $\overline{OC}$의 교점을 M이라고 하면

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{OA}=4$(cm)

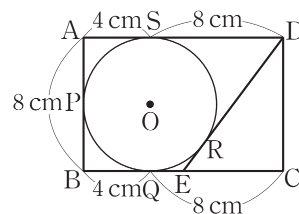


△OAM은 직각삼각형이므로
$\overline{AM}^2+4^2=8^2$, $\overline{AM}^2=48$
$\overline{AM}>0$이므로 $\overline{AM}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$(cm)
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\times4\sqrt{3}=\mathbf{8\sqrt{3}(cm)}$

3

목표| 원의 접선에 관한 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이|



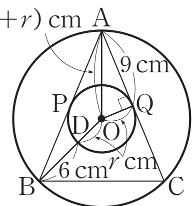
△DEC의 둘레의 길이는

$\overline{DE}+\overline{EC}+\overline{CD}=(\overline{DR}+\overline{RE})+\overline{EC}+\overline{CD}$
$=(\overline{DS}+\overline{QE})+\overline{EC}+\overline{CD}$
$=\overline{DS}+(\overline{QE}+\overline{EC})+\overline{CD}$
$=\overline{DS}+\overline{QC}+\overline{CD}$
$=8+8+8=\mathbf{24(cm)}$

4

목표| 원의 접선에 관한 성질을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 작은 원의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 큰 원의 반지름의 길이는 $(6+r)$ cm
직각삼각형 AOQ에서
$9^2+r^2=(6+r)^2$
$12r=45$, $r=\frac{15}{4}$



따라서 작은 원의 반지름의 길이는 $\mathbf{\frac{15}{4}}$ **cm**이다.

2 원주각

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 원주각의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.

② 원주각을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
2-1 원주각	원주각과 중심각 사이의 관계
	원주각과 호의 길이 사이의 관계
2-2 원주각의 활용	네 점이 한 원 위에 있을 조건
	원에 내접하는 사각형의 성질
	접선과 현이 이루는 각의 성질
	두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

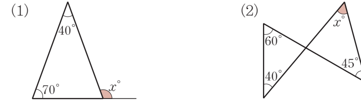
교과서 244 쪽

2 원주각

준|비|학|습

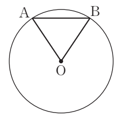
삼각형의 내각과 외각
삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

1 다음 그림에서 x의 값을 구하여라.



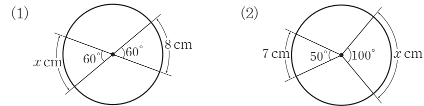
부채꼴
- 현: 원 위의 두 점을 이은 선분
- 호: 원 위의 두 점을 양 끝점으로 하는 원의 일부분
- 부채꼴: 원에서 두 반지름과 호로 이루어진 도형
- 중심각: 부채꼴에서 두 반지름이 이루는 각

2 오른쪽 그림에서 현 AB의 길이는 원 O의 반지름의 길이와 같다. $\widehat{AB}$에 대한 중심각의 크기를 구하여라.



부채꼴의 중심각과 호의 길이
한 원에서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례한다.

3 다음 그림과 같은 원에서 x의 값을 구하여라.



준비 학습의 해설

1

목표| 삼각형의 내각과 외각 사이의 관계를 이해하게 한다.

풀이| (1) $x^\circ=40^\circ+70^\circ=110^\circ$

$x=\mathbf{110}$

(2) $x^\circ+45^\circ=60^\circ+40^\circ$, $x^\circ=55^\circ$

$x=\mathbf{55}$

2

목표| 한 원에서 반지름과 중심각의 의미를 이해하게 한다.

풀이| $\overline{AB}$는 원 O의 반지름의 길이와 같고, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$는 원 O의 반지름이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$

따라서 삼각형 OAB는 정삼각형이므로

$\angle AOB=\mathbf{60^\circ}$

3

목표| 부채꼴의 중심각과 호의 길이 사이의 관계를 이해하게 한다.

풀이| (1) 중심각의 크기가 같으면 호의 길이도 같으므로

$x=\mathbf{8}$

(2) 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$50:100=7:x$, $50x=700$

$x=\mathbf{14}$

교과서 245 쪽

2-1 원주각

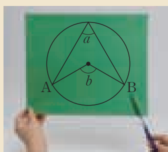
● 원주각의 성질을 이해한다.

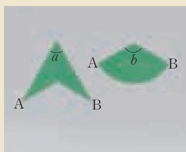
원주각과 중심각 사이에는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동

●준비물
색종이, 컴퍼스, 자, 연필, 가위

다음 그림과 같이 색종이 위에 원을 그리고, 호 AB에 대하여 $\angle a$와 $\angle b$를 그려서 오린 후 물음에 답하여 보자.





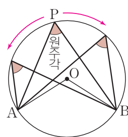
1 $\angle b$를 반으로 접어서 $\angle a$와 겹쳐 보자.

2 크기가 다른 원을 그리고 $\angle a$와 $\angle b$를 그려서 오린 다음 $\angle b$를 반으로 접어서 $\angle a$와 겹쳐 보자.

3 $\angle b$의 크기는 $\angle a$의 크기의 몇 배인가?

❶ 그림과 같이 원 O 위에 세 점 A, B, P가 있을 때, B를 호 AB에 대한 **원주각**이라고 한다. 또 호 AB를 ∠APB에 대한 호라고 한다.

❷ AB가 정해지면 호 AB에 대한 중심각 ∠AOB 로 정해지지만 원주각 ∠APB는 점 P의 위치에 따라 여러 개가 있을 수 있다.



● 원 O에서 두 반지름 OA, OB로 이루어지는 ∠AOB를 호 AB에 대한 중심각이라고 한다.

이제 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$임을 알아보자.

원주각 ∠APB와 원의 중심 O의 위치 관계는 점 P의 위치에 따라 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

2-1 원주각

소단원 지도 목표

① 원주각과 중심각 사이의 관계를 이해하게 한다.
② 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 원주각과 중심각 사이의 관계를 원을 그려 직관적으로 이해한 후, 논리적으로 성립함을 보일 수 있도록 지도한다.

2. 용어의 뜻을 정확히 알도록 지도하고, 원주각의 성질에 대한 내용도 정확히 이해하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 원주각(圓周角, angle of circumference)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 색종이 위에 원을 그려서 만든 $\angle a$와 $\angle b$를 오려 크기를 비교해 봄으로써 원주각과 중심각 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.
준비물 • 색종이, 컴퍼스, 자, 연필, 가위

1. $\angle b$를 반으로 접어서 $\angle a$와 겹쳐 본다.

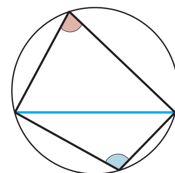
2. 크기가 다른 원으로 만든 $\angle b$를 **1**과 같이 반으로 접어서 $\angle a$와 겹쳐 본다.

3. $\angle b$를 반으로 접어서 $\angle a$와 겹쳤을 때 일치하므로 $\angle b$의 크기는 $\angle a$의 크기의 **2배**이다.

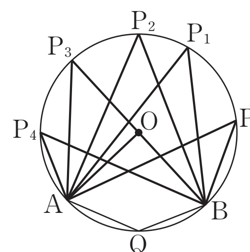
참고| $\angle a$는 호 AB에 대한 원주각이고, $\angle b$는 호 AB에 대한 중심각이다.

본문 해설

❶ 원주각은 '호에 대한'이 아닌 '현에 대한'으로 생각하면 다음 그림과 같이 두 가지 경우가 생기므로 호에 대하여 원주각을 생각한다.



❷ 호 AB에 대한 원주각은 무수히 많다.
즉, 오른쪽 그림에서 $\overset{\frown}{AB}(\overset{\frown}{AQB})$에 대한 원주각은 $\overset{\frown}{AB}$를 제외한 원주 위의 점과 점 A, B를 이어서 생기는 각을 말하는 것이므로 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각은 무수히 많이 그릴 수 있다.



이를테면 $\angle APB$, $\angle AP_1B$, $\angle AP_2B$, $\cdots$ 등은 모두 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각이다.
여기서 $\angle AQB$는 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각이라고 하지 않음에 유의한다.

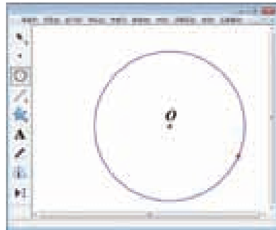
본문 해설

❶ 원주각 ∠APB와 중심 O와의 위치 관계를 P의 위치에 따라 세 가지로 나누어 설명하고 있지만 (1)의 경우를 기본으로 하여 나머지 두 경우를 설명하고 있는 것이다.

지/도/자/료

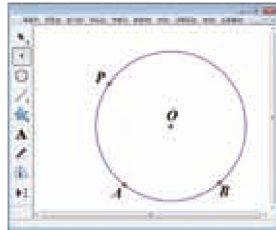
다음과 같은 순서로 컴퓨터 프로그램을 조작하여 원주각과 중심각 사이의 관계를 살펴볼 수 있다.

❶ 아이콘 (원 도구) 을 선택하여 원을 그리고 이때 생긴 중심이 아닌 원 위의 한 점은 점 숨기기를 한다.

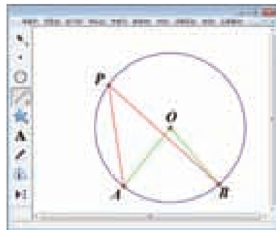


※ 이 점을 숨기지 않으면 원의 중심과 그 점에 따라 원의 크기가 변하게 되므로 조작시 원의 크기가 변할 수 있다.

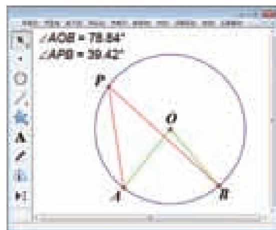
❷ 아이콘 (점 도구) 을 선택하여 원주 위에 세 점 A, B, P를 잡는다.



❸ 아이콘 (선분 도구) 을 선택하여 원의 중심 O와 두 점 A, B를 연결하여 중심각을 그리고, 점 P와 두 점 A, B를 연결하여 원주각을 그린다.

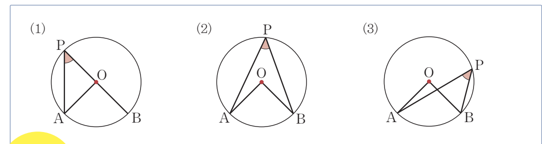


❹ 아이콘 (선택 도구) 을 선택하여 점 A, O, B의 순으로 선택한 후 [측정] 메뉴의 [각의 크기]를 선택하여 중심각의 크기가 화면에 나타나도록 한다. 같은 방법으로 점 A, P, B를 선택하여 원주각의 크기가 화면에 나타나게 한 후, 원주각의 크기와 중심각의 크기를 비교하여 본다.



교과서 246 쪽

즉, 다음 그림과 같이 중심 O가 원주각 ∠APB의 한 변 위에 있는 경우, 내부에 있는 경우, 외부에 있는 경우이다.



❶ [illegible]우에 △OPA에서 $\overline{OP}=\overline{OA}$이므로 ∠OPA=∠OAP이고, ∠AOB는 [illegible]A의 한 외각이므로

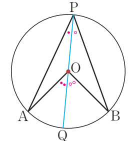
$$\angle AOB=\angle OPA+\angle OAP=2\angle APB$$

이다. 따라서 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$이다.

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

(2)의 경우에 지름 PQ를 그으면 (1)에 의하여

$$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ,\ \angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$$



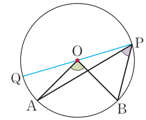
이므로

$$\begin{aligned}\angle APB&=\angle APQ+\angle BPQ\\&=\frac{1}{2}(\angle AOQ+\angle BOQ)\\&=\frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

이다.

(3)의 경우에 지름 PQ를 그으면 (1)에 의하여

$$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ,\ \angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$$



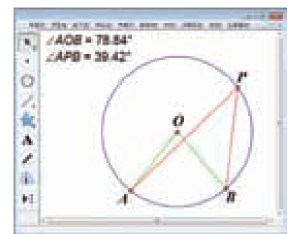
이므로

$$\begin{aligned}\angle APB&=\angle BPQ-\angle APQ\\&=\frac{1}{2}(\angle BOQ-\angle AOQ)\\&=\frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

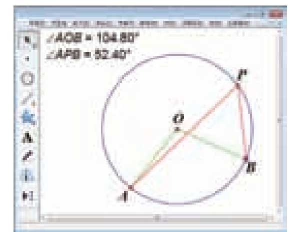
이다.

한편 한 호에 대한 원주각은 여러 개이지만 그에 대한 중심각은 하나이므로 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

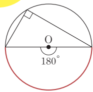
❺ 점 P를 움직여 원주각의 크기가 변하는지 관찰하여 본다.



❻ 점 A 또는 점 B를 움직여서 호의 길이를 변하게 한 다음 중심각과 원주각의 크기를 관찰하여 비교해 본다.



❶ 호에 대한 원주
는 90°이다.



일반적으로 원주각과 중심각에 대하여 다음이 성립한다.

❷ 중심각

(1) 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.
(2) 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

예 제 1 다음 그림과 같은 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

풀이 (1) 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

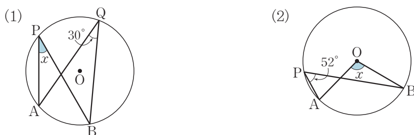
$$\angle x=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 100^\circ=50^\circ$$

(2) 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$$\angle x=\angle APB=50^\circ$$

답 (1) 50° (2) 50°

문제 1 다음 그림과 같은 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

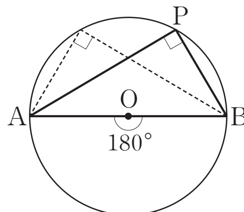


문제 2 문제 1과 같이 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$임을 이용하여 각의 크기를 구하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

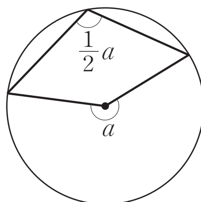
본문 해설

❶ 반원에 대한 원주각이 직각임은 원의 중요한 성질로 자주 이용된다.
이를 원주각과 중심각 사이의 관계를 이용하여 설명하면 다음과 같다.
오른쪽 그림에서 선분 AB가 원 O의 지름일 때, 중심각 $\angle AOB$의 크기는 180°이므로

$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=90^\circ$$



❷ 중심각의 크기가 180°보다 클 때에도 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.



1

목표| 원주각과 중심각 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle x=\angle AQB=\mathbf{30^\circ}$

(2) 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

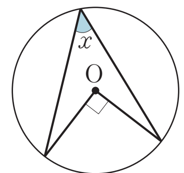
$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

$52^\circ=\frac{1}{2}\angle x$, $\angle x=2\times 52^\circ=\mathbf{104^\circ}$

2

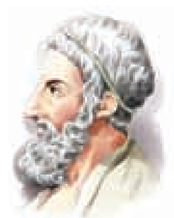
목표| 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$임을 이용하여 각의 크기를 구하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 원주각과 중심각 사이의 관계를 알게 하기 위한 문제이다.

예시| 오른쪽 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.



풀이| $\angle x=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$

읽/기/자/료

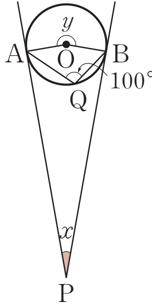

아르키메데스

고대 그리스의 위대한 수학자이자 기술자이고 발명가인 아르키메데스(Archimedes: B.C. 287~B.C. 212)는 지렛대의 이론, 부력의 원리, 구분구적법 등 수학과 물리학에 큰 업적을 남겼다. 그는 한 원에 내접, 외접하는 정96각형에서 원주율(π)의 값 3.14를 구해냈다. 그리고 포물선의 넓이를 구하는 방법과 구의 부피는 외접하는 원기둥의 부피의 3분의 2에 해당된다는 것을 밝혀내기도 하였다. 그가 밝혀낸 방법은 2천 년이나 지난 후에 뉴턴(Newton, I.: 1642~1727)에 의해 발견된 미분학 출현의 근간이 되기도 하였다. 제2차 포에니 전쟁 중에 사망한 그의 위대한 업적을 빛내기 위해 로마군의 사령관은 원기둥에 구가 내접하도록 새긴 묘비를 세워 주었다.

창의 UP

|출제 의도| 중심각의 크기가 180°보다 클 때에도 원주각의 크기가 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$임을 이용하여 문제를 해결함으로써 원주각과 중심각 사이의 관계를 확실히 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 오른쪽 그림에서



$\angle y=2\angle AQB=200°$이므로
$\angle AOB=360°-200°=160°$
한편 $\angle PAO=\angle PBO=90°$
이므로 □APBO에서
$\angle x=360°-(90°+160°+90°)$
$=\mathbf{20°}$

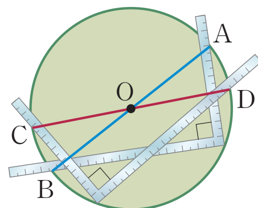
추/론

|출제 의도| 이등변삼각형의 성질을 이용하여 반원에 대한 원주각이 직각임을 설명해 봄으로써 이를 확실히 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| △ABO와 △ACO는 이등변삼각형이므로
$\angle ABO=\angle BAO$, $\angle ACO=\angle CAO$
한편 △ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로
$\angle ABO+\angle ACO+\angle BAC=180°$
$\angle ABO+\angle ACO+\angle BAO+\angle CAO=180°$
$2\angle BAO+2\angle CAO=180°$
따라서 $\angle BAC=\angle BAO+\angle CAO=90°$이다.

지/도/자/료

한 원에서 원의 중심을 찾을 때, 반원에 대한 원주각이 직각임을 이용할 수 있다.
오른쪽 그림과 같이 직각자를 원 위에 놓으면 이때 생기는 선분 AB와 CD의 교점 O가 이 원의 중심이다.
그 이유를 설명하면 다음과 같다.

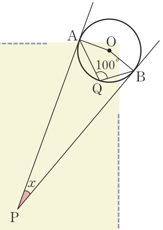


원주각의 크기가 90°이면 그에 대한 호는 반원이고, 반원에 대한 현은 그 원의 지름이다.
즉, 주어진 그림에서 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 원의 지름이므로 지름의 교점인 점 O가 원의 중심이다.

교과서 248 쪽

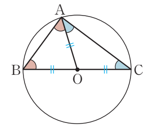
창의 UP

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 하자. $\widehat{AB}$ 위의 한 점 Q에 대하여 $\angle AQB=100°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하는 방법을 설명하여라.



추론

고대 그리스의 수학자 탈레스(Thales : ?B.C. 624~?B.C. 546)는 오른쪽 그림과 같이 이등변삼각형의 성질을 이용하여 반원에 대한 원주각이 직각임을 보였다고 한다. 이를 설명하여 보자.

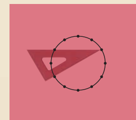


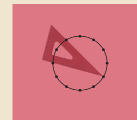
원주각과 호의 길이 사이에는 어떤 관계가 있는가?

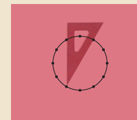
탐구 활동

다음 그림은 원 위에 일정한 간격으로 점을 찍은 다음 삼각자의 한 꼭짓점이 원 위의 한 점에 오도록 놓은 것이다. 물음에 답하여 보자.

●준비물
종이, 컴퍼스, 연필, 삼각자


(가)


(나)


(다)

1 (가), (나), (다)에서 삼각자 밑에 있는 호의 길이를 비교하여 보자.
2 이와 같은 방법으로 원 위에 각자 삼각자를 놓아 보고, 삼각자 밑에 있는 호의 길이를 비교하여 보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 삼각자의 한 꼭짓점이 원 위의 한 점에 오도록 움직여 삼각자 밑에 있는 호의 길이를 비교하여 봄으로써 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.
준비물 • 종이, 컴퍼스, 연필, 삼각자

1. (가), (나), (다)에서 **삼각자 밑에 있는 호의 길이는 같다.**

2. 같은 방법으로 삼각자를 놓아 보면 **삼각자 밑에 있는 호의 길이는 같다.**

교과서 249 쪽

❶ …서 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이가 같음을 알아보자.

…쪽 그림과 같은 원 O에서

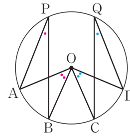
$$\angle AOB=2\angle APB,\ \angle COD=2\angle CQD$$

이고, $\angle APB=\angle CQD$이므로

$$\angle AOB=\angle COD$$

이다. 따라서 중심각의 크기가 같으므로

$$\widehat{AB}=\widehat{CD}$$



원주 위의 두 점은 원주를 두 호로 나눈다. 두 점을 잇는 선분이 원의 지름이 아닌 경우 짧은 호를 열호(劣弧), 긴 호를 우호(優弧)라고 한다. 보통 호를 말할 때는 짧은 호, 즉 열호를 말한다.

❷ …원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기가 같음을 알아보자.

…쪽 그림과 같은 원 O에서 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$일 때, $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$에 대한 원주각을 각각 $\angle APB$, $\angle CQD$라고 하자.

한 원에서 길이가 같은 호에 대한 중심각의 크기는 같으므로

$$\angle AOB=\angle COD$$

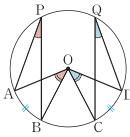
이고, 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB,\ \angle CQD=\frac{1}{2}\angle COD$$

이다. 따라서

$$\angle APB=\angle CQD$$

…수 있다.



❸ …원에서 호의 길이는 그에 대한 중심각의 크기에 정비례하고, 중심각의 …은 원주각의 크기의 2배이므로 한 원에서 호의 길이는 그에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원주각과 호의 길이
한 원에서
(1) 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.
(2) 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.
(3) 호의 길이는 원주각의 크기에 정비례한다.

원주각과 호의 길이에 관한 성질은 합동인 두 원에 대해서도 성립한다.

본문 해설

❶ 한 원에서 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이가 같음을 보일 때, 다음과 같은 순서로 하면 된다.

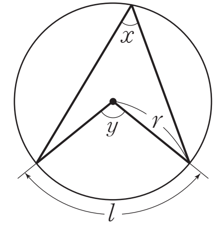
> 원주각의 크기가 같다.
> → 중심각의 크기가 같다.
> → 호의 길이가 같다.

❷ 한편 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기가 같음을 보일 때에도 다음과 같은 순서로 하는 것이 효과적이다.

> 호의 길이가 같다.
> → 중심각의 크기가 같다.
> → 원주각의 크기가 같다.

❸ 한 원에서 호의 길이가 원주각의 크기에 정비례함은 다음과 같은 방법으로 설명할 수도 있다.

|방법 1| 한 원에서 원주각의 크기를 $\angle x$, 그에 대한 호의 길이를 l, 중심각의 크기를 $\angle y$라 하고 이 원의 반지름의 길이를 r라고 할 때,



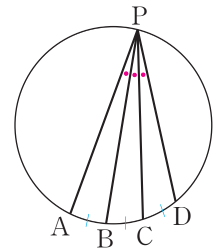
$$l=2\pi r\times\frac{\angle y}{360^\circ},\ \angle y=2\angle x$$

$$l=\pi r\times\frac{\angle x}{90^\circ}$$

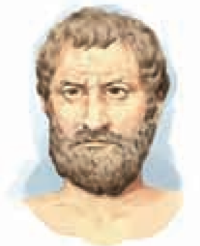
따라서 호의 길이는 원주각의 크기에 정비례한다.

|방법 2| 다음과 같이 보다 직관적인 방법으로 쉽게 이해할 수도 있다.

오른쪽 그림에서 한 호의 길이를 2배, 3배, …로 하면 이에 대한 원주각의 크기도 2배, 3배, …로 된다. 이로부터 한 원에서 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례함을 알 수 있다.



읽/기/자/료 탈레스



고대 그리스의 철학자로 소아시아 이오니아 지방의 밀레투스에서 출생한 탈레스(Thales: ?B.C. 624~?B.C. 546)는 최초의 철학자 밀레투스학파의 시조로 이집트에서 기하학을 받아들여 피라미드의 높이를 그 그림자의 길이로 측정하였다.
또 '원은 그 지름에 의해 이등분된다.', '이등변삼각형의 밑각은 서로 같다.', '반원에 대한 원주각은 직각이다.', '두 직선이 한 점에서 만날 때 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.', '삼각형은 밑변과 밑각이 주어지면 결정된다.' 등의 여러 정리를 발견하였다.

3

목표| 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 이용하여 각의 크기와 호의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로 $x=\mathbf{32}$

(2) 한 원에서 호의 길이는 원주각의 크기에 정비례하므로

$56^\circ : 28^\circ = 16 : x$

$x=\mathbf{8}$

4

목표| 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 한 원에서 호의 길이는 원주각의 크기에 정비례하므로

$\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 1 : 3$

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle A = 180^\circ \times \dfrac{2}{6} = \mathbf{60^\circ}$

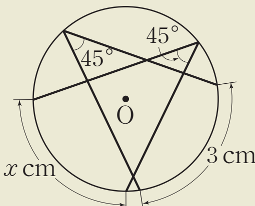
$\angle B = 180^\circ \times \dfrac{1}{6} = 30^\circ$

$\angle C = 180^\circ \times \dfrac{3}{6} = 90^\circ$

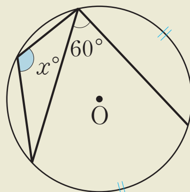
기/초/력 향상 문제

다음 그림에서 x의 값을 구하여라.

1



2

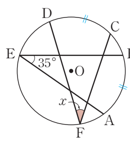


답 **1** 3 **2** 120

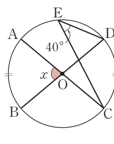
교과서 250 쪽

예 제 2 다음 그림과 같은 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

(1)



(2)



● 풀이 (1) $\widehat{CD}=\widehat{AB}$이므로 $\angle AEB = \angle CFD$

그런데 $\angle AEB = 35^\circ$이므로 $\angle x = \angle CFD = 35^\circ$

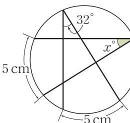
(2) $\angle x = \angle COD = 2\angle CED$

그런데 $\angle CED = 40^\circ$이므로 $\angle x = 80^\circ$

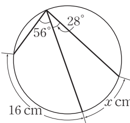
답 ● (1) 35° (2) 80°

문제 3 다음 그림과 같은 원에서 x의 값을 구하여라.

(1)



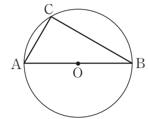
(2)



문제 4 오른쪽 그림과 같은 원 O에서

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 3 : 2 : 1$

일 때, $\angle A$의 크기를 구하여라.



2-2 원주각의 활용

소단원 지도 목표

① 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이해하게 한다.

② 원에 내접하는 사각형의 성질을 이해하게 한다.

③ 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

④ 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 원주각을 활용하여 여러 가지 성질을 알아볼 때, 우선적으로 직관이나 실측을 통하여 살펴보도록 한다. 즉, 탐구 활동과 같이 직접 활동하게 함으로써 흥미 유발과 학습 내용의 이해를 동시에 충족시킨 후에 논리적으로 성립함을 보이게 한다.

교과서 251 쪽

2-2 원주각의 활용

● 원주각을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

네 점이 한 원 위에 있을 조건은 무엇인가?

창의력 기르기

아이스하키

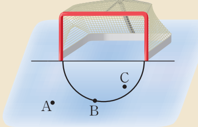
아이스하키는 빙상에서 스케이트를 신은 여섯 사람이 한 팀이 되어 스틱으로 퍽을 쳐서 상대 팀의 골에 넣는 경기이다. 이 스포츠는 선수들의 치열한 몸싸움과 빠른 속도감으로 보는 이에게 박진감을 느끼게 한다.

탐구 활동

A, B, C 세 명의 아이스하키 선수가 오른쪽 그림과 같은 위치에서 골을 넣으려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

선수가 골을 넣을 수 있는 각을 그려 보자.

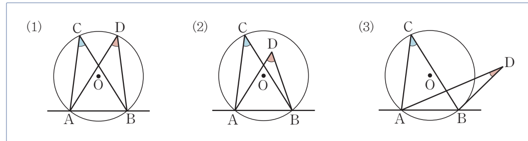
❶ 그린 각의 크기를 비교하여 보자.



원주각을 활용하면 원과 도형에 관한 여러 가지 성질을 이해할 수 있다.

먼저 원주각을 활용하여 네 점이 한 원 위에 있을 조건에 대하여 알아보자.

세 점 A, B, C를 지나는 원 O에서 점 D가 직선 AB에 대하여 점 C와 같은 쪽에 있으면 점 D의 위치는 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다. 즉, 점 D가 원 O 위에 있는 경우, 원 O의 내부에 있는 경우, 원 O의 외부에 있는 경우이다. 이때 각 경우에 대하여 ∠ADB와 ∠ACB의 크기를 비교하여 보자.



2. 네 점이 한 원 위에 있을 조건과 접선과 현이 이루는 각의 성질을 설명할 때, 세 가지 경우로 나누어 생각해야 함을 이해하게 한다.

3. 원에 내접하는 사각형의 성질에서 '원에 내접한다.'는 의미를 알게 하고, 사각형이 원에 내접하는 경우와 내접하지 않는 경우가 있다는 것을 예를 통하여 알게 한다. 또한 원에 내접하는 사각형의 성질은 활용에 중점을 두어 지도한다.

4. 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계에서 닮은 삼각형을 이용하여 대응하는 변의 길이의 비를 세울 때, 순서가 바뀌지 않도록 주의하게 한다.

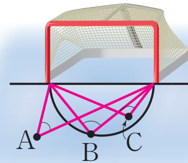
창의력 기르기 참/고/자/료

아이스하키의 유래, 규칙, 용어 등 아이스하키에 대한 보다 자세한 자료는 대한아이스하키협회 홈페이지(http://kiha.sports.or.kr:8088)에서 찾아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 원 위의 두 점과 원의 외부에 있는 한 점을 이어서 만든 각과 원 위의 두 점을 양 끝으로 하는 호에 대한 원주각, 그리고 원 위의 두 점과 원의 내부에 있는 한 점을 이어서 만든 각의 크기를 비교해 봄으로써 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이해하게 하려는 것이다.

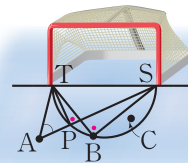
1.



2. 1의 그림에서 ∠A<∠B<∠C

본문 해설

❶ 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같음을 이용하여 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 비교할 수 있다.



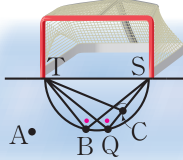
위의 그림과 같이 $\overline{AS}$와 원의 교점을 P라고 하면

∠TPS=∠TBS

∠TPS는 △TAP의 한 외각이므로

∠TAS+∠ATP=∠TPS=∠TBS

∠TAS<∠TBS ······①



위의 그림과 같이 $\overline{CS}$의 연장선과 원의 교점을 Q라고 하면 ∠TBS=∠TQS

∠TCS는 △TQC의 한 외각이므로

∠TCS=∠QTC+∠TQS=∠QTC+∠TBS

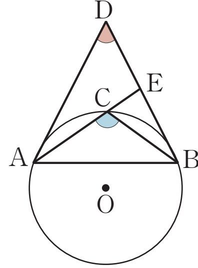
∠TBS<∠TCS ······②

①, ②에 의하여 ∠TAS<∠TBS<∠TCS

∠A<∠B<∠C

본문 해설

❶ 점 D가 원 O의 외부에 있는 (3)의 경우, $\overline{AD}$와 $\overline{BD}$가 교과서의 그림과는 다르게 원 O와 접하는 경우도 있다. 따라서 (3)의 경우에 대하여 완전한 설명을 하려면 점 D가 원 O의 외부에 있으면서 다음 그림과 같은 경우에도 $\angle ADB < \angle ACB$임을 보여야 한다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$의 연장선과 $\overline{BD}$의 교점을 E라고 하면 $\angle AEB$는 $\triangle ADE$의 한 외각이므로

$\angle ADB + \angle DAE$
$= \angle AEB$

$\angle ADB < \angle AEB$ …… ①

$\angle ACB$는 $\triangle ECB$의 한 외각이므로

$\angle AEB + \angle CBE = \angle ACB$

$\angle AEB < \angle ACB$ …… ②

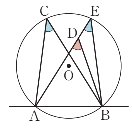
①, ②에 의하여 $\angle ADB < \angle ACB$

교과서 252 쪽

(1)의 경우에 $\angle ADB$와 $\angle ACB$는 모두 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각이므로

$$\angle ADB = \angle ACB$$

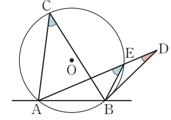
(2)의 경우에 $\overline{AD}$의 연장선과 원 O와의 교점을 E라고 하면 $\angle ADB$는 $\triangle EDB$의 한 외각이므로



● 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

$$\angle ADB = \angle AEB + \angle EBD$$
$$= \angle ACB + \angle EBD$$
$$\angle ADB > \angle ACB$$

❶ 우에 $\overline{AD}$와 원 O와의 교점을 E라고 하면 는 $\triangle DEB$의 한 외각이므로



$$\angle ADB + \angle EBD = \angle AEB$$
$$= \angle ACB$$
$$\angle ADB < \angle ACB$$

위의 세 가지 경우에 대하여 $\angle ADB = \angle ACB$가 되는 것은 점 D가 원 O 위에 있는 경우뿐이다.

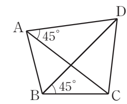
따라서

$$\angle ADB = \angle ACB$$

이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있음을 알 수 있다.

● 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있다는 것은 □ABCD가 원에 내접하는 사각형이라는 것이다.

예 제 1 오른쪽 그림의 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는가?



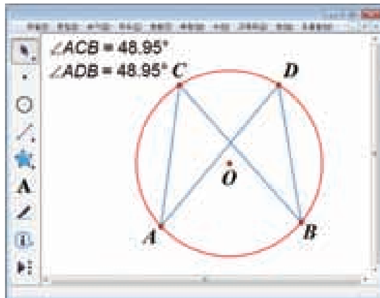
● 풀이 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\angle CBD = \angle CAD = 45°$이다.
따라서 네 점은 한 원 위에 있다.

답 ● 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

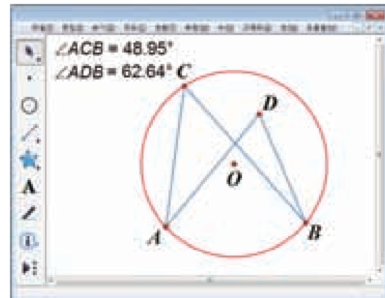
지/도/자/료

다음과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 원을 작도하고, 점 D를 움직여 보며 각의 크기를 살펴봄으로써 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 살펴볼 수 있다.

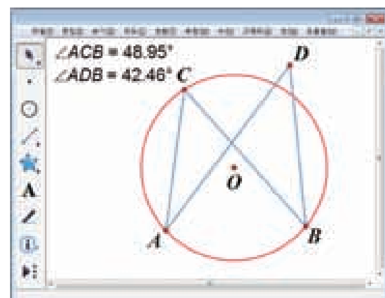
(1) 점 D가 원 O 위에 있는 경우



(2) 점 D가 원 O의 내부에 있는 경우

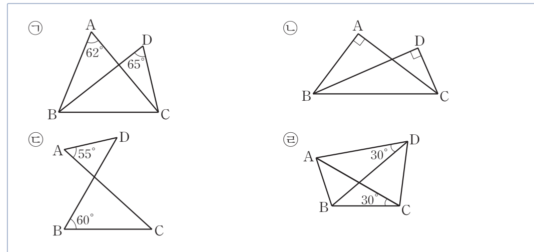


(3) 점 D가 원 O의 외부에 있는 경우



교과서 253 쪽

문제 | 다음 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것을 모두 찾아라.



원에 내접하는 사각형에는 어떤 성질이 있는가?

창의력 기르기

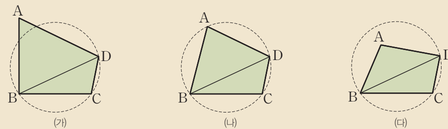
미스터리 서클

들판 한가운데에 농작물이 일정한 방향으로 눕혀져 원 또는 사각형 등의 형태를 나타내는 것을 미스터리 서클이라고 한다. 이것은 한때 외계인이 지구에 보낸 메시지로 여겨져 크게 주목을 받았지만, 사람들의 호기심이나 흥미를 이끌어 내기 위하여 만든 경우가 많다고 한다. 미스터리 서클 중에는 원 안에 사각형이 내접해 있는 모양도 있다.

탐구 활동

다음 그림과 같이 종이 위에 원과 사각형을 그리고 사각형을 오린 후, 물음에 답하여 보자.

● 준비물
종이, 컴퍼스, 자, 연필, 가위



1 (가), (나), (다)의 □ABCD를 대각선 BD를 따라 각각 자른 후, ∠A와 ∠C를 이어 붙여 ∠A+∠C의 크기를 평각의 크기와 비교하여 보자.

2 사각형이 원에 내접할 때, 대각의 크기의 합은 어떠한지 말하여 보자.

창의력 기르기 참/고/자/료

미스터리 서클에 대한 첫 기록은 1946년 영국의 남서부 지역 솔즈베리 평원에서 발견된 두 개의 원형 무늬이다. 그리고 약 30년 후인 1972년 워민스터에서 다시 발견되었으며, 1970년대 후반과 1980년대 초에 접어들면서 미스터리 서클이 자주 출현하기 시작하였다. 미스터리 서클이 생기는 원인으로 외계인 메시지설, 회오리바람설, 정전기설, 지자기설, 중력설, 조류설, 인간 조작설, 플라즈마 보텍스설 등이 있지만 설득력 있는 가설은 아직 나오지 않은 상태이다. 일부 미스터리 서클은 조작되기도 하였고, 사람이 인위적으로 만들 수도 있음이 밝혀지기도 하였다.

목표| 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 이용하여 네 점이 한 원 위에 있는 것을 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠ ∠BAC<∠BDC이므로 세 점 B, C, D를 지나는 원의 외부에 점 A가 있거나 세 점 A, B, C를 지나는 원의 내부에 점 D가 있다.

㉡ ∠BAC=∠BDC이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

㉢ ∠DAC<∠DBC이므로 세 점 B, C, D를 지나는 원의 외부에 점 A가 있거나 세 점 A, C, D를 지나는 원의 내부에 점 B가 있다.

㉣ ∠ADB=∠ACB이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

따라서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것은 ㉡, ㉣이다.

참고| ㉡ ∠BAC=∠BDC=90°이므로 네 점을 지나는 원은 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 원이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 종이 위에 원과 사각형을 그리고 오려 대각의 크기의 합과 평각의 크기를 비교해 봄으로써 원에 내접하는 사각형의 성질을 알게 하려는 것이다.
준비물 • 종이, 컴퍼스, 자, 연필, 가위

1. 대각의 크기의 합인 ∠A+∠C의 크기와 평각의 크기를 비교해 보면 다음과 같다.

(가) 점 A가 원의 외부에 있는 경우
∠A+∠C<180°

(나) □ABCD가 원에 내접하는 경우
∠A+∠C=180°

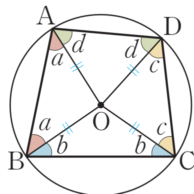
(다) 점 A가 원의 내부에 있는 경우
∠A+∠C>180°

2. 사각형이 원에 내접할 때, 즉 (나)의 경우 대각의 크기의 합은 180°이다.

본문 해설

❶ 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°임을 다음과 같은 방법으로 설명할 수도 있다.

|방법 1| 오른쪽 그림과 같이 원의 중심과 사각형 ABCD의 각 꼭짓점을 이으면 4개의 이등변삼각형이 생긴다.



이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같고, 사각형의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로

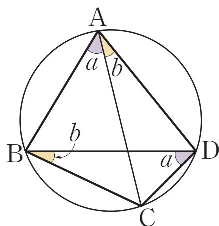
$2(\angle a+\angle b+\angle c+\angle d)=360^\circ$

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d$

$=(\angle a+\angle d)+(\angle b+\angle c)$

$=\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

|방법 2| 오른쪽 그림에서 ∠BAC와 ∠BDC는 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각이고, ∠CBD와 ∠CAD는 $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각이므로



$\angle BAC=\angle BDC,\ \angle CBD=\angle CAD$

△BCD에서 $\angle a+\angle b+\angle BCD=180^\circ$

$\angle BAD=\angle a+\angle b$이므로

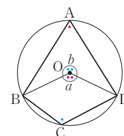
$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

교과서 254 쪽

모든 삼각형은 원에 내접하지만, 모든 사각형이 원에 내접하는 것은 아니다.

❶ [illegible]을 활용하여 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° [illegible]알아보자.

오른쪽 그림과 같이 □ABCD가 원 O에 내접할 때, 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로



$$\angle A=\frac{1}{2}\angle a,\quad \angle C=\frac{1}{2}\angle b$$

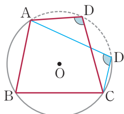
이다. 그런데 $\angle a+\angle b=360^\circ$이므로

$$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle a+\angle b)=180^\circ$$

이다. 마찬가지로 ∠B+∠D=180°이다.

이제 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°인 사각형은 원에 내접함을 알아보자.

오른쪽 그림의 □ABCD에서



$\angle B+\angle D=180^\circ$ ······ ①

라 하고, 세 점 A, B, C를 지나는 원 O를 그려 보자.

원 O 위에 점 D′을 잡으면 □ABCD′은 원 O에 내접하므로

$\angle B+\angle D'=180^\circ$ ······ ②

이다. ①, ②에서

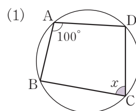
$\angle D=\angle D'$

이므로 네 점 A, C, D, D′은 원 O 위에 있다.

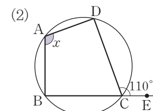
따라서 □ABCD는 원 O에 내접한다.

문제 2 다음 그림에서 ∠x의 크기를 구하여라.

(1)



(2)



2

목표| 원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle x+100^\circ=180^\circ$

$\angle x=\mathbf{80^\circ}$

(2) $\angle BCD=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

□ABCD가 원에 내접하므로

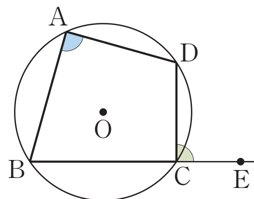
$\angle x+70^\circ=180^\circ$

$\angle x=\mathbf{110^\circ}$

지/도/자/료

원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그 외각에 이웃한 내각에 대한 대각의 크기와 같다.

이 성질이 성립함을 보이면 다음과 같다.



□ABCD가 원에 내접하므로

$\angle A+\angle BCD=180^\circ$ ······①

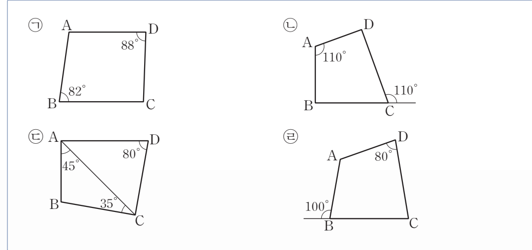
또 ∠BCE는 평각이므로

$\angle BCD+DCE=180^\circ$ ······②

따라서 ①, ②에 의하여 ∠DCE=∠A이다.

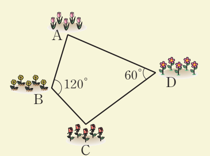
문제 3 문제 2와 같이 원에 내접하는 사각형에서 각의 크기를 구하는 문제를 만들고, 풀어 보아라.

문제 4 다음 그림에서 □ABCD가 원에 내접하는 것을 모두 찾아라.



창의 UP

오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D 네 지점에 꽃밭이 있다. 꽃밭에 물을 공급하기 위한 우물을 파려고 할 때, 우물이 각 꽃밭에서 같은 거리에 위치할 수 있는지 설명하여라.

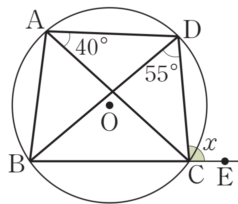


의사소통 여러 가지 사각형 중에서 항상 원에 내접하는 사각형을 말하여 보자.

3

목표| 원에 내접하는 사각형에서 각의 크기를 구하는 문제를 만들고 풀어 봄으로써 원에 내접하는 사각형의 성질을 이해하게 하기 위한 문제이다.

예시| 오른쪽 그림에서 □ABCD가 원 O에 내접할 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



풀이| $\overset{\frown}{BC}$에 대하여 $\angle BAC=\angle BDC=55^\circ$

$\angle BAD=55^\circ+40^\circ=95^\circ$

□ABCD는 원에 내접하므로

$\angle BCD=180^\circ-95^\circ=85^\circ$

$\angle x=180^\circ-85^\circ=95^\circ$

4

목표| 사각형이 원에 내접하기 위한 조건을 이용하여 원에 내접하는 사각형을 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $\angle B+\angle D=82^\circ+88^\circ=170^\circ\neq180^\circ$

따라서 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

㉡ $\angle BCD=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

$\angle A+\angle BCD=110^\circ+70^\circ=180^\circ$

따라서 □ABCD는 원에 내접한다.

㉢ △ABC에서 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 $\angle B=180^\circ-(45^\circ+35^\circ)=100^\circ$

$\angle B+\angle D=100^\circ+80^\circ=180^\circ$

따라서 □ABCD는 원에 내접한다.

㉣ $\angle ABC=180^\circ-100^\circ=80^\circ$

$\angle D+\angle ABC=80^\circ+80^\circ=160^\circ\neq180^\circ$

따라서 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

따라서 원에 내접하는 것은 ㉡, ㉢이다.

창의 UP

|출제 의도| 네 점에서 같은 거리에 있는 점을 찾는 방법을 생각함으로써 사각형이 원에 내접하기 위한 조건을 활용할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이| 사각형 ABCD의 한 쌍의 대각의 크기의 합이 $120^\circ+60^\circ=180^\circ$이므로 사각형 ABCD는 원에 내접한다. 따라서 사각형 ABCD에 외접하는 원을 그리고 그 원의 중심에 우물을 만들면 네 지점의 꽃밭에서 같은 거리에 우물이 위치할 수 있다.

의/사/소/통

|출제 의도| 사각형이 원에 내접하기 위한 조건을 이용하여 여러 가지 사각형 중에서 항상 원에 내접하는 사각형을 알게 하기 위한 문제이다.

풀이| 직사각형과 정사각형, 등변사다리꼴은 항상 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이므로 항상 원에 내접하는 사각형이다.

참고| (1) 원에 내접하는 마름모는 정사각형이다.
(2) 원에 내접하는 사다리꼴은 등변사다리꼴이다.
(3) 원에 내접하는 평행사변형은 직사각형이다.

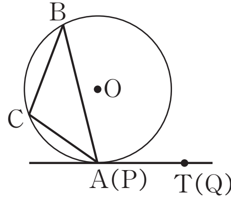
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 원에 내접하는 사각형의 한 점의 위치를 바꾸어 보면서 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 성질을 알게 하려는 것이다.

1. (가), (나), (다) 모두 □APBC는 원에 내접하므로 $\angle BCA+\angle BPA=180^\circ$
$\angle APQ$는 평각이므로
$\angle BPQ+\angle BPA=180^\circ$
따라서 점 P의 위치에 상관없이
$\angle BPQ=$ **∠BCA**이다.

2. 점 P가 점 A에 가까워지면 $\angle BPQ$는 **∠BAT**에 가까워진다.

3. 점 P가 점 A와 일치하면 오른쪽 그림과 같이
$\angle BPQ=\angle BAT$
이고 **1**에서
$\angle BPQ=\angle BCA$이므로
$\angle BCA=$ **∠BAT**이다.

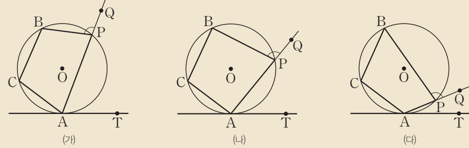


교과서 256 쪽

접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 어떠한가?

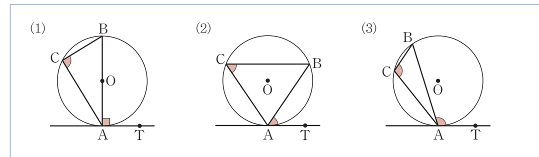
탐구 활동

다음 그림에서 세 점 A, B, C는 원 O 위의 점이고, 점 P는 호 AB를 따라 움직이는 점이다. 직선 AT는 원 O의 접선이고 현 AP의 연장선 위의 한 점을 Q라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1 (가), (나), (다)에서 $\angle BPQ$와 크기가 같은 각을 각각 찾아보자.
2 점 P가 점 A에 가까워질 때, $\angle BPQ$는 어떤 각에 가까워지는가?
3 점 P가 점 A와 일치하면 $\angle BCA$는 어떤 각의 크기와 같게 되는가?

원 O 위에 세 점 A, B, C가 있을 때, 원주각을 활용하여 점 A에서의 접선 AT와 현 AB가 이루는 각인 $\angle BAT$의 크기가 $\angle BCA$의 크기와 같음을 알아보자.
다음 그림과 같이 $\angle BAT$는 크기에 따라 직각, 예각, 둔각인 세 가지 경우로 나눌 수 있다.



(1)의 경우에 $\angle BCA$는 반원인 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각이므로

$$\angle BCA=90^\circ$$

이다. 따라서

$$\angle BAT=\angle BCA$$

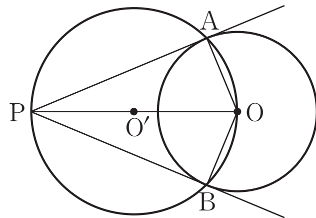
이다.

반원인 호에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

지/도/자/료

다음은 원 밖의 점 P에서 원 O에 접선을 긋는 방법 중 하나이다.

❶ 선분 PO의 중점 O′을 중심으로 하고 반지름이 $\overline{O'P}$인 원을 그린다.
❷ 원 O와 원 O′의 교점을 각각 A, B라고 한다.
❸ 점 P와 A, 점 P와 B를 지나는 직선을 각각 긋는다.
이때 $\angle PAO$와 $\angle PBO$는 호 PO에 대한 원주각이므로
$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$
따라서 직선 PA, PB는 원 O의 접선이다.



읽/기/자/료 인공위성의 궤도

인공위성이 지상으로부터 약 160 km 높이에서 원 궤도 또는 타원 궤도 비행을 하는 것은 공기 저항을 적게 하기 위해서이다.
인공위성의 평균 속력이 7.9 km/초일 때 인공위성은 원 궤도 비행을 하지만 7.9 km/초 초과 11.2 km/초 미만이면 타원 궤도 비행을 하고, 11.2 km/초 이상 16 km/초 미만이면 지구 인력을 벗어나는 포물선 궤도 비행을 한다.
또 평균 속력이 16 km/초 이상이면 태양계의 인력권을 벗어나는 쌍곡선 궤도 비행을 한다.

(2)의 경우에 오른쪽 그림과 같이 지름 AD를 그으면

(1)에 의하여

$\angle DAT = \angle DCA = 90°$ ⋯⋯ ①

이고, $\angle DAB$와 $\angle DCB$는 $\overset{\frown}{DB}$에 대한 원주각이므로

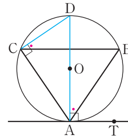
$\angle DAB = \angle DCB$ ⋯⋯ ②

이다.

한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

따라서 ①, ②에서

$\angle BAT = \angle DAT - \angle DAB$
$= \angle DCA - \angle DCB$
$= \angle BCA$



❶ (3)의 경우에 오른쪽 그림과 같이 지름 AD를 그으면

(1)에 의하여

$\angle DAT = \angle DCA = 90°$ ⋯⋯ ①

이고, $\angle DAB$와 $\angle DCB$는 $\overset{\frown}{DB}$에 대한 원주각이므로

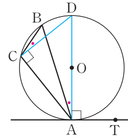
$\angle DAB = \angle DCB$ ⋯⋯ ②

이다.

따라서 ①, ②에서

$\angle BAT = \angle DAT + \angle DAB$
$= \angle DCA + \angle DCB$
$= \angle BCA$

이다.

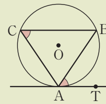


일반적으로 다음이 성립한다.

❷ 접선과 현이 이루는 각

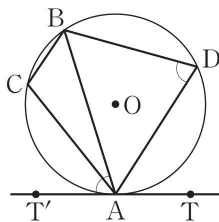
원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

$\angle BAT = \angle BCA$



본문 해설

❶ (3)의 경우를 다음과 같은 방법으로 설명할 수도 있다.



위의 그림에서 □ADBC는 원 O에 내접하므로

$\angle BCA + \angle BDA = 180°$ ⋯⋯①

$\angle BAT' + \angle BAT = 180°$ ⋯⋯②

직선 AT′은 접선이므로 (2)의 경우에 의하여

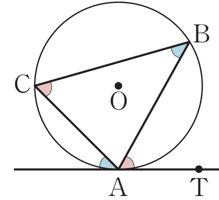
$\angle BAT' = \angle BDA$ ⋯⋯③

①, ②, ③에서

$\angle BCA + \angle BDA = \angle BAT' + \angle BAT$
$= \angle BDA + \angle BAT$

$\angle BAT = \angle BCA$

❷ 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기가 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같음을 이해할 때, 다음 그림을 이용하면 도움이 된다.



지/도/자/료

1. 도형에서 어떤 성질이 성립함을 보일 때에는 각을 ●, ○, ⊙, ⋯과 같이 나타내어 쉽게 이해하도록 지도할 수 있다. 그 후에 이를 기호로 정리하여 설명한다.

2. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 접선과 현이 이루는 각의 성질을 확인할 수 있다.

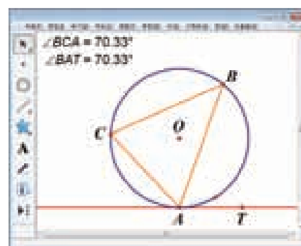
❶ 아이콘 [⊙]을 선택하여 원 O를 그리고, 아이콘 [／]을 선택하여 선분 OA를 작도한다.

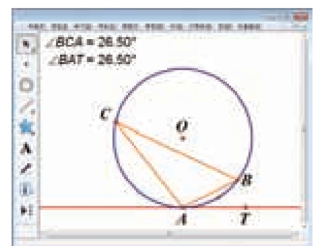
❷ 아이콘 [↖]을 선택한 상태로 점 A와 선분 OA를 선택한 후 [작도] 메뉴의 [수선]을 선택하여 접선을 작도한 다음 선분 OA를 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 눌러 선분 OA를 숨긴다.

❸ 아이콘 [•]을 선택하여 원 위에 두 점 B, C와 접선 위에 점 T를 잡고, 아이콘 [／]을 선택하여 삼각형 ABC를 그린다.

❹ 아이콘 [↖]을 선택한 상태로 세 점 B, C, A를 차례로 모두 선택하고, [측정] 메뉴의 [각의 크기]를 선택하여 $\angle BCA$의 크기를 측정한다. 같은 방법으로 $\angle BAT$의 크기를 측정한다.

❺ 점 B와 점 C를 옮기면서 $\angle BCA$와 $\angle BAT$의 크기를 비교한다.





5

목표| 원의 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\angle x=\mathbf{75^\circ}$, $\angle y=\mathbf{50^\circ}$

(2) 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이므로 $\angle x=\mathbf{90^\circ}$

$\angle y=\mathbf{30^\circ}$

(3) $\angle y=\mathbf{40^\circ}$

$\triangle$ABC에서 $40^\circ+110^\circ+\angle x=180^\circ$

$\angle x=\mathbf{30^\circ}$

(4) $\angle x=\mathbf{45^\circ}$

□ABCD는 원에 내접하므로

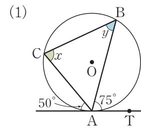
$65^\circ+45^\circ+\angle y=180^\circ$

$\angle y=\mathbf{70^\circ}$

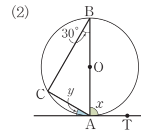
교과서 258 쪽

문제 5 다음 그림에서 직선 AT는 원 O의 접선이고 점 A는 접점일 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 구하여라.

(1)

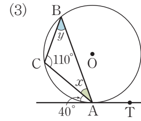


(2)

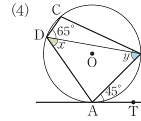


(4) 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

(3)

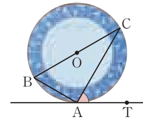


(4)

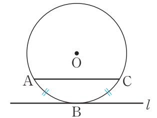


문제 6 문제 5와 같이 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기에 대한 문제를 만들고, 풀어 보아라.

문제 7 오른쪽 그림에서 $\overline{BC}$는 원 O의 지름이고, 직선 AT는 점 A에서 원 O와 접한다. $\widehat{AB}:\widehat{AC}=1:2$일 때, $\angle$CAT의 크기를 구하여라.



추론 원 O 위의 점 B를 지나는 접선 l에 대하여 $\widehat{AB}=\widehat{BC}$이면 직선 l과 현 AC가 서로 평행한 이유를 말하여 보자.

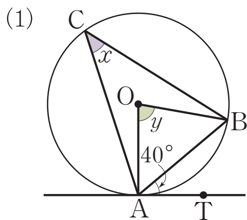


6

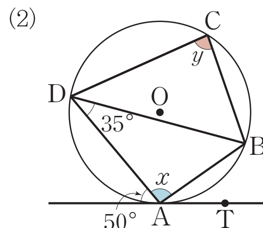
목표| 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기에 대한 문제를 만들고 풀어 봄으로써 원의 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이해하게 하기 위한 문제이다.

예시| 다음 그림에서 직선 AT는 원 O의 접선이고 점 A는 접점일 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 구하여라.

(1)



(2)



풀이| (1) $\angle x=\angle \mathrm{BAT}=40^\circ$

$\angle y=2\angle x=2\times 40^\circ=80^\circ$

(2) $\angle \mathrm{BAT}=\angle \mathrm{BDA}=35^\circ$

$\angle x=180^\circ-(50^\circ+35^\circ)=95^\circ$

□ABCD는 원에 내접하므로

$95^\circ+\angle y=180^\circ$, $\angle y=85^\circ$

7

목표| 원의 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\angle \mathrm{ACB}=x$라고 하자.

$\widehat{AB}:\widehat{AC}=1:2$이므로 $\angle \mathrm{ACB}:\angle \mathrm{ABC}=1:2$

$\angle \mathrm{ABC}=2\angle \mathrm{ACB}=2x$

$\overline{BC}$는 지름이므로 $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$

$\triangle$ABC에서

$2x+x+90^\circ=180^\circ$, $x=30^\circ$

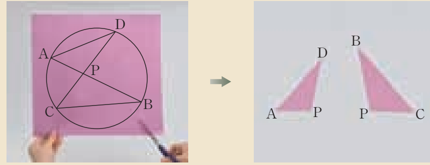
$\angle \mathrm{CAT}=\angle \mathrm{ABC}=2\times 30^\circ=\mathbf{60^\circ}$

두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이에는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동

●준비물
색종이, 컴퍼스, 자, 연필, 가위

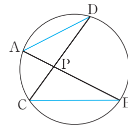
다음 그림과 같이 색종이 위에 원을 그리고 두 현 AB와 CD를 그어 그 교점을 P라고 하자. △PAD와 △PCB를 오린 후, 물음에 답하여 보자.



1 두 삼각형이 서로 닮음임을 확인하여 보자.

2 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비 사이의 관계를 알아보자.

❶ … 그림과 같이 한 원에서 두 현 AB, CD가 만나는 … 라고 할 때, 원주각을 활용하여 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ … 관계를 알아보자.



❷ … 와 △PCB에서

$$\angle PDA = \angle PBC$$
$$\angle APD = \angle CPB$$

이므로

$$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$$

이다.

● 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같은 두 삼각형은 서로 닮은 도형이다.

이때 두 닮은 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비는 일정하므로

$$\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$$

이다. 따라서

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

이다.

탐구 활동의 이해

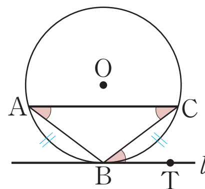
활동 목표 • 색종이 위에 원과 두 현을 그려서 만들어지는 두 삼각형의 닮음을 확인하고, 닮음비를 알아봄으로써 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알게 하려는 것이다.
준비물 • 색종이, 컴퍼스, 자, 연필, 가위

1. ∠PDA와 ∠PBC는 겹쳐 보면 일치하므로
$\angle PDA = \angle PBC$
∠APD와 ∠CPB는 겹쳐 보면 일치하므로
$\angle APD = \angle CPB$
따라서 △PAD와 △PCB에서 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로
$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$

2. $\triangle PAD \backsim \triangle PCB$이므로
$\overline{AD} : \overline{CB} = \overline{AP} : \overline{CP} = \overline{DP} : \overline{BP}$

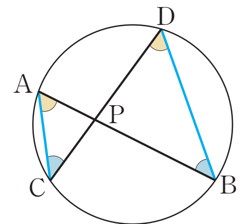
추/론

|출제 의도| 주어진 조건에서 현과 접선이 평행함을 보임으로써 원의 접선과 현이 이루는 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있음을 알게 하기 위한 문제이다.



풀이 오른쪽 그림과 같이
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$를 그으면 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$이므로
$\angle ACB = \angle CAB$ ……①
직선 l은 접선이므로
$\angle CBT = \angle CAB$ ……②
①, ②에서 $\angle ACB = \angle CBT$
따라서 엇각의 크기가 같으므로 직선 l과 현 AC는 서로 평행하다.

본문 해설



❶ $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$임을 보일 때, 오른쪽 그림과 같이 선분 AC, BD를 그어서 설명할 수도 있다.
△PAC와 △PDB에서
$\angle PAC = \angle PDB$ (원주각)
$\angle PCA = \angle PBD$ (원주각)
이므로
$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

❷ △PAD와 △PCB가 닮음임을 보일 때, 여러 가지 방법으로 설명할 수 있다. 예를 들면 다음과 같다.
$\angle DAP = \angle BCP$ (원주각)
$\angle ADP = \angle CBP$ (원주각)
이므로
$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$

8

목표| 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

$2\times x=4\times 3$

$x=\mathbf{6}$

(2) $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

$5\times(5+3)=x\times(x+6)$

$40=x^2+6x$

$x^2+6x-40=0$

$(x-4)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=\mathbf{4}$

창의 UP

|출제 의도| 원주각을 활용하여 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$가 성립함을 설명함으로써 원의 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 이해하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 원 O의 접선 PT와 현 AT가 이루는 각 ∠PTA의 크기는 $\overset{\frown}{AT}$에 대한 원주각 ∠PBT의 크기와 같으므로

∠PTA=∠PBT ······①

△PAT와 △PTB에서

∠P는 공통 ······②

①, ②에서 삼각형의 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

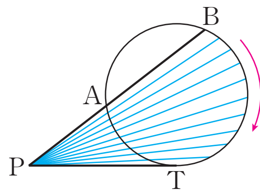
△PAT∽△PTB

이다. 두 닮은 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비는 일정하므로

$\overline{PA}:\overline{PT}=\overline{PT}:\overline{PB}$

따라서 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이다.

참고| 오른쪽 그림을 이용하여 할선 PB가 접선 PT에 가까워지면 두 점 A, B는 점 T에 가까이 가므로 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$의 값이 $\overline{PT}^2$의 값에 가까워짐을 직관적으로 이해할 수 있다.



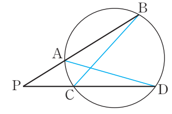
교과서 260 쪽

△PAD와 △PCB에서 ∠PDA=∠PBC이고, ∠P는 공통이므로 △PAD∽△PCB

한편 한 원에서 두 현 AB, CD의 연장선이 점 P에서 만나는 경우에도 앞과 같은 방법으로

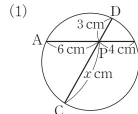
$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$

가 성립함을 알 수 있다.

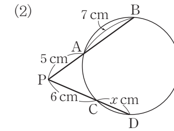


예제 2 다음 그림과 같은 원에서 x의 값을 구하여라.

(1)



(2)



(2) 그림에서 $\overline{PA}\cdot\overline{AB}=\overline{PC}\cdot\overline{CD}$로 생각하지 않도록 주의한다.

풀이 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

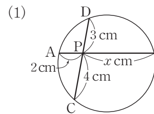
(1) $6\times4=x\times3$, $x=8$

(2) $5\times(5+7)=6\times(6+x)$, $60=36+6x$, $x=4$

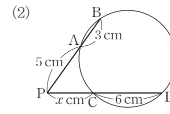
답 (1) 8 (2) 4

문제 8 다음 그림과 같은 원에서 x의 값을 구하여라.

(1)

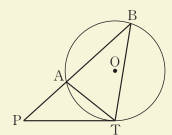


(2)



창의 UP

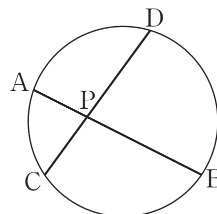
오른쪽 그림과 같이 원 O의 외부에 있는 한 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점을 T라 하고, 점 P를 지나는 할선이 원 O와 만나는 점을 A, B라고 하자. 원주각을 활용하여 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$가 성립함을 설명하여라.



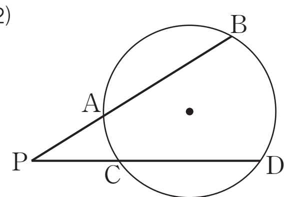
지/도/자/료

한 원에서 평행하지 않은 두 현 AB, CD 또는 그 연장선이 만나는 것은 다음과 같이 두 가지 경우로 나눌 수 있다. 즉, 원의 내부의 한 점 P에서 만나는 경우, 원의 외부의 한 점 P에서 만나는 경우이다.

(1)



(2)



두 경우 모두 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이다.

교과서 261 쪽

중 / 단 / 원 기초

한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 그 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

1 다음 그림과 같은 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

(1) (2)

2 다음 그림과 같은 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

(1) (2)

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

3 다음 그림과 같은 원에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

(1) (2)

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

4 오른쪽 그림에서 직선 TT′은 원 O의 접선이고 점 A는 접점일 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 구하여라.

5 오른쪽 그림과 같은 원에서 x의 값을 구하여라.

중/단/원 기초

1

목표| 원주각과 중심각 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\angle x=\frac{1}{2}\times 120^\circ=\mathbf{60^\circ}$

(2) $\angle x=2\times 50^\circ=\mathbf{100^\circ}$

2

목표| 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$이므로

$\angle x=\mathbf{30^\circ}$

(2) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$이므로

$\angle x=\mathbf{40^\circ}$

3

목표| 원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\angle x+70^\circ=180^\circ$

$\angle x=\mathbf{110^\circ}$

(2) $\angle ABC+80^\circ=180^\circ$

$\angle ABC=100^\circ$

$\angle ABC+\angle x=180^\circ$(평각)이므로

$\angle x=180^\circ-\angle ABC$

$=180^\circ-100^\circ$

$=\mathbf{80^\circ}$

4

목표| 원의 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 TT′은 접선이므로

$\angle x=\angle QAT'=\mathbf{65^\circ}$

$\angle y=\angle PAT=\mathbf{55^\circ}$

5

목표| 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

$5\times 9=3\times x$, $3x=45$

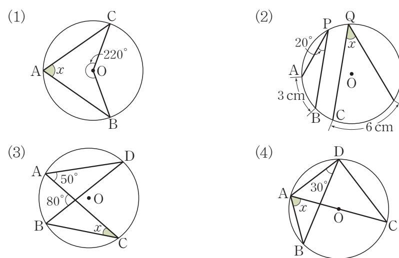
$x=\mathbf{15}$

교과서 262 쪽

중 / 단 / 원 기본

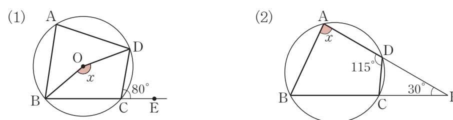
원주각의 성질

1 다음 그림과 같은 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.



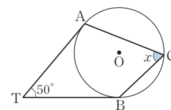
원에 내접하는 사각형의 성질

2 다음 그림과 같은 원에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.



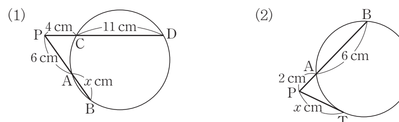
접선과 현이 이루는 각

3 오른쪽 그림에서 선분 AT, BT는 각각 원 O와 점 A, B에서 접하고 $\angle \mathrm{ATB}=50^\circ$일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



두 현이 만나서 생기는 선분의 길이

4 다음 그림과 같은 원에서 x의 값을 구하여라. (단, 점 T는 접점이다.)



중/단/원 기본

1

목표| 원주각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\angle x=\frac{1}{2}\times(360^\circ-220^\circ)=\mathbf{70^\circ}$

(2) $\angle x : 20^\circ=6:3$, $\angle x=\mathbf{40^\circ}$

(3) $\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{ACB}=\angle x$

$\angle x+50^\circ=80^\circ$, $\angle x=\mathbf{30^\circ}$

(4) $\angle \mathrm{BDC}=\angle \mathrm{BAC}=\angle x$

$\angle \mathrm{ADC}=90^\circ$이므로

$\angle x+30^\circ=90^\circ$, $\angle x=\mathbf{60^\circ}$

2

목표| 원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\angle \mathrm{BCD}+80^\circ=180^\circ$(평각)이므로

$\angle \mathrm{BCD}=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

$\angle \mathrm{A}+100^\circ=180^\circ$이므로

$\angle \mathrm{A}=180^\circ-100^\circ=80^\circ$

$\angle x=2\angle \mathrm{A}=\mathbf{160^\circ}$

(2) $\triangle \mathrm{PCD}$에서

$\angle \mathrm{DCP}+30^\circ=115^\circ$이므로 $\angle \mathrm{DCP}=85^\circ$

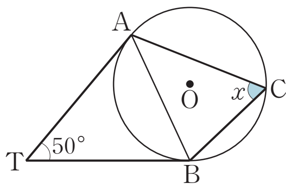
$\angle \mathrm{BCD}+85^\circ=180^\circ$(평각)이므로 $\angle \mathrm{BCD}=95^\circ$

$\angle x+95^\circ=180^\circ$이므로 $\angle x=180^\circ-95^\circ=\mathbf{85^\circ}$

3

목표| 원의 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이|



$\angle \mathrm{TBA}=\angle \mathrm{ACB}=\angle x$

선분 AT, BT는 접선이므로 $\overline{\mathrm{AT}}=\overline{\mathrm{BT}}$

따라서 $\angle \mathrm{TAB}=\angle \mathrm{TBA}=\angle x$이다.

$\triangle \mathrm{TBA}$에서

$50^\circ+\angle x+\angle x=180^\circ$, $\angle x=\mathbf{65^\circ}$

4

목표| 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계와 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}\cdot\overline{\mathrm{PD}}$이므로

$6\times(6+x)=4\times(4+11)$, $x=\mathbf{4}$

(2) $\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$이므로 $x^2=2\times(2+6)$에서 $x=\mathbf{4}$

중/단/원 실력

1

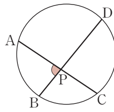
목표| 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$의 길이는 원의 둘레의 길이의 $\frac{1}{5}$이므로

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$에 대한 중심각의 크기는 $360^\circ\times\frac{1}{5}=72^\circ$

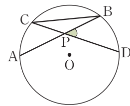
중 / 단 / 원 실력

1 오른쪽 그림에서 $\overset{\frown}{AB}$의 길이는 원의 둘레의 길이의 $\frac{1}{5}$이고 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{CD}=3:4$일 때, $\angle APB$의 크기를 구하여라.



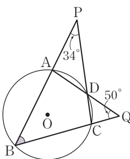
• 한 원에서 호의 길이는 원주각의 크기에 정비례한다.

2 오른쪽 그림에서 반지름의 길이가 6인 원 O의 두 현 AB, CD가 점 P에서 만나고 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=3\pi$일 때, $\angle BPD$의 크기를 구하여라.

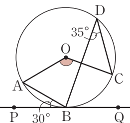


• 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

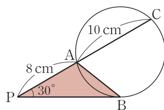
3 오른쪽 그림에서 원 O에 내접하는 □ABCD의 변 AB, CD의 연장선의 교점을 P, 변 AD, BC의 연장선의 교점을 Q라고 하자. $\angle P=34^\circ$, $\angle Q=50^\circ$일 때, $\angle B$의 크기를 구하여라.



4 오른쪽 그림에서 직선 PQ는 점 B에서 원 O와 접한다.
$\angle ABP=30^\circ$, $\angle BDC=35^\circ$
일 때, $\angle AOC$의 크기를 구하여라.



5 오른쪽 그림에서 $\overline{PB}$는 원의 접선이고, 점 B는 접점이다. $\angle P=30^\circ$, $\overline{PA}=8$ cm, $\overline{AC}=10$ cm일 때, △APB의 넓이를 구하여라.



$\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기는

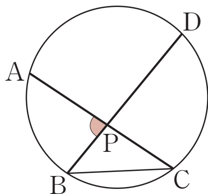
$\angle ACB=\frac{1}{2}\times 72^\circ=36^\circ$

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{CD}=3:4$이므로

$36^\circ:\angle DBC=3:4$

$\angle DBC=48^\circ$

△PBC에서 $\angle APB=36^\circ+48^\circ=$ **84°**



2

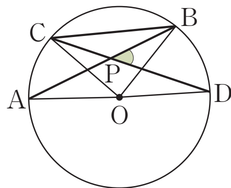
목표| 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times 6=12\pi$이므로

$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=3\pi$는 원의 둘레의

길이의 $\frac{1}{4}$이다.



즉, $\angle AOC+\angle BOD=360^\circ\times\frac{1}{4}=90^\circ$

$\angle ABC+\angle BCD=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$

△PBC에서

$\angle BPD=\angle PBC+\angle PCB=$ **45°**

3

목표| 원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\angle B=x$라고 하면 △PBC에서

$\angle PCQ=x+34^\circ$

□ABCD는 원에 내접하므로

$\angle CDA=180^\circ-x$

△DCQ에서 $180^\circ-x=(x+34^\circ)+50^\circ$

$2x=96^\circ$, $\angle B=x=$ **48°**

4

목표| 원주각과 중심각 사이의 관계와 원의 접선과 현이 이루는 각에 대한 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

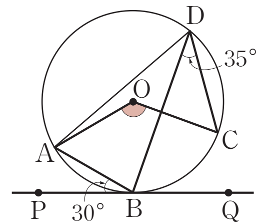
풀이| $\angle ADB=\angle ABP=30^\circ$

$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC$

$=30^\circ+35^\circ=65^\circ$

$\angle AOC=2\angle ADC$

$=2\times 65^\circ=$ **130°**



5

목표| 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{PB}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PC}$이므로

$\overline{PB}^2=8\times(8+10)=144$

$\overline{PB}>0$이므로 $\overline{PB}=12$(cm)

$\triangle APB=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\frac{1}{2}=$ **24(cm²)**

수행 과제

● 수행 과제 의도

이 수행 과제는 색지에 원을 그려 오린 다음 실을 이용하여 일정한 길이의 현을 만들어 봄으로써 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 확인할 수 있도록 하기 위한 것이다.

주의 일정하게 현을 만들 때 반드시 원의 톱날을 한 칸씩 옮겨 현의 길이가 같도록 한다.

과제 1 _예시

길이가 같은 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다. 따라서 색지의 안쪽에 만들어지는 도형은 중심으로부터 같은 거리에 있는 점들이 모여서 생긴 도형이므로 원 모양이 된다.

교과서 264 쪽

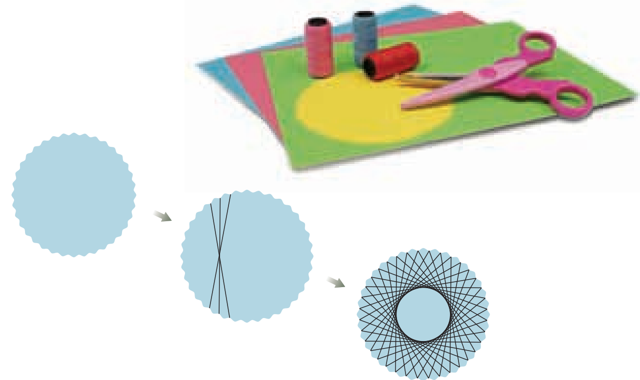
수행 과제

실로 만드는 원과 현

●준비물 두꺼운 색지, 컴퍼스, 연필, 핑킹가위, 실

다음과 같은 순서에 따라 원과 현을 만들어 보자.

❶ 두꺼운 색지에 원을 그린 후, 핑킹가위로 원을 따라 오린다.
❷ 원의 톱날에 실을 걸쳐서 현을 만든다.
❸ 원의 톱날을 한 칸씩 옮겨 원을 감으면서 길이가 같은 현을 계속 만들어 간다.
❹ 현을 계속 만들다가 처음 시작한 곳까지 오면 실을 묶어 풀어지지 않도록 고정시킨다.



과제 1 색지의 안쪽에 만들어지는 도형이 원 모양이 되는 이유를 말하여 보자.

과제 2 만들어진 원의 중심은 처음 원의 중심과 일치하는지 말하여 보자.

교과서 265 쪽

학습에 대한 자/기/평/가

이름: ____________

점검 항목				
학습 내용	원의 현에 관한 성질을 이해하였는가?			
	원의 접선에 관한 성질을 이해하였는가?			
	원주각의 성질을 이해하였는가?			
	원주각을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는가?			
학습 태도	학습 준비물을 잘 준비하였는가?			
	수업 시간에 적극적으로 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			

재미있었거나 어려웠던 내용 적어 보기

더 알고 싶거나 궁금한 점 적어 보기

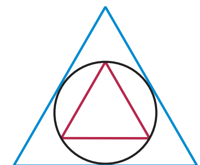
스스로 평가하기

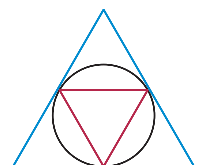
선생님 의견

과제 2 _예시

만들어진 원의 중심은 처음 원의 중심과 일치한다.

읽/기/자/료





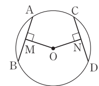
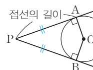
원의 안쪽과 바깥쪽에 각각 접하는 두 개의 정삼각형이 있다. 이때 바깥쪽의 정삼각형의 넓이는 안쪽의 정삼각형의 넓이의 몇 배일까?
안쪽 삼각형을 뒤집어 보면 쉽게 알 수 있다. 오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 정삼각형의 넓이는 안쪽 정삼각형의 넓이의 4배이다.

교과서 266 쪽

Ⅶ. 원의 성질

대단원 핵심 한눈에 보기

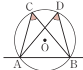
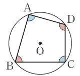
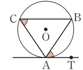
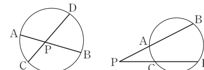
① 원과 직선

현의 수직 이등분선	(1) 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다. (2) 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.
원의 중심과 현의 길이	한 원에서 (1) 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다. ⇨ $\overline{OM}=\overline{ON}$이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$ (2) 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다. ⇨ $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overline{OM}=\overline{ON}$ 
접선의 길이	원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. ⇨ $\overline{PA}=\overline{PB}$ 

② 원주각

원주각과 호	한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다. ⇨ $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$
	한 원에서 (1) 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다. (2) 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다. (3) 호의 길이는 원주각의 크기에 정비례한다.

③ 원주각의 활용

네 점이 한 원 위에 있을 조건	두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있을 때, $\angle ACB=\angle ADB$이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다. 
원에 내접하는 사각형	원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다. $\angle ABC+\angle CDA=180^\circ$ $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$ 
접선과 현이 이루는 각	원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. ⇨ $\angle BAT=\angle BCA$ 
두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계	한 원에서 두 현 AB, CD 또는 이들의 연장선이 만나는 점을 P라고 하면 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ 

이번 단원에서 배운 용어와 기호

• 원주각

지도 내용

1. 원에서 현의 수직이등분선의 성질과 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계, 원의 접선의 길이에 관한 성질을 정리할 수 있도록 한다.

2. 원주각의 성질, 네 점이 한 원 위에 있을 조건, 원에 내접하는 사각형의 성질, 접선과 현이 이루는 각의 성질, 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 정리할 수 있도록 한다.

교과서 267 쪽

만화로 보는 수학 이야기

원에 꼭 맞는 사각형?

생각 키/우/기 | 원 도사의 도술이 정사각형 도사의 제자에게 통하지 않은 이유를 말하여 보자.

만화로 보는 수학 이야기

만화에서 정사각형은 원에 내접하지만 내접하지 않는 사각형도 있다는 것을 보여 주고 있다. 사각형이 원에 내접하기 위해서는 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°가 되어야 한다.

생각 키/우/기

정사각형 도사의 제자는 두 쌍의 대각의 크기의 합이 모두 180°가 되지 않으므로 원에 내접하지 않기 때문에 원에 내접하는 사각형을 갇히게 하는 원 도사의 도술이 통하지 않았다.

대 / 단 / 원 평 가 문 제

1

목표 | 현의 수직이등분선의 성질을 알게 한다.

풀이 | $\overline{AM}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$(cm)

$x=2\times\overline{AM}=4\sqrt{3}$ **답** ③

2

목표 | 원의 현에 관한 성질을 알게 한다.

풀이 | ③ $\overline{OA}=\overline{OC}$ (반지름)

⑤ $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CN}=\overline{DN}$ **답** ②

3

목표 | 원주각과 중심각 사이의 관계를 알게 한다.

풀이 | $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 52^\circ=26^\circ$

답 ①

4

목표 | 원의 접선과 현에 관한 성질을 알게 한다.

풀이 | $\triangle OAP$는 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$(cm)

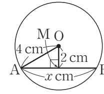
$\overline{AB}=2\overline{AP}=2\sqrt{5}$(cm) **답** ④

교과서 268 쪽

대 / 단 / 원 평 가 문 제

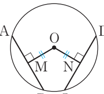
선/택/형

1 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 x의 값은?



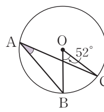
① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$
③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$
⑤ $6\sqrt{3}$

2 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?



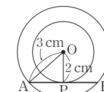
① $\overline{AB}=\overline{CD}$
② $\overline{BM}=\overline{ON}$
③ $\overline{OA}=\overline{OC}$
④ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$
⑤ $\overline{AM}=\overline{CN}$

3 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\angle BOC=52^\circ$일 때, $\angle BAC$의 크기는?



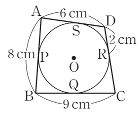
① 26° ② 30°
③ 45° ④ 50°
⑤ 52°

4 오른쪽 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 각각 2 cm, 3 cm인 두 원이 있다. 작은 원 위의 점 P에서 그은 접선이 큰 원과 만나는 점을 A, B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이는?



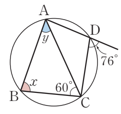
① $2\sqrt{2}$ cm ② $2\sqrt{3}$ cm ③ 4 cm
④ $2\sqrt{5}$ cm ⑤ $2\sqrt{6}$ cm

5 오른쪽 그림에서 원 O가 □ABCD의 각 변과 점 P, Q, R, S에서 접할 때, $\overline{CR}$의 길이는?



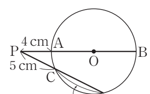
① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm
④ 6 cm ⑤ 7 cm

6 오른쪽 그림과 같은 원에서 $\angle x-\angle y$의 크기는?



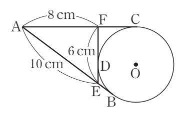
① 32° ② 34°
③ 36° ④ 38°
⑤ 40°

7 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고 $\overline{PA}=4$ cm, $\overline{PC}=5$ cm, $\overline{CD}=7$ cm일 때, 원 O의 반지름의 길이는?



① $\frac{7}{2}$ cm ② $\frac{9}{2}$ cm ③ $\frac{11}{2}$ cm
④ $\frac{13}{2}$ cm ⑤ $\frac{15}{2}$ cm

8 오른쪽 그림에서 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$는 원 O의 접선이고, 점 B, C는 접점이다. 원 O 위의 점 D에서 그은 접선이 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$와 만나는 점을 각각 E, F라고 할 때, $\overline{BE}$의 길이는?



① 1 cm ② 2 cm ③ 3 cm
④ 4 cm ⑤ 5 cm

5

목표 | 원의 접선에 관한 성질을 활용할 수 있게 한다.

풀이 | $8+(2+\overline{CR})=6+9$, $\overline{CR}=5$(cm) **답** ③

6

목표 | 원에 내접하는 사각형의 성질을 알게 한다.

풀이 | $\angle ADC=180^\circ-76^\circ=104^\circ$

$\angle x=180^\circ-\angle ADC=180^\circ-104^\circ=76^\circ$

$\angle y=180^\circ-(76^\circ+60^\circ)=44^\circ$

$\angle x-\angle y=32^\circ$ **답** ①

7

목표 | 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이 | $4\times(4+2\overline{OA})=5\times(5+7)$, $\overline{OA}=\frac{11}{2}$(cm)

답 ③

8

목표 | 원의 접선에 관한 성질을 활용할 수 있게 한다.

풀이 | $\overline{CF}=x$ cm, $\overline{BE}=y$ cm라고 하면

$\overline{AC}=\overline{AB}$이므로 $8+x=10+y$에서 $x-y=2$

$\overline{EF}=\overline{DF}+\overline{DE}=x+y=6$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=2$ **답** ②

9

목표 | 원주각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이 | $\angle BCD=180^\circ-100^\circ=80^\circ$

$\angle DCE=\angle DBC=180^\circ-(40^\circ+80^\circ)=60^\circ$ **답** ③

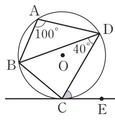
10

목표 | 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 알게 한다.

풀이 | ㉡ $\angle BAC\neq\angle BDC$

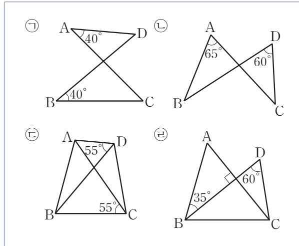
㉣ $\angle BAC=180^\circ-(35^\circ+90^\circ)=55^\circ\neq\angle BDC$ **답** ②

9 오른쪽 그림에서 $\overleftrightarrow{CE}$는 원 O의 접선이고, 점 C는 접점이다. □ABCD가 원 O에 내접할 때, ∠DCE의 크기는?



① 40° ② 50° ③ 60°
④ 70° ⑤ 80°

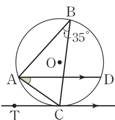
10 다음 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것을 모두 찾은 것은?



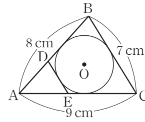
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

서/답/형

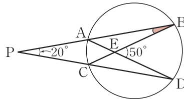
11 오른쪽 그림에서 직선 TC는 원 O의 접선이고, 점 C는 접점이다. 직선 TC와 현 AD는 평행하고 ∠ABC=35°일 때, ∠CAD의 크기를 구하여라.



12 다음 그림과 같이 원 O는 △ABC의 내접원이고 $\overline{DE}$는 원 O에 접할 때, △ADE의 둘레의 길이를 구하여라.

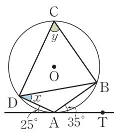


13 다음 그림에서 점 P는 두 현 AB, CD의 연장선의 교점일 때, ∠ABC의 크기를 구하여라.



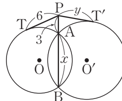
|서술형|

14 오른쪽 그림에서 $\overleftrightarrow{AT}$는 원 O의 접선이고 점 A는 접점일 때, ∠x+∠y의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서술형|

15 다음 그림에서 x, y의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, 점 T, T′은 각각 원 O, O′의 접점이다.)



13

목표| 원주각의 성질을 활용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| ∠ABC$=x$라고 하면

∠ADC=∠ABC$=x$

△PCB에서

∠BCD=∠BPC+∠PBC

$=20°+x$

△ECD에서

∠BED=∠ECD+∠EDC

$50°=(20°+x)+x$, $x=15°$

답 15°

14

목표| 원주각의 성질을 활용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\angle x=\angle BAT=35°$ …㉠

$\angle DAB=180°-(25°+35°)$

$=120°$

$\angle y=180°-\angle DAB$

$=180°-120°=60°$ …㉡

$\angle x+\angle y=95°$ …㉢

답 95°

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	∠x의 크기 구하기	㉠	40%
	∠y의 크기 구하기	㉡	40%
답 구하기	∠x+∠y의 크기 구하기	㉢	20%

11

목표| 원의 접선과 현이 이루는 각에 대한 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| ∠CAD=∠ACT=∠ABC=35°

답 35°

12

목표| 원의 접선에 관한 성질을 활용할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{AE}$

$=\overline{AD}+(\overline{DQ}+\overline{EQ})+\overline{AE}$

$=\overline{AD}+(\overline{DP}+\overline{ER})+\overline{AE}$

$=(\overline{AD}+\overline{DP})+(\overline{ER}+\overline{AE})$

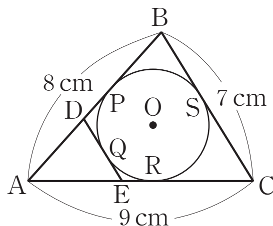
$=\overline{AP}+\overline{AR}$

$=(\overline{AB}-\overline{BP})+(\overline{AC}-\overline{CR})$

$=(\overline{AB}-\overline{BS})+(\overline{AC}-\overline{CS})$

$=\overline{AB}+\overline{AC}-(\overline{BS}+\overline{CS})$

$=\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}=8+9-7=10$(cm)



답 10 cm

15

목표| 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 활용할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로 $6^2=3\times(3+x)$ …㉠

$x=9$

$\overline{PT'}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로 $y^2=3\times(3+9)$ …㉡

$y>0$이므로 $y=6$

$x=9$, $y=6$ …㉢

답 $x=9$, $y=6$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$를 이용하여 식 세우기	㉠	40%
	$\overline{PT'}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$를 이용하여 식 세우기	㉡	40%
답 구하기	x와 y의 값 구하기	㉢	20%

교과서 270 쪽

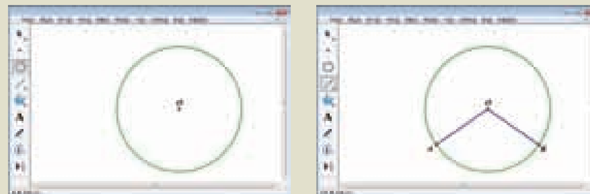
컴퓨터의 활용

컴퓨터로 원주각의 성질을 알아보자.

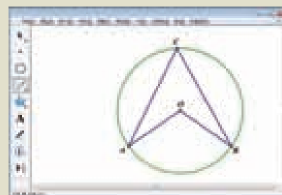
도형을 그리는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배임을 확인하여 보자.

1 한 호에 대한 중심각과 원주각을 그려 보자.

1. 아이콘 [ ]을 클릭하여 원 O를 그리고, 아이콘 [ ]을 클릭하여 반지름 OA, OB를 그린다. 이때 ∠AOB는 $\widehat{AB}$에 대한 중심각이다.



2. 아이콘 [ ]을 클릭하여 원 위의 한 점 C를 그리고, 아이콘 [ ]을 클릭하여 $\overline{CA}$, $\overline{CB}$를 그린다. 이때 ∠ACB는 $\widehat{AB}$에 대한 원주각이다.

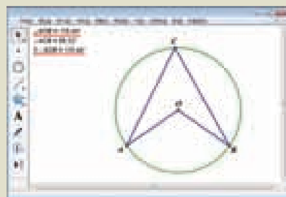


교과서 271 쪽

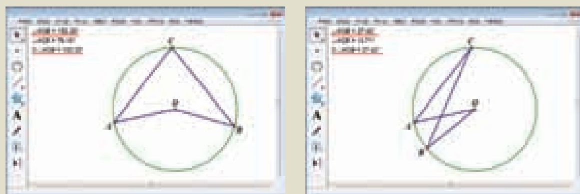
원주각의 성질

2 한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배임을 확인하여 보자.

1. 아이콘 [ ]을 클릭한 후 점 A, O, B를 차례로 선택하고, 메뉴에서 [측정]-[각의 크기]를 클릭하면 ∠AOB의 크기가 구해진다.
마찬가지 방법으로 ∠ACB의 크기도 구한 후, 메뉴에서 [수]-[계산]을 클릭하여 2∠ACB의 크기를 구하면 ∠AOB=2∠ACB임을 확인할 수 있다.



2. 아이콘 [ ]을 클릭한 후 두 점 A, B를 선택하고, 원 위에서 드래그하여 각의 크기를 변형시켜도 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배임을 확인할 수 있다.



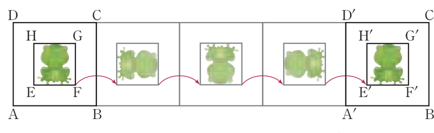
수학산책

아리스토텔레스의 바퀴

지구가 돌고 있다는 것을 밝혀낸 수학자 중 한 사람인 갈릴레이(Galilei, G. : 1564~1642)가 1638년에 쓴 "두 가지 새로운 과학"이라는 책에는 다음과 같은 흥미로운 문제가 소개되어 있다.

"다음 그림과 같이 중심을 O로 하는 두 개의 바퀴를 생각하자. 중심이 같은 원을 동심원이라고 하는데, 이 동심원의 바퀴를 평면 상에서 1회전시키면 점 O, A, B는 각각 점 O′, A′, B′의 위치로 굴러간다. 여기서 작은 바퀴와 큰 바퀴는 모두 정확하게 1회전하였다. 이때 $\overline{AA'}$의 길이는 작은 바퀴의 둘레의 길이이고, $\overline{BB'}$의 길이는 큰 바퀴의 둘레의 길이이다. 또 $\overline{AA'}=\overline{BB'}$이므로 큰 바퀴와 작은 바퀴의 둘레의 길이는 같다. 그렇다면 바퀴는 반지름의 길이에 관계없이 항상 같은 거리를 움직일까?"

직관적으로 생각하면 큰 바퀴 위의 점은 항상 $\overline{BB'}$ 위에 나타날 것이고, 작은 바퀴 위의 점은 $\overline{AA'}$ 위에 나타날 것이다. 따라서 큰 바퀴와 작은 바퀴의 둘레의 길이는 바퀴의 반지름의 길이에 관계없이 같다는 이상한 결론이 나온다. 그러나 이 문제는 다음 그림과 같이 정사각형을 회전시켜 보면 쉽게 이해할 수 있다.



큰 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 1, □ABCD 내부에 있는 작은 정사각형 EFGH의 한 변의 길이를 $\frac{1}{2}$이라 하고 두 정사각형을 동시에 한 바퀴 굴리면 □ABCD는 그림과 같이 □A′B′C′D′이 된다. 이때 □ABCD가 굴러간 거리는 두 점 A와 A′ 사이의 거리와 같고, $\overline{AA'}$의 길이는 큰 정사각형의 둘레의 길이이므로 $1\times4=4$이다. 또 □ABCD가 한 바퀴 구르는 동안 □EFGH도 한 바퀴 굴렀고, □EFGH의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$이므로 이 작은 정사각형이 한 바퀴 구른 거리는 $\frac{1}{2}\times4=2$가 되어야 한다.

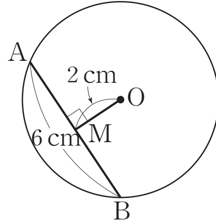
그런데 작은 정사각형이 처음에 있던 자리의 점 E와 한 바퀴 구른 후의 자리인 점 E′ 사이의 거리, 즉 $\overline{EE'}$의 길이는 $\overline{AA'}$의 길이와 같은 4이다. 그렇다면 2는 어디서 생긴 것일까? 그림을 잘 보면 큰 정사각형의 변은 언제나 $\overline{AA'}$에 밀착되어 있으나, 작은 정사각형의 변은 군데군데에서 점프하고 있다. 즉, □EFGH가 굴러 □E′F′G′H′으로 옮겨 가는 동안 화살표로 표시한 4개의 '점프하는 부분'이 생기게 된다. 이 '점프하는 부분'의 길이의 합이 바로 2인 것이다.

이와 같은 방법으로 원을 생각하면 작은 바퀴의 둘레와 큰 바퀴의 둘레는 무한히 많은 '점프하는 부분'을 합한 만큼 차이가 나는 것이다. 다시 말해서 큰 바퀴가 굴러가는 동안 작은 바퀴는 눈에 띄지 않게 점프하면서 굴러간 것이다.

이것은 이미 아리스토텔레스(Aristoteles : B.C. 384~B.C. 322)가 설명한 적이 있기 때문에 '아리스토텔레스의 바퀴'라고 부른다.

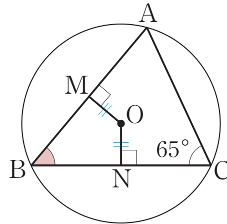
선/택/형

1 오른쪽 그림에서 원 O의 반지름의 길이는? [5점]



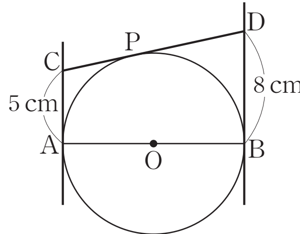
① 3 cm ② $\sqrt{10}$ cm ③ $2\sqrt{3}$ cm ④ $\sqrt{13}$ cm ⑤ $\sqrt{15}$ cm

2 오른쪽 그림에서 ∠ABC의 크기는? [5점]



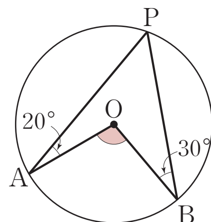
① 45° ② 50° ③ 55° ④ 60° ⑤ 65°

3 오른쪽 그림과 같이 원 O의 지름 AB의 양 끝 점에서 그은 접선과 원 O 위의 점 P에서 그은 접선이 만나는 점을 각각 C, D라고 할 때, $\overline{CD}$의 길이는? [5점]



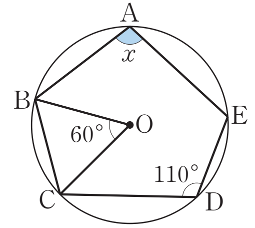
① 5 cm ② 8 cm ③ 13 cm ④ 16 cm ⑤ 20 cm

4 오른쪽 그림에서 ∠AOB의 크기는? [6점]



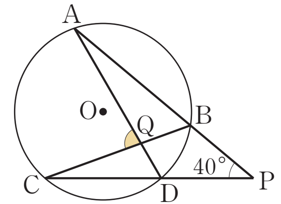
① 95° ② 100° ③ 105° ④ 110° ⑤ 115°

5 오른쪽 그림에서 ∠x의 크기는? [6점]



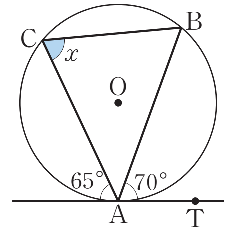
① 60° ② 80° ③ 100° ④ 120° ⑤ 140°

6 오른쪽 그림에서 점 P는 두 현 AB, CD의 연장선의 교점이고, $\overset{\frown}{AC}$의 길이가 $\overset{\frown}{BD}$의 길이의 3배일 때, ∠AQC의 크기는? [6점]



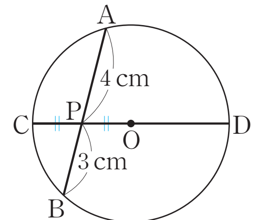
① 80° ② 100° ③ 120° ④ 140° ⑤ 160°

7 오른쪽 그림에서 직선 AT는 원 O의 접선이고 점 A는 접점일 때, ∠x의 크기는? [5점]



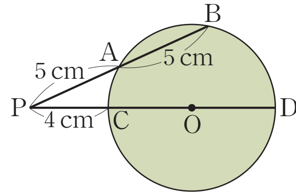
① 65° ② 70° ③ 75° ④ 80° ⑤ 85°

8 오른쪽 그림에서 원 O의 반지름의 길이는? [6점]



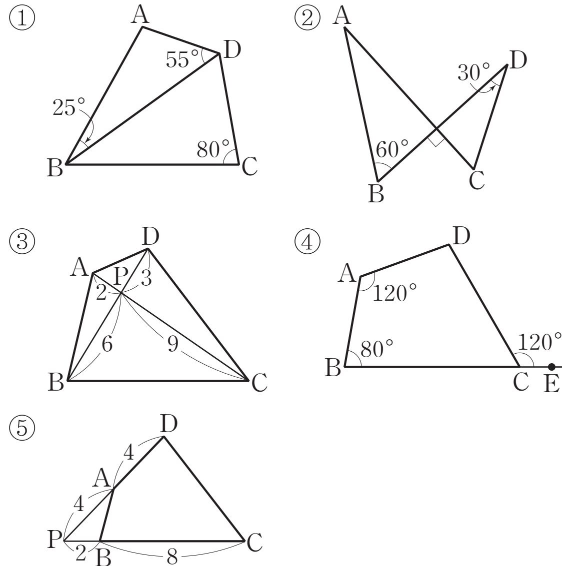
① 2 cm ② 2.5 cm ③ 3 cm ④ 3.5 cm ⑤ 4 cm

9 오른쪽 그림에서 원 O의 넓이는? [6점]



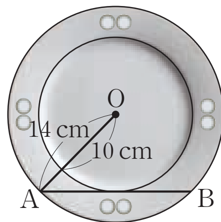
① $4\pi\ \text{cm}^2$ ② $\frac{169}{4}\pi\ \text{cm}^2$ ③ $\frac{169}{16}\pi\ \text{cm}^2$
④ $\frac{289}{16}\pi\ \text{cm}^2$ ⑤ $\frac{625}{16}\pi\ \text{cm}^2$

10 다음 중에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있지 않은 것은? [6점]

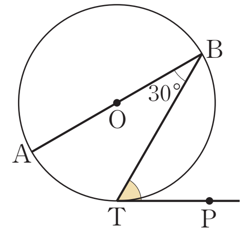


서/답/형

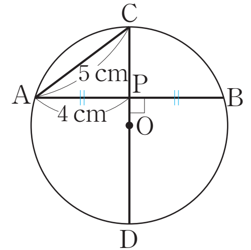
11 오른쪽 그림의 접시에서 둥근 선은 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 14 cm, 10 cm인 두 원이다. 작은 원의 접선이 큰 원과 만나는 점을 A, B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라. [8점]



12 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고, 직선 PT는 접선이다. $\angle ABT=30^\circ$일 때, $\angle BTP$의 크기를 구하여라. [8점]

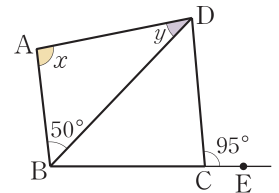


13 오른쪽 그림에서 $\overline{CD}$는 원 O의 지름이고 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$, $\overline{AP}=\overline{BP}$, $\overline{AC}=5\text{ cm}$, $\overline{AP}=4\text{ cm}$일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라. [8점]



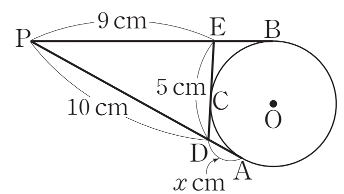
| 서술형 |

14 오른쪽 그림에서 □ABCD는 원에 내접하는 사각형일 때, $\angle x-\angle y$의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [10점]



| 서술형 |

15 오른쪽 그림에서 직선 PA, PB는 원 O의 접선이고, 점 A, B는 접점이다. 원 O 위의 점 C에서 그은 접선이 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$와 만나는 점을 각각 D, E라고 할 때, x의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. [10점]



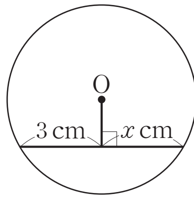
60점 미만이면 **하 · 수준** 문제를, 60점 이상 80점 미만이면 **중 · 수준** 문제를, 80점 이상이면 **상 · 수준** 문제를 풀어 보세요.

단 / 원 / 종 / 합 / 평 / 가

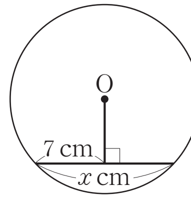
하·수준

1 다음 그림에서 x의 값을 구하여라.

(1)

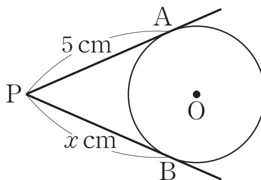


(2)

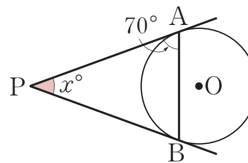


2 다음 그림에서 직선 PA와 PB는 원 O의 접선이고 점 A, B는 접점일 때, x의 값을 구하여라.

(1)

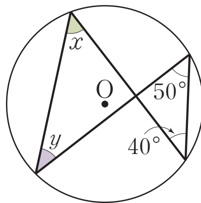


(2)

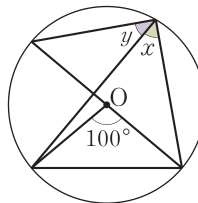


3 다음 그림에서 $\angle x$, $\angle y$의 크기를 구하여라.

(1)

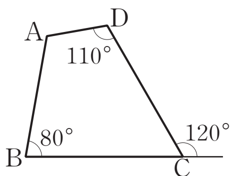


(2)

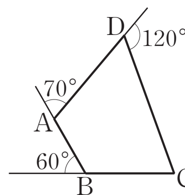


4 다음 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것을 찾고, 그 이유를 써라.

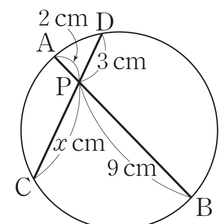
(1)



(2)

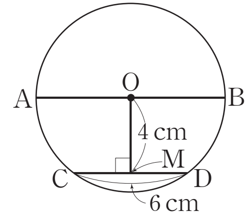


5 오른쪽 그림에서 x의 값을 구하여라.



중·수준

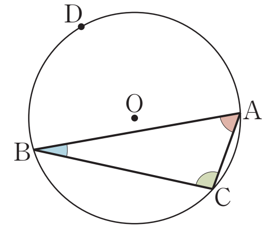
1 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고 $\overline{CD}\perp\overline{OM}$이다. $\overline{OM}=4$ cm, $\overline{CD}=6$ cm일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.



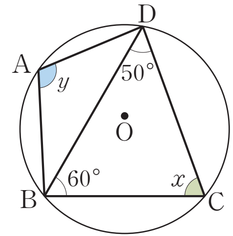
2 오른쪽 그림에서

$\widehat{ADB} : \widehat{BC} : \widehat{CA}=13 : 8 : 3$

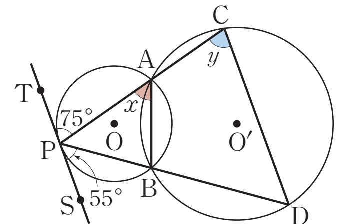
일 때, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 크기를 각각 구하여라.



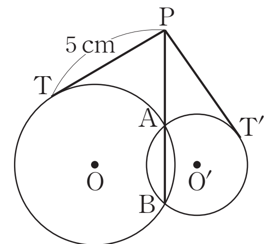
3 오른쪽 그림에서 □ABCD가 원 O에 내접할 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 구하여라.



4 오른쪽 그림에서 직선 TS는 원 O의 접선이고 점 P는 접점이다. $\overline{PA}$의 연장선이 원 O′과 만나는 점을 C, $\overline{PB}$의 연장선이 원 O′과 만나는 점을 D라고 할 때, $\angle x$, $\angle y$의 크기를 구하여라.

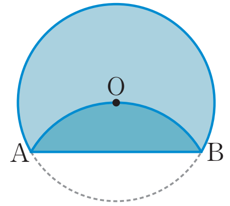


5 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점 P에서 두 원 O, O′에 접선을 긋고, 그 접점을 각각 T, T′이라고 하자. $\overline{PT}=5$ cm일 때, $\overline{PT'}$의 길이를 구하여라.

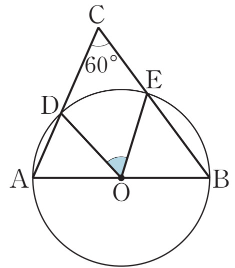


상·수준

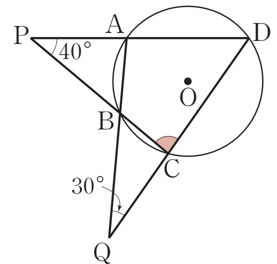
1 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 6 cm인 원 모양의 종이를 현 AB를 접는 선으로 하여 접었더니 $\widehat{AB}$가 원의 중심 O를 지나게 되었다. 이때 $\overline{AB}$의 길이를 구하여라.



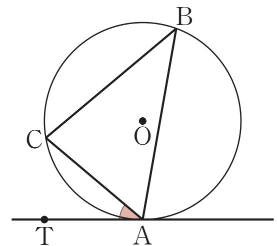
2 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고 $\angle ACB=60^{\circ}$일 때, $\angle DOE$의 크기를 구하여라.



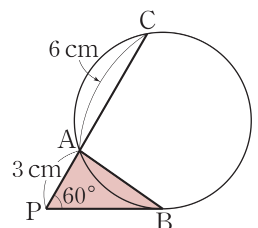
3 오른쪽 그림에서 원 O에 내접하는 □ABCD의 변 AD, BC의 연장선의 교점을 P, 변 AB, CD의 연장선의 교점을 Q라고 하자. $\angle P=40^{\circ}$, $\angle Q=30^{\circ}$일 때, $\angle BCD$의 크기를 구하여라.



4 오른쪽 그림에서 직선 AT는 원 O의 접선이고, 점 A는 접점이다. $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=4:3:2$일 때, $\angle CAT$의 크기를 구하여라.



5 오른쪽 그림에서 직선 PB는 원의 접선이고, 점 B는 접점이다. $\angle P=60^{\circ}$, $\overline{PA}=3$ cm, $\overline{AC}=6$ cm일 때, $\triangle APB$의 넓이를 구하여라.

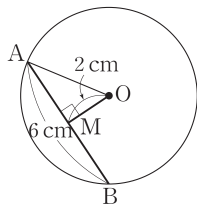


1 목표| 현의 수직이등분선에 대한 성질을 알게 한다.

풀이| $\overline{AM}=3(cm)$

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}(cm)$

답 ④



2 목표| 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$

$\angle ABC=180°-(65°+65°)=50°$

답 ②

3 목표| 원의 접선에 관한 성질을 알게 한다.

풀이| $\overline{CP}=\overline{CA}=5(cm)$

$\overline{DP}=\overline{DB}=8(cm)$

$\overline{CD}=\overline{CP}+\overline{DP}=5+8=13(cm)$

답 ③

4 목표| 원주각과 중심각 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $\overline{OA}=\overline{OP}=\overline{OB}$이므로

$\angle OPA=20°$, $\angle OPB=30°$

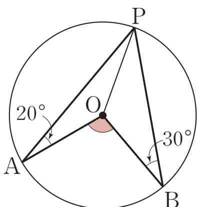
따라서

$\angle APB=20°+30°=50°$

이므로

$\angle AOB=2\angle APB$

$=2\times 50°=100°$



답 ②

5 목표| 원주각과 중심각 사이의 관계와 원에 내접하는 사각형의 성질을 알게 한다.

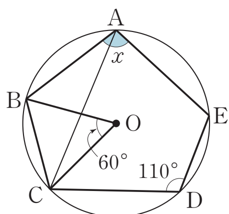
풀이| $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

$=30°$

$\angle CAE=180°-110°=70°$

$\angle x=\angle BAC+\angle CAE$

$=100°$



답 ③

6 목표| 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $\overset{\frown}{AC}$의 길이가 $\overset{\frown}{BD}$의 길이의 3배이므로

$\angle BAD=x$라고 하면 $\angle ADC=3x$

$\triangle ADP$에서 $3x=x+40°$, $x=20°$

$\angle BCD=\angle BAD=20°$, $\angle ADC=3\times 20°=60°$

이므로 $\triangle CDQ$에서 $\angle AQC=20°+60°=80°$

답 ①

7 목표| 접선과 현이 이루는 각의 성질을 알게 한다.

풀이| $\angle x=\angle BAT=70°$

답 ②

8 목표| 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| 원 O의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

$\overline{PC}=\frac{r}{2}$ cm, $\overline{PD}=r+\frac{r}{2}=\frac{3}{2}r$ cm

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

$4\times 3=\frac{r}{2}\times\frac{3}{2}r$, $r^2=16$

$r>0$이므로 $r=4$

답 ⑤

9 목표| 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| 원 O의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

$5\times(5+5)=4\times(4+2r)$이므로 $r=\frac{17}{4}$

따라서 원 O의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{17}{4}\right)^2=\frac{289}{16}\pi(cm^2)$

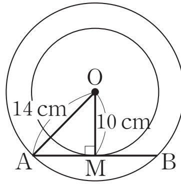
답 ④

10 목표| 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 알게 한다.

풀이| ⑤ $4\times(4+4)\neq 2\times(2+8)$

답 ⑤

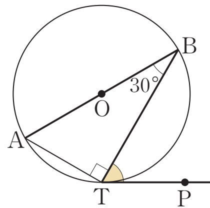
11 목표| 원의 현과 접선에 대한 성질을 알게 한다.



풀이| $\overline{AM}=\sqrt{14^2-10^2}$
$=4\sqrt{6}$(cm)
$\overline{AB}=2\overline{AM}=8\sqrt{6}$(cm)

답 $8\sqrt{6}$ cm

12 목표| 접선과 현이 이루는 각의 성질을 알게 한다.



풀이| $\angle ATB=90^\circ$
$\angle BAT=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)$
$=60^\circ$
$\angle BTP=\angle BAT=60^\circ$

답 60°

13 목표| 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $\overline{PC}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$(cm)
$\overline{PD}=2\overline{OC}-3$(cm)
$4\times4=3\times(2\overline{OC}-3)$, $\overline{OC}=\frac{25}{6}$(cm)

답 $\frac{25}{6}$ cm

14 목표| 원에 내접하는 사각형의 성질을 알게 한다.

풀이| $\angle BCD=180^\circ-95^\circ=85^\circ$
$\angle x=180^\circ-85^\circ=95^\circ$ …㉠
$\angle y=180^\circ-(95^\circ+50^\circ)=35^\circ$ …㉡
$\angle x-\angle y=95^\circ-35^\circ=60^\circ$ …㉢

답 60°

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\angle x$의 크기 구하기	㉠	4점
	$\angle y$의 크기 구하기	㉡	4점
답 구하기	$\angle x-\angle y$의 크기 구하기	㉢	2점

15 목표| 원의 접선에 관한 성질을 활용하게 한다.

풀이| $\overline{DC}=\overline{DA}=x$ cm …㉠
$\overline{EB}=\overline{EC}=(5-x)$ cm …㉡
$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $10+x=9+(5-x)$
$2x=4$, $x=2$ …㉢

답 2

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소		배점
해결 과정	$\overline{DC}$를 x cm로 나타내기	㉠	3점
	$\overline{EB}$를 $(5-x)$ cm로 나타내기	㉡	4점
답 구하기	x의 값 구하기	㉢	3점

하·수준

1 목표| 현의 수직이등분선의 성질을 알게 한다.

풀이| (1) $x=3$
(2) $x=2\times7=14$

답 (1) 3 (2) 14

2 목표| 원의 접선에 관한 성질을 알게 한다.

풀이| (1) $x=5$
(2) $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\angle PAB=\angle PBA$
$x^\circ=180^\circ-(70^\circ+70^\circ)=40^\circ$
$x=40$

답 (1) 5 (2) 40

3 목표| 원주각의 성질을 알게 한다.

풀이| (1) $\angle x=50^\circ$, $\angle y=40^\circ$
(2) $\angle x=\frac{1}{2}\times100^\circ=50^\circ$
$\angle x+\angle y=90^\circ$이므로 $\angle y=90^\circ-50^\circ=40^\circ$

답 (1) $\angle x=50^\circ$, $\angle y=40^\circ$ (2) $\angle x=50^\circ$, $\angle y=40^\circ$

4 목표| 사각형이 원에 내접하기 위한 조건을 알게 한다.

풀이| (1) $\angle ADC+\angle ABC=190^\circ\neq180^\circ$
따라서 □ABCD는 원에 내접하지 않으므로 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있지 않다.
(2) $\angle ABC=120^\circ$, $\angle ADC=60^\circ$이므로
$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$
따라서 □ABCD는 원에 내접하므로 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

답 (2), 풀이 참조

5 목표| 두 현이 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $2\times9=x\times3$, $x=6$

답 6

중·수준

1 목표| 현의 수직이등분선의 성질을 알게 한다.

풀이| $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{CD}=3(cm)$

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+4^2}=5(cm)$

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이므로 $\overline{AB}=5+5=10(cm)$

답 10 cm

2 목표| 원주각과 호의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $\angle A:\angle B:\angle C=8:3:13$이고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle A=180^\circ\times\frac{8}{24}=60^\circ$, $\angle B=180^\circ\times\frac{3}{24}=22.5^\circ$

$\angle C=180^\circ\times\frac{13}{24}=97.5^\circ$

답 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=22.5^\circ$, $\angle C=97.5^\circ$

3 목표| 원에 내접하는 사각형의 성질을 알게 한다.

풀이| $\angle x=180^\circ-(60^\circ+50^\circ)=70^\circ$

$\angle y+70^\circ=180^\circ$, $\angle y=110^\circ$

답 $\angle x=70^\circ$, $\angle y=110^\circ$

4 목표| 원의 접선에 관한 성질을 알게 한다.

풀이| $\angle x=\angle BPS=55^\circ$

$\angle ABP=\angle APT=75^\circ$이므로

$\angle ABD=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

□ABCD는 원 O′에 내접하므로

$\angle y=180^\circ-105^\circ=75^\circ$

답 $\angle x=55^\circ$, $\angle y=75^\circ$

5 목표| 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT'}^2$

$\overline{PT'}=\overline{PT}=5(cm)$

답 5 cm

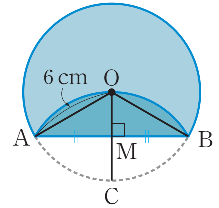
상·수준

1 목표| 현의 수직이등분선의 성질을 알게 한다.

풀이| $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OC}=3(cm)$

$\overline{AM}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}(cm)$

$\overline{AB}=2\overline{AM}=6\sqrt{3}(cm)$



답 $6\sqrt{3}$ cm

2 목표| 원주각과 중심각의 성질을 알게 한다.

풀이| $\angle AEB=90^\circ$

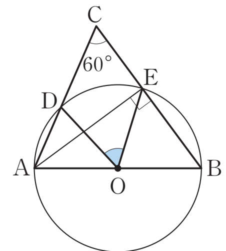
△AEC에서

$\angle CAE=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)$

$=30^\circ$

$\angle DOE=2\times\angle DAE$

$=2\times30^\circ=60^\circ$



답 60°

3 목표| 원에 내접하는 사각형의 성질을 알게 한다.

풀이| $\angle BCD=x$라고 하면

$\angle BAD=180^\circ-x$

△AQD에서

$\angle ADQ=180^\circ-(180^\circ-x)-30^\circ$

$=x-30^\circ$

△CDP에서

$40^\circ+x+(x-30^\circ)=180^\circ$

$\angle BCD=x=85^\circ$

답 85°

4 목표| 원주각의 성질을 활용할 수 있게 한다.

풀이| $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=4:3:2$이므로

$\angle ACB=4x$라고 하면 $\angle CAB=3x$, $\angle ABC=2x$

$4x+3x+2x=180^\circ$, $x=20^\circ$

$\angle CAT=\angle ABC=2\times20^\circ=40^\circ$

답 40°

5 목표| 할선과 접선의 길이 사이의 관계를 활용할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{PB}^2=3\times(3+6)$이므로 $\overline{PB}=3\sqrt{3}(cm)$

$\triangle APB=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}\times\sin 60^\circ=\frac{27}{4}(cm^2)$

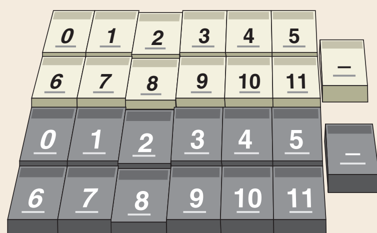
답 $\frac{27}{4}$ cm^2

보드게임 다빈치코드

2～4명이 다음과 같은 게임을 하여 보아라.

준비물

0부터 11까지 하얀색 타일 1개씩
0부터 11까지 검은색 타일 1개씩
검은색, 하얀색 조커 타일(－) 1개씩



게임 방법

① 타일을 모두 숫자를 볼 수 없도록 하여 섞어서 가운데에 놓는다.

② 각자 타일을 4개씩 뽑아서 다른 사람들이 못 보도록 세운다. (숫자를 세울 때, 항상 작은 숫자를 왼쪽, 큰 숫자를 오른쪽에 놓는다. 같은 숫자가 있을 때에는 검은색을 더 왼쪽에 놓는다.)

③ 한쪽 방향으로 돌아가며 차례로 가운데에서 타일을 하나 뽑고, 타일을 숫자 크기에 맞게 세운다. 그리고 다른 사람의 숫자 1개를 추측한다.
이때 추측이 맞으면 상대방은 타일을 넘어뜨려서 보여 준다. 여기에서 그만하고 다음 사람으로 넘어갈 수도 있고, 계속해서 다른 타일의 숫자를 맞힐 수도 있다.
추측이 틀리면 이번에 뽑았던 자신의 타일을 넘어뜨려서 보여 줘야 한다.

④ 이러한 방법으로 다른 사람들의 숨겨진 숫자를 모두 밝혀내고, 끝까지 남은 사람이 게임에서 이긴다.

유의 사항

참가 인원이 4명일 때에는 처음에 타일을 4개씩 뽑지 않고, 3개씩 뽑는다.

격물치지(格物致知)와 논증 수학의 시작

격물치지란 사물의 이치를 연구하여 지식을 완전하게 한다는 의미이다. 격물치지는 사서(四書)의 하나인 “대학(大學)”에 나오는 말로 “대학”은 유교의 교의(敎義)를 체계적으로 간결하게 서술한 책이다. 이 책의 내용은 삼강령(三綱領)인 명명덕(明明德), 신민(新民), 지어지선(止於至善)과 팔조목(八條目)인 격물(格物), 치지(致知), 성의(誠意), 정심(正心), 수신(修身), 제가(齊家), 치국(治國), 평천하(平天下)로 요약된다.

팔조목 중 여섯 조목에 대해서는 “대학”에 해설이 나와 있으나 ‘격물’과 ‘치지’의 두 조목에 대해서는 해설이 없다. 그래서 송대(宋代) 이후 유학자들 사이에 그 해석을 둘러싸고 여러 설이 나와 유교 사상의 근본 문제 중의 하나로 논쟁의 중심이 되었다. 그중 대표적인 것으로는 송나라 주자(朱子)의 설과 명(明)나라 왕양명(王陽明)의 설을 들 수 있다.

주자의 설: 만물은 모두 한 그루의 나무와 한 포기의 풀에 이르기까지 각각 ‘이(理)’를 갖추고 있다. ‘이’를 하나하나 속속들이 깊이 연구해 나가면 어느 땐가는 활연(豁然, 환하게 터진 모양)히 만물의 겉과 속을 알 수 있고 세밀함(精)과 거침(粗)을 명확히 알 수가 있다. 이를 격물치지라고 한다.

왕양명의 설: 격물의 ‘물’이란 사(事)이다. ‘사’란 어버이를 섬긴다든가 임금을 섬긴다든가 하는 마음의 움직임, 즉 뜻이 있는 곳을 말한다. ‘사’라고 한 이상에는 거기에 마음이 있고, 마음 밖에는 ‘물’도 없고 ‘이’도 없다. 그러므로 격물의 ‘격’이란 ‘바로 잡는다.’라고 읽어야 하며 ‘사’를 바로잡고 마음을 바로잡는 것이 ‘격물’이다. 악을 떠나 마음을 바로잡음으로써 사람은 마음속에 선천적으로 갖추어진 양지(良知)를 명확히 할 수가 있다. 이것이 지(知)를 이루는(致) 것이며 ‘치지(致知)’이다.

격물치지에 관한 이와 같은 두 가지 주장을 수학적으로 바꾸어 말하면 모순 없이 참인 진리에 이르는 것이라고 할 수 있다. 즉, 수학에서의 격물치지란 엄밀한 논리적인 추론에 의하여 참이라고 밝혀진 수학적 진리로 해석할 수 있다. 이런 의미에서 수학에 격물치지를 처음 시도한 사람은 고대 그리스의 수학자 탈레스(Thales: ?B.C. 624～?B.C. 546)라고 할 수 있다.

탈레스는 수학사에서 이름이 알려진 최초의 인물로 피타고라스의 스승이었다. 그는 다음과 같은 기초적인 기하학적 결과들을 최초로 연역적인 방법으로 증명하였다.

- 원은 임의의 지름으로 이등분된다.
- 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.
- 교차하는 두 직선에 의해 이루어지는 두 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.
- 두 삼각형에서 대응하는 한 변의 길이가 서로 같고 그 양 끝 각의 크기가 각각 같으면 두 삼각형은 합동이다.
- 반원에 내접하는 각은 직각이다.

사실 위의 다섯 가지 결과들은 탈레스 시대보다 훨씬 이전부터 알고 있었던 것들이다. 그리고 이것들은 모두 직관적으로나 간단한 실험을 통하여 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 이 결과의 가치를 그것들의 내용으로 평가하기보다는 탈레스가 이것을 직관이나 실험 대신 엄격한 논리적 추론으로 입증했다는 사실에 두어야 한다.

격물치지(格物致知) 格(바로잡을 격), 物(만물 물), 致(보낼 치), 知(알 지)

제곱근표(1)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411
2.0	1.414	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435	1.439	1.442	1.446
2.1	1.449	1.453	1.456	1.459	1.463	1.466	1.470	1.473	1.476	1.480
2.2	1.483	1.487	1.490	1.493	1.497	1.500	1.503	1.507	1.510	1.513
2.3	1.517	1.520	1.523	1.526	1.530	1.533	1.536	1.539	1.543	1.546
2.4	1.549	1.552	1.556	1.559	1.562	1.565	1.568	1.572	1.575	1.578
2.5	1.581	1.584	1.587	1.591	1.594	1.597	1.600	1.603	1.606	1.609
2.6	1.612	1.616	1.619	1.622	1.625	1.628	1.631	1.634	1.637	1.640
2.7	1.643	1.646	1.649	1.652	1.655	1.658	1.661	1.664	1.667	1.670
2.8	1.673	1.676	1.679	1.682	1.685	1.688	1.691	1.694	1.697	1.700
2.9	1.703	1.706	1.709	1.712	1.715	1.718	1.720	1.723	1.726	1.729
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744	1.746	1.749	1.752	1.755	1.758
3.1	1.761	1.764	1.766	1.769	1.772	1.775	1.778	1.780	1.783	1.786
3.2	1.789	1.792	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806	1.808	1.811	1.814
3.3	1.817	1.819	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833	1.836	1.838	1.841
3.4	1.844	1.847	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860	1.863	1.865	1.868
3.5	1.871	1.873	1.876	1.879	1.881	1.884	1.887	1.889	1.892	1.895
3.6	1.897	1.900	1.903	1.905	1.908	1.910	1.913	1.916	1.918	1.921
3.7	1.924	1.926	1.929	1.931	1.934	1.936	1.939	1.942	1.944	1.947
3.8	1.949	1.952	1.954	1.957	1.960	1.962	1.965	1.967	1.970	1.972
3.9	1.975	1.977	1.980	1.982	1.985	1.987	1.990	1.992	1.995	1.997
4.0	2.000	2.002	2.005	2.007	2.010	2.012	2.015	2.017	2.020	2.022
4.1	2.025	2.027	2.030	2.032	2.035	2.037	2.040	2.042	2.045	2.047
4.2	2.049	2.052	2.054	2.057	2.059	2.062	2.064	2.066	2.069	2.071
4.3	2.074	2.076	2.078	2.081	2.083	2.086	2.088	2.090	2.093	2.095
4.4	2.098	2.100	2.102	2.105	2.107	2.110	2.112	2.114	2.117	2.119
4.5	2.121	2.124	2.126	2.128	2.131	2.133	2.135	2.138	2.140	2.142
4.6	2.145	2.147	2.149	2.152	2.154	2.156	2.159	2.161	2.163	2.166
4.7	2.168	2.170	2.173	2.175	2.177	2.179	2.182	2.184	2.186	2.189
4.8	2.191	2.193	2.195	2.198	2.200	2.202	2.205	2.207	2.209	2.211
4.9	2.214	2.216	2.218	2.220	2.223	2.225	2.227	2.229	2.232	2.234
5.0	2.236	2.238	2.241	2.243	2.245	2.247	2.249	2.252	2.254	2.256
5.1	2.258	2.261	2.263	2.265	2.267	2.269	2.272	2.274	2.276	2.278
5.2	2.280	2.283	2.285	2.287	2.289	2.291	2.293	2.296	2.298	2.300
5.3	2.302	2.304	2.307	2.309	2.311	2.313	2.315	2.317	2.319	2.322
5.4	2.324	2.326	2.328	2.330	2.332	2.335	2.337	2.339	2.341	2.343

제곱근표(2)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	2.345	2.347	2.349	2.352	2.354	2.356	2.358	2.360	2.362	2.364
5.6	2.366	2.369	2.371	2.373	2.375	2.377	2.379	2.381	2.383	2.385
5.7	2.387	2.390	2.392	2.394	2.396	2.398	2.400	2.402	2.404	2.406
5.8	2.408	2.410	2.412	2.415	2.417	2.419	2.421	2.423	2.425	2.427
5.9	2.429	2.431	2.433	2.435	2.437	2.439	2.441	2.443	2.445	2.447
6.0	2.449	2.452	2.454	2.456	2.458	2.460	2.462	2.464	2.466	2.468
6.1	2.470	2.472	2.474	2.476	2.478	2.480	2.482	2.484	2.486	2.488
6.2	2.490	2.492	2.494	2.496	2.498	2.500	2.502	2.504	2.506	2.508
6.3	2.510	2.512	2.514	2.516	2.518	2.520	2.522	2.524	2.526	2.528
6.4	2.530	2.532	2.534	2.536	2.538	2.540	2.542	2.544	2.546	2.548
6.5	2.550	2.551	2.553	2.555	2.557	2.559	2.561	2.563	2.565	2.567
6.6	2.569	2.571	2.573	2.575	2.577	2.579	2.581	2.583	2.585	2.587
6.7	2.588	2.590	2.592	2.594	2.596	2.598	2.600	2.602	2.604	2.606
6.8	2.608	2.610	2.612	2.613	2.615	2.617	2.619	2.621	2.623	2.625
6.9	2.627	2.629	2.631	2.632	2.634	2.636	2.638	2.640	2.642	2.644
7.0	2.646	2.648	2.650	2.651	2.653	2.655	2.657	2.659	2.661	2.663
7.1	2.665	2.666	2.668	2.670	2.672	2.674	2.676	2.678	2.680	2.681
7.2	2.683	2.685	2.687	2.689	2.691	2.693	2.694	2.696	2.698	2.700
7.3	2.702	2.704	2.706	2.707	2.709	2.711	2.713	2.715	2.717	2.718
7.4	2.720	2.722	2.724	2.726	2.728	2.729	2.731	2.733	2.735	2.737
7.5	2.739	2.740	2.742	2.744	2.746	2.748	2.750	2.751	2.753	2.755
7.6	2.757	2.759	2.760	2.762	2.764	2.766	2.768	2.769	2.771	2.773
7.7	2.775	2.777	2.778	2.780	2.782	2.784	2.786	2.787	2.789	2.791
7.8	2.793	2.795	2.796	2.798	2.800	2.802	2.804	2.805	2.807	2.809
7.9	2.811	2.812	2.814	2.816	2.818	2.820	2.821	2.823	2.825	2.827
8.0	2.828	2.830	2.832	2.834	2.835	2.837	2.839	2.841	2.843	2.844
8.1	2.846	2.848	2.850	2.851	2.853	2.855	2.857	2.858	2.860	2.862
8.2	2.864	2.865	2.867	2.869	2.871	2.872	2.874	2.876	2.877	2.879
8.3	2.881	2.883	2.884	2.886	2.888	2.890	2.891	2.893	2.895	2.897
8.4	2.898	2.900	2.902	2.903	2.905	2.907	2.909	2.910	2.912	2.914
8.5	2.915	2.917	2.919	2.921	2.922	2.924	2.926	2.927	2.929	2.931
8.6	2.933	2.934	2.936	2.938	2.939	2.941	2.943	2.944	2.946	2.948
8.7	2.950	2.951	2.953	2.955	2.956	2.958	2.960	2.961	2.963	2.965
8.8	2.966	2.968	2.970	2.972	2.973	2.975	2.977	2.978	2.980	2.982
8.9	2.983	2.985	2.987	2.988	2.990	2.992	2.993	2.995	2.997	2.998
9.0	3.000	3.002	3.003	3.005	3.007	3.008	3.010	3.012	3.013	3.015
9.1	3.017	3.018	3.020	3.022	3.023	3.025	3.027	3.028	3.030	3.032
9.2	3.033	3.035	3.036	3.038	3.040	3.041	3.043	3.045	3.046	3.048
9.3	3.050	3.051	3.053	3.055	3.056	3.058	3.059	3.061	3.063	3.064
9.4	3.066	3.068	3.069	3.071	3.072	3.074	3.076	3.077	3.079	3.081
9.5	3.082	3.084	3.085	3.087	3.089	3.090	3.092	3.094	3.095	3.097
9.6	3.098	3.100	3.102	3.103	3.105	3.106	3.108	3.110	3.111	3.113
9.7	3.114	3.116	3.118	3.119	3.121	3.122	3.124	3.126	3.127	3.129
9.8	3.130	3.132	3.134	3.135	3.137	3.138	3.140	3.142	3.143	3.145
9.9	3.146	3.148	3.150	3.151	3.153	3.154	3.156	3.158	3.159	3.161

제곱근표(3)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302
11	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450
12	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592
13	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.688	3.701	3.715	3.728
14	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.987
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111
17	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231
18	4.243	4.254	4.266	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347
19	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461
20	4.472	4.483	4.494	4.506	4.517	4.528	4.539	4.550	4.561	4.572
21	4.583	4.593	4.604	4.615	4.626	4.637	4.648	4.658	4.669	4.680
22	4.690	4.701	4.712	4.722	4.733	4.743	4.754	4.764	4.775	4.785
23	4.796	4.806	4.817	4.827	4.837	4.848	4.858	4.868	4.879	4.889
24	4.899	4.909	4.919	4.930	4.940	4.950	4.960	4.970	4.980	4.990
25	5.000	5.010	5.020	5.030	5.040	5.050	5.060	5.070	5.079	5.089
26	5.099	5.109	5.119	5.128	5.138	5.148	5.158	5.167	5.177	5.187
27	5.196	5.206	5.215	5.225	5.235	5.244	5.254	5.263	5.273	5.282
28	5.292	5.301	5.310	5.320	5.329	5.339	5.348	5.357	5.367	5.376
29	5.385	5.394	5.404	5.413	5.422	5.431	5.441	5.450	5.459	5.468
30	5.477	5.486	5.495	5.505	5.514	5.523	5.532	5.541	5.550	5.559
31	5.568	5.577	5.586	5.595	5.604	5.612	5.621	5.630	5.639	5.648
32	5.657	5.666	5.675	5.683	5.692	5.701	5.710	5.718	5.727	5.736
33	5.745	5.753	5.762	5.771	5.779	5.788	5.797	5.805	5.814	5.822
34	5.831	5.840	5.848	5.857	5.865	5.874	5.882	5.891	5.899	5.908
35	5.916	5.925	5.933	5.941	5.950	5.958	5.967	5.975	5.983	5.992
36	6.000	6.008	6.017	6.025	6.033	6.042	6.050	6.058	6.066	6.075
37	6.083	6.091	6.099	6.107	6.116	6.124	6.132	6.140	6.148	6.156
38	6.164	6.173	6.181	6.189	6.197	6.205	6.213	6.221	6.229	6.237
39	6.245	6.253	6.261	6.269	6.277	6.285	6.293	6.301	6.309	6.317
40	6.325	6.332	6.340	6.348	6.356	6.364	6.372	6.380	6.387	6.395
41	6.403	6.411	6.419	6.427	6.434	6.442	6.450	6.458	6.465	6.473
42	6.481	6.488	6.496	6.504	6.512	6.519	6.527	6.535	6.542	6.550
43	6.557	6.565	6.573	6.580	6.588	6.595	6.603	6.611	6.618	6.626
44	6.633	6.641	6.648	6.656	6.663	6.671	6.678	6.686	6.693	6.701
45	6.708	6.716	6.723	6.731	6.738	6.745	6.753	6.760	6.768	6.775
46	6.782	6.790	6.797	6.804	6.812	6.819	6.826	6.834	6.841	6.848
47	6.856	6.863	6.870	6.877	6.885	6.892	6.899	6.907	6.914	6.921
48	6.928	6.935	6.943	6.950	6.957	6.964	6.971	6.979	6.986	6.993
49	7.000	7.007	7.014	7.021	7.029	7.036	7.043	7.050	7.057	7.064
50	7.071	7.078	7.085	7.092	7.099	7.106	7.113	7.120	7.127	7.134
51	7.141	7.148	7.155	7.162	7.169	7.176	7.183	7.190	7.197	7.204
52	7.211	7.218	7.225	7.232	7.239	7.246	7.253	7.259	7.266	7.273
53	7.280	7.287	7.294	7.301	7.308	7.314	7.321	7.328	7.335	7.342
54	7.348	7.355	7.362	7.369	7.376	7.382	7.389	7.396	7.403	7.409

제곱근표(4)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7.416	7.423	7.430	7.436	7.443	7.450	7.457	7.463	7.470	7.477
56	7.483	7.490	7.497	7.503	7.510	7.517	7.523	7.530	7.537	7.543
57	7.550	7.556	7.563	7.570	7.576	7.583	7.589	7.596	7.603	7.609
58	7.616	7.622	7.629	7.635	7.642	7.649	7.655	7.662	7.668	7.675
59	7.681	7.688	7.694	7.701	7.707	7.714	7.720	7.727	7.733	7.740
60	7.746	7.752	7.759	7.765	7.772	7.778	7.785	7.791	7.797	7.804
61	7.810	7.817	7.823	7.829	7.836	7.842	7.849	7.855	7.861	7.868
62	7.874	7.880	7.887	7.893	7.899	7.906	7.912	7.918	7.925	7.931
63	7.937	7.944	7.950	7.956	7.962	7.969	7.975	7.981	7.987	7.994
64	8.000	8.006	8.012	8.019	8.025	8.031	8.037	8.044	8.050	8.056
65	8.062	8.068	8.075	8.081	8.087	8.093	8.099	8.106	8.112	8.118
66	8.124	8.130	8.136	8.142	8.149	8.155	8.161	8.167	8.173	8.179
67	8.185	8.191	8.198	8.204	8.210	8.216	8.222	8.228	8.234	8.240
68	8.246	8.252	8.258	8.264	8.270	8.276	8.283	8.289	8.295	8.301
69	8.307	8.313	8.319	8.325	8.331	8.337	8.343	8.349	8.355	8.361
70	8.367	8.373	8.379	8.385	8.390	8.396	8.402	8.408	8.414	8.420
71	8.426	8.432	8.438	8.444	8.450	8.456	8.462	8.468	8.473	8.479
72	8.485	8.491	8.497	8.503	8.509	8.515	8.521	8.526	8.532	8.538
73	8.544	8.550	8.556	8.562	8.567	8.573	8.579	8.585	8.591	8.597
74	8.602	8.608	8.614	8.620	8.626	8.631	8.637	8.643	8.649	8.654
75	8.660	8.666	8.672	8.678	8.683	8.689	8.695	8.701	8.706	8.712
76	8.718	8.724	8.729	8.735	8.741	8.746	8.752	8.758	8.764	8.769
77	8.775	8.781	8.786	8.792	8.798	8.803	8.809	8.815	8.820	8.826
78	8.832	8.837	8.843	8.849	8.854	8.860	8.866	8.871	8.877	8.883
79	8.888	8.894	8.899	8.905	8.911	8.916	8.922	8.927	8.933	8.939
80	8.944	8.950	8.955	8.961	8.967	8.972	8.978	8.983	8.989	8.994
81	9.000	9.006	9.011	9.017	9.022	9.028	9.033	9.039	9.044	9.050
82	9.055	9.061	9.066	9.072	9.077	9.083	9.088	9.094	9.099	9.105
83	9.110	9.116	9.121	9.127	9.132	9.138	9.143	9.149	9.154	9.160
84	9.165	9.171	9.176	9.182	9.187	9.192	9.198	9.203	9.209	9.214
85	9.220	9.225	9.230	9.236	9.241	9.247	9.252	9.257	9.263	9.268
86	9.274	9.279	9.284	9.290	9.295	9.301	9.306	9.311	9.317	9.322
87	9.327	9.333	9.338	9.343	9.349	9.354	9.359	9.365	9.370	9.375
88	9.381	9.386	9.391	9.397	9.402	9.407	9.413	9.418	9.423	9.429
89	9.434	9.439	9.445	9.450	9.455	9.460	9.466	9.471	9.476	9.482
90	9.487	9.492	9.497	9.503	9.508	9.513	9.518	9.524	9.529	9.534
91	9.539	9.545	9.550	9.555	9.560	9.566	9.571	9.576	9.581	9.586
92	9.592	9.597	9.602	9.607	9.612	9.618	9.623	9.628	9.633	9.638
93	9.644	9.649	9.654	9.659	9.664	9.670	9.675	9.680	9.685	9.690
94	9.695	9.701	9.706	9.711	9.716	9.721	9.726	9.731	9.737	9.742
95	9.747	9.752	9.757	9.762	9.767	9.772	9.778	9.783	9.788	9.793
96	9.798	9.803	9.808	9.813	9.818	9.823	9.829	9.834	9.839	9.844
97	9.849	9.854	9.859	9.864	9.869	9.874	9.879	9.884	9.889	9.894
98	9.899	9.905	9.910	9.915	9.920	9.925	9.930	9.935	9.940	9.945
99	9.950	9.955	9.960	9.965	9.970	9.975	9.980	9.985	9.990	9.995

삼각비의 표

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)	각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	**45°**	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	**46°**	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	**47°**	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	**48°**	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	**49°**	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	**50°**	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	**51°**	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	**52°**	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	**53°**	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	**54°**	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	**55°**	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	**56°**	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	**57°**	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	**58°**	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	**59°**	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	**60°**	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	**61°**	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	**62°**	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	**63°**	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	**64°**	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	**65°**	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	**66°**	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	**67°**	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	**68°**	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	**69°**	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	**70°**	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	**71°**	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	**72°**	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	**73°**	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	**74°**	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	**75°**	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	**76°**	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	**77°**	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	**78°**	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	**79°**	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	**80°**	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	**81°**	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	**82°**	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	**83°**	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	**84°**	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	**85°**	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	**86°**	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	**87°**	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	**88°**	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	**89°**	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	**90°**	1.0000	0.0000	

● 참고 문헌 및 인용 자료

- 김용운, 수학사대전, 경문사, 2010, p. 353
- 김용운, 김용국, 재미있는 수학여행1, 김영사, 1990, p. 110
- 박교식, 수학기호 다시보기, 수학사랑, 2004, p. 83
- 박교식, 수학용어 다시보기, 수학사랑, 2011, p. 154, 214
- 이광연, 피타고라스가 보여주는 조화로운 세계, 프로네시스, 2006, p. 405
- 장혜원, 청소년을 위한 동양수학사, 두리미디어, 2006, p. 162
- 허민, 수학자의 뒷모습 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, 경문사, 2008, p. 113, 154, 165, 222
- Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach(양영오, 조윤동 역), 수학의 역사(상,하), 경문사, 2000, p. 266
- Charles H. Hahn, Pythagoras and the Pythagoreans, Hackett, 2001, p. 405
- Eli Maor, Trigonometric Delights, Princeton University Press, 2002, p. 352
- Ezra Brown, Square roots from 1; 24, 51, 10 to Dan Shanks, The College Math. J., Vol. 30, 1999, p. 112
- Glen Van Brummelen, The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry, Princeton University Press, 2009, p. 368
- H. Eves(이우영, 신항균 역), 수학사, 경문사, 2005, p. 83, 88, 89, 214, 419
- John Stillwell, Mathematics and its history, Springer, 2001, p. 266
- Otto Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy, Springer, 2004, p. 357
- Peter S. Rudman, How mathematics happened, Prometheus Books, 2006, p. 360
- Robert V. Hogg, Joseph W. McKean, Allen Craig(이용구, 김삼용, 이재창 역), 수리통계학개론, 경문사, 2008, p. 266
- Rudolf Kippenhahn(김시형 역), 암호의 세계, 이지북, 2002, p. 155
- Sherman Stein(이우영 역), 아르키메데스, 경문사, 2006, p. 417
- Victor J. Katz, The history of mathematics: brief version, Pearson/Addison-Wesley, 2003, p. 304

집필진

* **신항균** 서울교육대학교 총장
  총괄 진행
* **김화영** 공항중학교 교사
  ① 1 · 4단원, ② 6단원, ③ 4단원 집필
* **윤기원** 용문고등학교 교사
  ① 2단원, ② 2 · 3 · 4단원, ③ 2단원 집필
* **황혜정** 조선대학교 수학교육과 교수
  ① 3단원, ② 5단원, ③ 3단원 집필
* **조준모** 선일여자중학교 교사
  ② 1 · 7 · 8단원 집필
* **이광연** 한서대학교 수학과 교수
  ① 6단원, ③ 1 · 7단원 집필
* **최화정** 청심국제중학교 교사
  ① 5 · 7단원, ③ 5 · 6단원 집필

＊ 표시는 집필진 책임자임 (＊ 신항균)

인정도서심의회

〈심의진〉

＊ **박규홍** 서원대학교	**이종성** 인하대학교	**손철수** 인천광역시교육청	**고석구** 건국대학교
박제남 인하대학교	**정문자** 수원대학교	**이재원** 금오공과대학교	**류희수** 경인교육대학교
오흥준 초당대학교	**조규근** 명지대학교	**오종철** 군산대학교	**전대열** 공주대학교
김성기 계산고등학교	**김미경** 인천광역시교육청	**이환철** 한국과학창의재단	**최병철** 한성과학고등학교
황선미 인천과학고등학교	**전경환** 인하대학교사범대학부속고등학교	**허 석** 부개고등학교	**김기선** 광성중학교
이수진 미추홀외국어고등학교	**강신석** 인천여자고등학교	**김대흥** 신송고등학교	**안영란** 인천신현고등학교
최항철 인천국제고등학교	**이영희** 인천공항중학교	**김완일** 인천과학고등학교	**김용범** 미추홀외국어고등학교
김원일 부평고등학교	**김응덕** 인천공항고등학교	**윤효진** 인천고등학교	**김동수** 신명여자고등학교
유정미 인천해송고등학교	**박희성** 석정여자고등학교	**양혜순** 인천부흥고등학교	**고명호** 인천국제고등학교
오상주 인천진산고등학교	**박상태** 인천신현고등학교	**성미애** 부개여자고등학교	**김석태** 인천국제고등학교
김인경 인천고등학교	**김종오** 광성고등학교	**박정선** 강화여자중학교	**안재권** 강남중학교
김학용 구월중학교	**김태숙** 연수중학교	**김우미** 강화여자중학교	**김지영** 석정중학교
김혜란 연화중학교	**박 선** 인천신정중학교	**김정란** 부평동중학교	**최필향** 부일여자중학교
김미연 갈산중학교	**윤 경** 부일중학교	**정희창** 동덕여자대학교	**황용주** 국립국어원
박지순 국립국어원	**조원형** 국립국어원	**박주화** 국립국어원	**위 진** 국립국어원
김아영 국립국어원	**이준환** 국립국어원	**박미영** 국립국어원	**박정아** 국립국어원
이보라미 국립국어원	**김한샘** 국립국어원	**이현주** 국립국어원	**김선철** 국립국어원
조태린 국립국어원	**정희원** 국립국어원	**이승재** 국립국어원	**정호성** 국립국어원
김태훈 서울과학기술대학교	**김인균** 신라대학교	**손광식** 성공회대학교	**육민수** 성균관대학교
전영옥 상명대학교국어문화원	**정재은** 카이스트글쓰기센터	**정혜선** 서강대학교	**최수일** 성공회대학교
하정수 동국대학교	**이희진** 경인교육대학교	**이지수** 한양대학교	**이선웅** 경희대학교
유하라 국립국어원	**권미영** 국립국어원	**방영심** 이화여자대학교국어문화원	**이수연** 인하대학교
김지혜 성균관대학교	**오재혁** 고려대학교	**곽숙영** 고려대학교	**장혜진** 고려대학교
노석은 고려대학교			

＊ 표시는 심의회 위원장임

〈인천광역시교육청〉

모택상 교육정책국장　**정영숙** 교육과정기획과장　**김학준** 고입 · 교과서팀장　**김연아** 업무담당자

만든 사람들

개발 책임 김영호
편집 김경수, 김화신, 윤준원, 천세규, 최윤정, 김은빛
표지 디자인 박현신
본문 디자인 박현신
표지 그림 김성남
삽화 토리디자인, 김성남
사진 포토라이트
컷 맥컴

인천광역시교육청에서 2012년 8월 31일 인정 승인을 하였음.

중학교 수학 ③ 교사용 지도서

2013. 3. 1.　초판 발행　　2015. 3. 1.　3쇄 발행　　정가　　원
지은이: 신항균 외 6인
발행인: (주)지학사　서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인: (주)벽호　경기도 파주시 한빛로 43

이 교사용 지도서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

교사용 지도서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 교육과학기술부와 한국교과서연구재단이 운영하는 교과서민원바로처리센터(전화: 1566-8572, 웹사이트 주소: http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부 장관이 정하는 기준에 의거
사단법인 한국복사전송권협회(전화 02-2608-2036, www.copycle.or.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의: (주)지학사　콘텐츠본부 수학팀　전화 02-330-5440　전송 02-325-8009
구입 관련 문의: (주)지학사　영업본부 영업관리팀　전화 02-330-5302　전송 02-325-8010
공급 업무 대행: 사단법인 한국검인정교과서　경기도　파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내: 누리집 주소　www.ktbook.com　전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서
ISBN 978-89-05-04060-4 53410

중 학 교 수학 3